ЭКОНОМИКА 1968
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том IV, вып. 1

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

О ЗНАЧЕНИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРИ АНАЛИЗЕ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

А. Л. ЛУРЬЕ

(Москва)

В работах по общим проблемам оптимального развития социалистического хозяйства недостаточное внимание уделяется вопросам, связанным с нелинейным характером зависимости затрат от размеров производства. Цель настоящей заметки — на простейшем арифметическом примере проиллюстрировать теоретическое и практическое значение наличия таких зависимостей.

Рассмотрим однопродуктовую модель народного хозяйства, в которой объем продукции на планируемый период задан: $Q = 100$ и поставлена задача — минимизировать затраты труда. Имеются два способа производства продукции. При первом способе затраты труда составляют $C_1 = 21x_1^{4/3}$, при втором — $C_2 = 4x_2^{3/2}$, где x_1 и x_2 — количества продукции, производимой первым (x_1) и вторым (x_2) способами. Кроме того, чтобы продукт, изготовленный по второму способу, был готов к потреблению, требуются еще некоторые дополнительные операции, затраты по которым составляют $C_3 = 400x_2^{1/2}$. Можно предположить, например, что первый «способ» — это производство продукции с использованием естественных ресурсов в районе А, второй — в районе Б, причем в первом случае транспортными затратами можно пренебречь (вся продукция потребляется в А), а во втором транспортировка из Б в А и является той добавочной операцией, которая требует $400\,x_2^{1/2}$ единиц труда. Таким образом, по производственным процессам принят рост затрат, опережающий увеличение продукции (как это имеет место в сельском хозяйстве при заданном уровне агротехнических знаний), а по транспорту — рост затрат, отстающий от увеличения перевозок.

Формально задача записывается при помощи ограничений

$$x_1 + x_2 = 100, \tag{1}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0 \tag{2}$$

и целевой функции, выражающей зависимость общей суммы затрат (C) от переменных x_1 и x_2:

$$C(x_1,\ x_2) = 21x_1^{4/3} + 4x_2^{3/2} + 400x_2^{1/2} = \min. \tag{3}$$

Решение задачи может быть сведено к определению наименьшего значения функции $F(x_1) = 21x^{4/3} + 4(100 - x_1)^{3/2} + 400(100 - x_1)^{1/2}$ на отрезке 0,100.

Как показывает рис. 1, функция $F(x_1)$ принимает на этом отрезке минимальные значения в двух точках: $x_1 = 20$ и $x_1 = 100$. Мы имеем, следовательно, в нашей модели два относительных (локальных) оптимума: при $x_1 = 20$, $x_2 = 80$ и при $x_1 = 100$, $x_2 = 0$. Абсолютным (глобальным)* является первый из них: $C(20{,}80) = 7579 < C(100{,}0) = 9748$.

Наличие нескольких относительных оптимумов — одна из существенных особенностей моделей, учитывающих различные типы нелинейных зависимостей в отличие от моделей линейного и выпуклого программирования.

Для каждой из оптимальных точек многоэкстремальной модели могут быть определены особые коэффициенты («оценки») со свойствами, аналогичными оценкам в задачах выпуклого программирования. Для первой оптимальной точки нашего при-

---

* Термины «абсолютный» и «относительный» оптимумы представляются более удачными, чем «глобальный» и «локальный», поскольку последние целесообразно сохранить для обозначения оптимальных точек целевых функций всего народного хозяйства (глобальный оптимум) и его отдельных подразделений (локальный).

мера такими оценками будут значения производных:

$$\frac{d(21x_1^{4/3})}{dx_1} = 28x_1^{1/3}, \quad \frac{d(4x_2^{3/2})}{dx_2} = 6x_2^{1/2}, \quad \frac{d(400x_2^{1/2})}{dx_2} = 200x_2^{-1}$$

при $x_1 = 20$, $x_2 = 80$.

Оценка единицы продукции, готовой к потреблению (произведенной в районе А или туда доставленной), составит 76, продукции в районе Б — 54, транспортной операции — 22. При расчете по этим оценкам «малое» изменение интенсивности первого способа окажется «бесприбыльным» и «безубыточным»: на единицу «приращения» продукции (при малых ее изменениях) потребуется 76 единиц труда и такой же будет оценка полученного результата (добавочной продукции). Приращение единицы готовой продукции (т. е. продукции в А) при помощи второго способа потре-

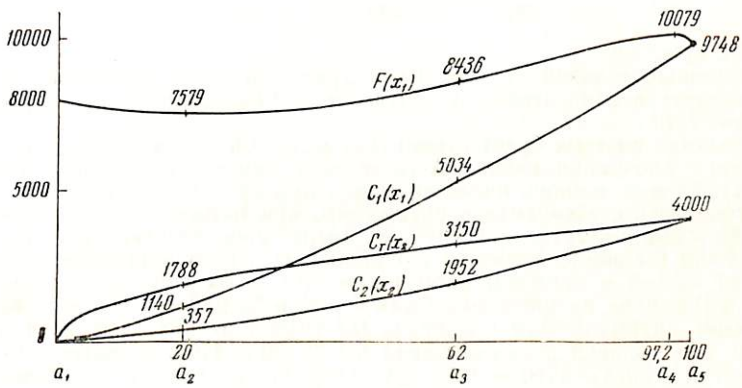

Рис. 1. Зависимость затрат от объема производства: $F(x_1) = 21x_1^{4/3} + 4(100 - x_1)^{3/2} + 400(100 - x_1)^{1/2}$ — общая сумма затрат в зависимости от объема производства в районе А; $C_1(x_1) = 21x_1^{4/3}$ — затраты в районе А в зависимости от объема производства; $C_2(x_2) = 4x_2^{3/2}$ — затраты в районе Б в зависимости от объема производства; $C_T(x_2) = 400x_2^{1/2}$ — затраты на транспорте в зависимости от объема перевозок. По оси абсцисс — показатели объема производства; по оси ординат — показатели затрат

бует использования единицы продукции, произведенной в Б (оценка 54), и перевозки ее в А (оценка 22). Сумма «затрат» (54 + 22) и в этом случае равна оценке «результата» (76). Такое же соотношение будет соблюдаться при расчете «выгодности» малых изменений в масштабах отдельных операций, из которых складывается второй способ: производство продукции в Б (с предельной затратой и оценкой результата, равными 54) и перевозка из А в Б (с предельной затратой и оценкой 22). Таким образом, изменения интенсивности применения способов и операций, вошедших в оптимальный план, оказываются бесприбыльными и безубыточными (способов, не вошедших в план, в данном случае нет).

Для второй оптимальной точки ($x_1 = 100$, $x_2 = 0$) можно построить оценки, при которых малое изменение интенсивности способа, вошедшего в план (в этом случае входит в план лишь первый способ), будет по-прежнему бесприбыльным и безубыточным, а применение с малой, близкой к нулю интенсивностью способов и операций, не вошедших в план, оказалось бы бесприбыльным, но не обязательно безубыточным. Это условие выполняется, если принять оценку продукции, готовой к потреблению, равной 130 ($[d(21x_1^{3/2})] / dx_1$ при $x_1 = 100$), оценку продукции в районе Б равной 0 ($[d(x_2^{3/2})] / dx_2$ при $x_2 = 0$), а оценку перевозочных операций равной любому числу, не меньшему 130.

Возможность построения оценок с указанными свойствами является в многоэкстремальных задачах необходимым признаком оптимальных точек, но в отличие от выпуклых моделей не гарантирует достижения абсолютного оптимума.

Предположим, что в условиях нашей модели «народное хозяйство» развивается на основе свободного рыночного механизма: состоит из отдельных самостоятельных ячеек, стремящихся к максимуму прибыли, причем возможное увеличение или уменьшение производства, о котором каждый раз принимает решение хозяйственная единица, представляет собой малую величину. Нетрудно показать, что конечная точка кривой $F(x_1)$ (рис. 1) — второй относительный оптимум — будет являться в данном случае одной из точек равновесия. В самом деле, если в какой-то момент времени вся продукция производится в районе А ($x_1 = 100$, $x_2 = 0$), то организовать в малых масштабах производство в районе Б невыгодно. При небольшом объеме требующихся в этом случае перевозок транспортные затраты на единицу продукции будут чрезвычайно велики по сравнению с предельными производственными затратами в районе А: последние равны $d(21x_1^{4/3}) / dx_1 = 130$, в то время как $dx_2^{1/2} / dx_2 \to \infty$ при $x_2 \to 0$.

Если в исходный момент времени производство в районе Б имеет место, но при этом $x_1 > 97{,}2$, $x_2 < 2{,}8$, то окажется выгодным уменьшать производство в Б и увеличивать в А, поскольку в соответствующих интервалах значений x_1 и x_2 предельные затраты в районе А меньше, чем сумма предельных затрат по производству продукции в Б и ее доставке к месту потребления:

$$\frac{d(21x_1^{4/3})}{dx_1} < \frac{d(4x_2^{3/2})}{dx_2} + \frac{d(400x_2^{1/2})}{dx_2}$$

при $x_1 > 97{,}2$, $x_2 < 2{,}8$.

При указанных условиях суммарные затраты по всему хозяйству будут, следовательно, тяготеть к относительному оптимуму — 9748, значительно превышающему абсолютный — 7579.

Хозяйственная система будет стремиться к другой точке равновесия, если в исходный момент продукция района А составляет менее 97,2 единицы (интервал a_1, a_4 на рис. 1). Можно, однако, показать, что и при этих условиях точка равновесия не будет совпадать с абсолютным оптимумом, при котором $x_1 = 20$, $x_2 = 80$. Пусть «цена» одной единицы труда — 1 «рубль». Тогда производственные хозяйственные ячейки не были бы заинтересованы в изменениях объемов производства по первому и второму способам (20 и 80) лишь в том случае, если бы цены на продукцию в районах А и Б и цена на перевозку были 74, 54 и 22 руб.— в соответствии с вычисленными выше оптимальными оценками. Но транспорт оказался бы в этом случае убыточным: его валовой доход составил бы $22 \cdot 80 = 1760$; затраты — $1 \cdot 400 \cdot 80^{1/2} = 3578$, убыток — $3578 - 1760 = 1818$ руб. Сокращение объема перевозок при соответствующих изменениях в распределении производства по районам и в ценах на продукцию и перевозки были бы выгодны для транспортной организации, так как уменьшали бы ее убытки. Состояние равновесия возможно лишь при условии, что малые изменения в производстве и в перевозках не выгодны ни производственным ячейкам, ни транспорту. Для этого требуется: 1) чтобы цена на продукцию в районе А равнялась предельным издержкам по первому способу производства ($d(21x_1^{4/3}) / dx_1$), цена на продукцию в районе Б — предельным издержкам по второму способу ($d(4x_2^{3/2}) / dx_2$), а цена на перевозки равнялась разности между ценами на продукцию в районах А и Б ($d21x_1^{4/3} / dx_4$) — ($d4x_2^{3/2} / dx_2$) и 2) чтобы прибыль транспорта достигала максимально возможной при этом величины. Прибыль транспорта при соблюдении условия 1) может быть выражена как функция от объема перевозок — $P(x_2)$ следующим образом:

$$P(x_2) = [28(100 - x_2)^{1/3} - 6x_2^{1/2}]\, x_2 - 400x_2^{1/2},$$

где первый член — валовой доход транспорта, второй — затраты (рис. 2). Функция $P(x_2)$ достигнет максимума, как показано на рис. 2, при $x_2 = 38$ (максимум равен 340). Отсюда $x_1 = 62$, $x_2 = 38$. Полученная точка равновесия лежит значительно правее абсолютного оптимума (рис. 1). Сумма всех затрат (по производству и перевозкам) составляет 8436, т. е. на 857 выше оптимальной.

Таким образом, точки равновесия, к которым тяготеет хозяйственная система при стихийном рыночном регулировании, не только не обеспечивают достижения абсолютного оптимального уровня, но могут не совпадать и ни с одним из относительных оптимумов.

Отмеченные особенности нелинейных многоэкстремальных моделей, отражающие существенные черты экономической действительности, необходимо принимать во внимание при разработке методов составления народнохозяйственных планов и при организации хозрасчетных отношений в социалистическом обществе. Одним из многообещающих путей оптимизации народного хозяйства является разработка итеративных и блочных методов планирования. Решающую роль в соответствующих схемах плановых расчетов играет составление планов хозяйственными подразделениями на основе критерия «максимум прибыли», исходя из некоторой заданной системы оценок (цен), которая затем изменяется в зависимости от результатов сопоставления полученных планов. Новые цены используются хозяйственными организациями для пересоставления планов на основе того же критерия — максимизации прибыли; цены вновь пересматриваются и т. д. В пределе такой процесс должен приводить к балансовой увязке всех планов и к тому, что план каждой хозяйственной ячейки будет для нее наиболее выгодным. Очевидно, что в условиях рассматриваемого примера полученный указанным путем народнохозяйственный план оказался бы соответствующим либо второму относительному оптимуму (т. е. производство в районе Б было бы исключено из плана), либо точке $x_1 = 62$, $x_2 = 38$, означающей завышение народнохозяйственных затрат на 857 единиц. При разработке порядка и методологии планирования, обеспечивающих оптимизацию социалистической экономики, следует учитывать возможность получения подобных результатов, связанных с наличием относительных оптимумов и особенностями тех отраслей народного хозяйства, в которых затраты на единицу продукции снижаются при увеличении масштабов производства.

В нашем примере итеративный процесс, подобный описанному выше, мог бы привести к абсолютному оптимуму, если бы его исходная точка лежала в интервале

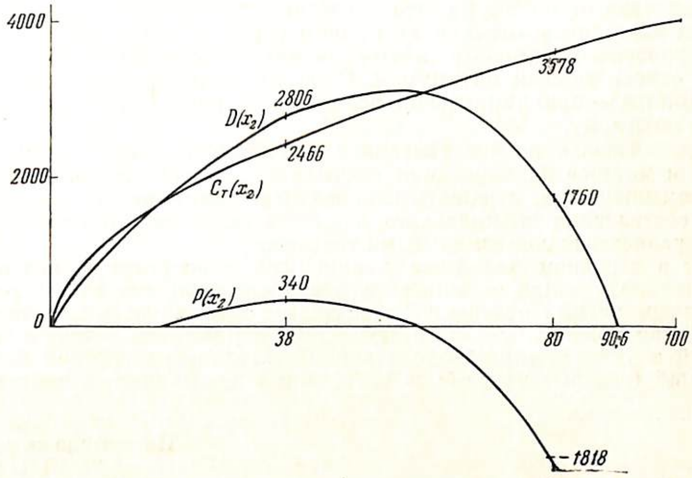

Рис. 2. Доходы и затраты в зависимости от объема перевозок: $D(x_2) = [28(100 - x_2)^{1/3} - 6x_2^{1/2}]x_2$ — валовой доход; $C_T(x_2) = 400\, x_2^{1/2}$ — затраты; $P(x_2) = D(x_2) + C_T(x_2)$ — прибыль (убыток). По оси абсцисс — показатели объема перевозок; по оси ординат — показатели затрат и валового дохода

значений x_1 от 0 до 97,2, а объем работы транспорта определялся не принципом максимума прибыли, а обязательным требованием — полностью удовлетворять потребности в перевозках по цене, равной предельным транспортным издержкам.

Из сказанного вытекает и необходимость некоторых отступлений от требования «безубыточности» при организации хозяйственного расчета.

В нашем примере все хозяйственные организации были бы заинтересованы в точном выполнении оптимального народнохозяйственного плана и правильно, т. е. в соответствии с общими народнохозяйственными интересами, решали бы «малые» вопросы, возникающие в процессе выполнения и корректировки планов, при следующей организации хозрасчетных отношений. Цены, по которым продается продукция, оплачиваются транспортные операции и применяемый труд, должны соответствовать оценкам оптимального плана. Если цену за единицу труда принять равной 1 рублю, то единица продукции в районе А должна оцениваться в 76 руб., в районе Б — 54 руб., а перевозка единицы продукции из Б в А должна «стоить» 22 руб. Кроме того, чтобы производители в районах А и Б находились в одинаковых условиях, следует ввести рентные платежи за естественные ресурсы этих районов. Сумма рентных платежей по району А должна равняться валовому доходу от реализации продукции по цене 76 руб. (равной предельным издержкам) минус действительные затраты на всю продукцию этого района: $76 \cdot 20 - 21 \cdot 20^{4/3} = 380$ руб. Рента по району Б определяется аналогично: $54 \cdot 80 - 4 \cdot 40^{3/2} = 1459$ руб. Если естественные ресурсы — это земельные участки, причем внутри каждого района качество земли одинаково, то, очевидно, ренту за 1 *га* в А и в Б можно вычислить делением полученных сумм на площадь земель соответствующего района. Для производственных хозяйственных ячеек при указанных условиях будет соблюден принцип безубыточности: при нормальной работе по плану они будут полностью покрывать свои расходы доходами.

Для транспорта складывается иное положение. Поскольку предельные издержки транспорта падают с ростом перевозок, его доход при цене 22 руб., равной предельным издержкам, будет, как уже отмечалось, меньше общей суммы затрат на 1818 руб. Чтобы обеспечить необходимый при оптимальном народнохозяйственном плане объем перевозок, стимулирование рублем недостаточно. На транспорт должно быть наложено безусловное обязательство — удовлетворять все требования на перевозки, которые будут ему предъявляться другими хозяйственными организациями при цене на перевозки 22 руб. Чтобы при этом транспортная организация могла произвести все необходимые расходы, ей следует гарантировать дотацию в размере 1818 руб.

ВЫВОДЫ

Разобранный пример, несмотря на его крайне упрощенный характер, иллюстрирует некоторые важные положения, вытекающие из нелинейности народнохозяйственных связей.

1. В условиях стихийного рыночного регулирования хозяйственная система не только потому далека от оптимума, что тяготение к некоторому равновесию осуществляется через постоянные отклонения от него (процесс с плохой сходимостью), но и потому, что уровень, к которому тяготеет система, может не совпадать ни с абсолютным, ни с относительным оптимумом. Одно из преимуществ социалистического планового хозяйства — принципиальная возможность неограниченного приближения к абсолютному оптимуму.

2. Чтобы реализовать полнее указанное преимущество, необходимо при разработке порядка и методов планирования учитывать недостаточность выпуклого и линейного программирования, обращать специальное внимание на многоэкстремальность задачи составления оптимального народнохозяйственного плана и на несовпадение точек равновесия с оптимальными точками.

3. Наличие в народном хозяйстве нелинейных зависимостей различного типа необходимо учитывать и при организации хозяйственного расчета. В ряде случаев согласование хозрасчетных отношений с задачами оптимального народнохозяйственного планирования может требовать отступления от принципа безубыточности, допущения дотаций и установления безусловной обязательности тех или иных хозяйственных операций (которые могут быть «убыточны» для данного хозяйственного подразделения).

Поступила в редакцию
28 VIII 1967

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

Н. Г. ЧУМАЧЕНКО, Ю. А. АЙВАЗЯН, В. Е. ТРУШ

(Киев)

При проектировании системы автоматизированного управления производством (САУП) [1, 2] приходится решать большое количество технических и экономико-математических задач, таких, как сбор и первичная обработка информации, определение мест установки датчиков для передачи информации в САУП, определение основных задач и характеристик САУП, установление очередности решения различных задач для организации работы самой системы САУП и т. д. [3]. Важное значение при этом имеет установление информационных и логических связей между решаемыми задачами, т. е. построение граф-схемы взаимосвязи всех задач [4].

В настоящей заметке предлагается способ построения такой граф-схемы с предварительным разбиением задач на классы. Этот способ делает схему простой и наглядной.

Вначале приведем некоторые определения.

Определение 1. *Информацию, которая поступает в память ЭВМ извне (от датчиков, приказы, разные документы), назовем первичной.*

Определение. 2. *Задача A называется существенной для задачи $Б$, если результаты решения A служат исходными данными для решения B. Этот факт обозначается следующим образом: $A \to B$.*

Определение 3. *Задачи $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называются одновременно существенными для задачи B, если удовлетворяют условиям: 1) $A_i \to B$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; 2) решение задачи B возможно только при условии решения всех задач. $A_1, A_2, \ldots, A_k$.*

Для обозначения этого факта над стрелками, которые соединяют $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с задачей B, пишется одно и то же целое число.

Определение 4. *Задача B зависит от задачи A_0, если существуют такие задачи $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$,* что $A_i \to A_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$ *и* $A_k \to B$.