
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Исследование динамики потока в модели организации грузоперевозок по круговой цепочке станций

© 2021 г. Н.К. Хачатрян, Л.А. Бекларян

Н.К. Хачатрян,

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: nerses@cemi.rssi.ru; nerses-khachatryan@yandex.ru

Л.А. Бекларян,

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: beklar@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию 23.06.2020

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проектов 19-01-00147 и 19-010-00958.

Аннотация. Статья посвящена построению и исследованию модели организации железнодорожных грузоперевозок по круговой цепочке станций. Каждая станция характеризуется определенным числом путей, каждый из которых в произвольный момент времени может быть задействован, а также эффективностью их использования. Движение грузопотока осуществляется с помощью двух технологий. Первая технология основана на взаимодействии соседних станций и задает интенсивность потока между ними в зависимости от соотношения свободных путей и нормативного коэффициента, характеризующего пропускную способность перегонов (участков железнодорожной линии между станциями) и технические характеристики железнодорожного подвижного состава, осуществляющего перевозки. Вторая технология стремится в полной мере использовать пропускную способность станций, которая выражается количеством перевозимого груза за единицу времени в зависимости от загруженности станций и эффективности загрузки путей. Такая модель описывается системой дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Аналитическое решение такой системы крайне затруднительно, поэтому она была исследована численно. Приведены результаты численного исследования указанной системы, основной целью которых является определение динамики грузопотока, а также изучение ее зависимости от параметров модели, характеризующих пропускную способность станций и перегонов, а также от загруженности станций в начальный момент времени.

Ключевые слова: организация железнодорожных грузоперевозок, интенсивность грузопотока, дифференциальные уравнения, численное решение, стационарный поток.

Классификация JEL: C63.

DOI: 10.31857/S042473880013024-5

ВВЕДЕНИЕ

Транспорт играет важную роль в экономике страны. Он обеспечивает развитие, связь, координацию работы всех отраслей экономики страны в целом и регионов в частности. Развитие транспорта является важнейшим условием модернизации экономики. Оно невозможно без оптимального планирования сетей, улучшения организации движения и ряда других задач, решение которых невозможно без математического моделирования транспортных потоков. Здесь можно выделить два крупных направления: моделирование загрузки транспортных сетей городов и моделирование динамики транспортного потока (Швецов, 2003). Первое направление представлено моделями расчета корреспонденций, такими как гравитационная модель (Carrothers, 1956; Wilson, 1971), энтропийная модель (Harris, Wilson, 1978; Porokov, 1995), модели семейства конкурирующих центров (Fotheringham, 1983, 1986), а также моделями распределения потоков по сети, включая различные варианты равновесного распределения и алгоритм оптимальных стратегий (Shvetsov, 2009; Leventhal, Nemhauser, Trotter, 1973; Lo, Chen, 2000; Bar-Gera, 2002; Spiess, Florian, 1989). Второе направление — основными классами динамических моделей: макроскопическими (гидродинамическими), кинетическими (газодинамическими) и микроскопическими. Макроскопические модели (Daganzo, 1994, 1995; Гасников и др., 2013; Сухинова и др., 2009; Иносэ, Хамада, 1983) описывают движение транспортных средств в усредненных терминах, таких как плотность, средняя скорость,

поток и др. При таком подходе транспортный поток уподобляется движению специфической жидкости, поэтому модели этого класса также называют гидродинамическими. Микроскопически называются модели, в которых явно моделируется движение каждого автомобиля. Такой подход позволяет теоретически достичь более точного описания движения транспортных средств по сравнению с усредненным макроописанием, однако этот подход требует больших вычислительных ресурсов при практических применениях. Примерами таких моделей являются модели следования за лидером (Brackstone, McDonald, 2000), модели оптимальной скорости (Bando et al., 1995), модель Трайбера (Treiber, Hennecke, Helbing, 2000), а также модели клеточных автоматов (Cremer, Ludwig, 1986; Chowdhury, Santen, Schadschneider, 2000). Промежуточное место занимает кинетический подход, при котором поток задается плотностью распределения транспортных средств в фазовом пространстве, т.е. пространстве координат и скоростей автомобилей (Helbing, Treiber, 1998; Nelson, 1995). Динамика фазовой плотности характеризуется кинетическим уравнением. Это уравнение основано на усреднении эффектов взаимодействий индивидуальных транспортных средств, и в этом смысле оно ближе к микроуровню, чем к гидродинамическим уравнениям. Отметим, что модели, в которых движение транспортного средства уподобляется какому-либо физическому потоку (гидро- и газодинамические модели), как правило, применяются при исследовании движения автомобильного транспорта.

В данной статье представлена макроскопическая динамическая модель движения железнодорожного транспорта по сети, представляющей собой круговую цепочку станций (Beklaryan, Khachatryan, 2006; Khachatryan, Akopov, 2017; Khachatryan, Akopov, Belousov, 2018; Beklaryan, Khachatryan, Akopov, 2019; Бекларян, Хачатрян, 2013; Бекларян, Хачатрян, 2019). Транспортный поток в железнодорожной сети формируется в результате применения технологий, осуществляющих взаимодействие соседних станций с учетом их пропускной способности, а также пропускной способности перегонов. Такая модель позволяет прогнозировать загруженность станций и динамику потока, возникающего в железнодорожной сети. В отличие от аналогичных моделей, исследованных в работах, указанных выше, станции имеют различные характеристики (число путей и эффективность их использования).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение грузопотока по круговой цепочке, состоящей из n станций. Обозначим через Δ_i , $i = 1, \dots, n$ число путей на станции i . Каждая станция в произвольный момент времени характеризуется числом задействованных путей. Пусть $z_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ — число путей, задействованных на станции i в момент времени t . Тогда $\Delta_i - z_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ — число свободных путей на станции i в момент времени t . Очевидно, что функции $z_i(t)$ должны удовлетворять ограничениям:

$$0 \leq z_i(t) \leq \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Движение грузопотока осуществляется с помощью двух технологий. Первая технология основана на процедуре взаимодействия соседних станций. Согласно ей произвольная станция:

1) принимает груз с предыдущей станции, если число свободных путей на ней больше, чем на предыдущей станции, и предыдущая станция не пуста. При этом интенсивность отправки пропорциональна как разности чисел свободных путей на этих станциях, так и числу свободных путей на данной станции;

2) отправляет груз на следующую станцию, если число свободных путей на ней меньше, чем на следующей станции, и она не пуста. При этом интенсивность отправки пропорциональна как разности чисел свободных путей на этих станциях, так и числу свободных путей на следующей станции.

Таким образом, каждая станция с номером i ($2 \leq i \leq n-1$) в рамках первой технологии должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha[(\Delta_i - z_i) - (\Delta_{i-1} - z_{i-1})](\Delta_i - z_i)\text{sign}(\Delta_i - z_i)$, если $\Delta_i - z_i > \Delta_{i-1} - z_{i-1}$, и отправить груз на следующую станцию с интенсивностью $\alpha[(\Delta_{i+1} - z_{i+1}) - (\Delta_i - z_i)](\Delta_{i+1} - z_{i+1})\text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1})\text{sign}(z_i)$, если $\Delta_{i+1} - z_{i+1} > \Delta_i - z_i$.

Для станции 1 предыдущей является станция n , соответственно, для станции n последующей является станция 1. Поэтому станция 1 в рамках первой технологии должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha[(\Delta_1 - z_1) - (\Delta_n - z_n)](\Delta_1 - z_1)\text{sign}(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(z_n)$, если $\Delta_1 - z_1 > \Delta_n - z_n$, и отправить груз на следующую станцию с интенсивностью $\alpha[(\Delta_2 - z_2) - (\Delta_1 - z_1)](\Delta_2 - z_2)\text{sign}(\Delta_2 - z_2)\text{sign}(z_1)$, если $\Delta_2 - z_2 > \Delta_1 - z_1$.

Аналогично, станция n должна принять груз с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha[(\Delta_n - z_n) - (\Delta_{n-1} - z_{n-1})](\Delta_n - z_n)\text{sign}(\Delta_n - z_n)\text{sign}(z_{n-1})$, если, $\Delta_n - z_n > \Delta_{n-1} - z_{n-1}$ и отправить груз на следующую станцию с интенсивностью $\alpha[(\Delta_1 - z_1) - (\Delta_n - z_n)](\Delta_1 - z_1)\text{sign}(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(z_n)$, если $\Delta_1 - z_1 > \Delta_n - z_n$.

Функция $\text{sign}(\cdot)$ определяется формулой

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Параметр α характеризует потенциал первой технологии и ограничивается пропускной способностью перегонов (участков железнодорожной линии между станциями) и техническими характеристиками железнодорожного подвижного состава, осуществляющего перевозки.

Каждая станция обладает определенной пропускной способностью. В данной модели она выражается количеством перевозимого груза за единицу времени в зависимости от загруженности станций, причем в общем случае эта зависимость у каждой станции своя из-за разницы в числе путей и эффективности их загрузки. Предполагается, что станции стремятся использовать пропускную способность в полной мере. Данная задача решается в рамках второй технологии, согласно которой произвольная станция дополнительно принимает и отправляет грузопоток с интенсивностью, определяемой пропускной способностью на ней и на следующей станции соответственно. Она описывается с помощью непрерывных убывающих функций $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, определенных на отрезке $[0, \Delta_i]$, причем $\varphi_i(\Delta_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, интенсивность движения грузопотока на станциях задается с помощью системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \alpha(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n)\text{sign}(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n)(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(z_n) - \\ & - \alpha(\Delta_2 - z_2 - \Delta_1 + z_1)\text{sign}(\Delta_2 - z_2 - \Delta_1 + z_1)(\Delta_2 - z_2)\text{sign}(\Delta_2 - z_2)\text{sign}(z_1) + \\ & + \varphi_1(z_1)\text{sign}(z_n) - \varphi_2(z_2)\text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \alpha(\Delta_i - z_i - \Delta_{i-1} + z_{i-1})\text{sign}(\Delta_i - z_i - \Delta_{i-1} + z_{i-1})(\Delta_i - z_i)\text{sign}(\Delta_i - z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \\ & - \alpha(\Delta_{i+1} - z_{i+1} - \Delta_i + z_i)\text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1} - \Delta_i + z_i)(\Delta_{i+1} - z_{i+1})\text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1})\text{sign}(z_i) + \\ & + \varphi_i(z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \varphi_{i+1}(z_{i+1})\text{sign}(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & \alpha(\Delta_n - z_n - \Delta_{n-1} + z_{n-1})\text{sign}(\Delta_n - z_n - \Delta_{n-1} + z_{n-1})(\Delta_n - z_n)\text{sign}(\Delta_n - z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \\ & - \alpha(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n)\text{sign}(\Delta_1 - z_1 - \Delta_n + z_n)(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(z_n) + \\ & + \varphi_n(z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \varphi_1(z_1)\text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что конструкция правых частей системы (2)–(4) гарантирует, что всякое ее решение, удовлетворяющее условию (1) в начальный момент времени, будет удовлетворять ему и в последующие моменты времени.

Перепишем систему (2)–(4) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \alpha(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n)\text{sign}(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n)(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(z_n) - \\ & - \alpha(z_1 - z_2 + \Delta_2 - \Delta_1)\text{sign}(z_1 - z_2 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_2 - z_2)\text{sign}(\Delta_2 - z_2)\text{sign}(z_1) + \\ & + \varphi_1(z_1)\text{sign}(z_n) - \varphi_2(z_2)\text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) = & \alpha(z_{i-1} - z_i + \Delta_i - \Delta_{i-1})\text{sign}(z_{i-1} - z_i + \Delta_i - \Delta_{i-1})(\Delta_i - z_i)\text{sign}(\Delta_i - z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \\ & - \alpha(z_i - z_{i+1} + \Delta_{i+1} - \Delta_i)\text{sign}(z_i - z_{i+1} + \Delta_{i+1} - \Delta_i)(\Delta_{i+1} - z_{i+1})\text{sign}(\Delta_{i+1} - z_{i+1})\text{sign}(z_i) + \\ & + \varphi_i(z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \varphi_{i+1}(z_{i+1})\text{sign}(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n(t) = & \alpha(z_{n-1} - z_n + \Delta_n - \Delta_{n-1})\text{sign}(z_{n-1} - z_n + \Delta_n - \Delta_{n-1})(\Delta_n - z_n)\text{sign}(\Delta_n - z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \\ & - \alpha(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n)\text{sign}(z_n - z_1 + \Delta_1 - \Delta_n)(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(\Delta_1 - z_1)\text{sign}(z_n) + \\ & + \varphi_n(z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \varphi_1(z_1)\text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (7)$$

Помимо системы (5)–(7) рассмотрим ее частный случай соответствующий идентичности всех станций, т.е. в предположении, что все станции содержат одинаковое число путей и с одинаковой

эффективностью их могут использовать. В этом случае $\Delta_i = \Delta_j = \Delta$, $\varphi_i(\cdot) = \varphi_j(\cdot) = \varphi(\cdot)$ для всех $i, j = 1, \dots, n$ и система уравнений (5)–(7) приобретает вид:

$$\dot{z}_1(t) = \alpha(z_n - z_1)\text{sign}(z_n - z_1)(\Delta - z_1)\text{sign}(\Delta - z_1)\text{sign}(z_n) - \alpha(z_1 - z_2)\text{sign}(z_1 - z_2)(\Delta - z_2) \times \\ \times \text{sign}(\Delta - z_2)\text{sign}(z_1) + \varphi(z_1)\text{sign}(z_n) - \varphi(z_2)\text{sign}(z_1), \quad t \in [0, +\infty); \quad (8)$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha(z_{i-1} - z_i)\text{sign}(z_{i-1} - z_i)(\Delta - z_i)\text{sign}(\Delta - z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \alpha(z_i - z_{i+1})\text{sign}(z_i - z_{i+1}) \times \\ \times (\Delta - z_{i+1})\text{sign}(\Delta - z_{i+1})\text{sign}(z_i) + \varphi(z_i)\text{sign}(z_{i-1}) - \varphi(z_{i+1})\text{sign}(z_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad t \in [0, +\infty); \quad (9)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha(z_{n-1} - z_n)\text{sign}(z_{n-1} - z_n)(\Delta - z_n)\text{sign}(\Delta - z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \alpha(z_n - z_1)\text{sign}(z_n - z_1) \times \\ \times (\Delta - z_1)\text{sign}(\Delta - z_1)\text{sign}(z_n) + \varphi(z_n)\text{sign}(z_{n-1}) - \varphi(z_1)\text{sign}(z_n), \quad t \in [0, +\infty). \quad (10)$$

Система уравнений (8)–(10) имеет бесконечное множество стационарных решений вида

$$z_i = c, \quad 0 \leq c \leq \Delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Аналитическое исследование других решений системы (8)–(10), а также решений системы (5)–(7), крайне затруднительно, так как правые части дифференциальных уравнений в общем случае являются разрывными функциями. В связи с этим системы (8)–(10) и (5)–(7) были исследованы численно.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Перейдем к изложению результатов численных экспериментов, в которых функции $\varphi_i(\cdot)$ были определены:

$$\varphi_i(z_i) = a_i(\Delta_i^2 - z_i^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Напомним, что функции $\varphi_i(\cdot)$ должны быть убывающими и удовлетворяющими условию $\varphi_i(\Delta_i) = 0$. Параметр a_i , участвующий в определении этих функций, описывает эффективность загрузки путей на станции i . Определяя такой класс функций $\varphi_i(\cdot)$, мы предполагаем, что пропускная способность станций зависит как от числа путей, так и от эффективности их использования. Причем с ростом эффективности путей пропускная способность растет линейно, а с увеличением числа путей — больше чем линейно. Основная задача численных экспериментов заключалась в исследовании динамики решений системы (5)–(7) (в частности (8)–(10)), определяющей динамику интенсивности грузопотока, а также ее зависимость от начальных значений и параметров модели $\alpha, a_i, \Delta_i, i = 1, \dots, n$.

2.1. Численное решение системы (8)–(10)

Для системы (8)–(10) имеем $\varphi_i(z_i) = \varphi(z_i) = a(\Delta^2 - z_i^2)$, $i = 1, \dots, n$, т.е. параметрами являются α, a, Δ . Система (8)–(10) имеет стационарные решения вида (11). Как показывают численные эксперименты при любых значениях параметров α, a, Δ , система (8)–(10) имеет непрерывное решение, причем любое ее решение со временем выходит на стационарный режим, т.е. существует $\bar{t} > 0$ такое, что всякое решение $\{z_i(\cdot)\}_1^n$ системы (8)–(10) удовлетворяет условию $z_i = \bar{c}$, $t \in [\bar{t}, +\infty)$. Более того, значение $\bar{c}$ зависит только от начальных условий и определяется формулой $\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i(0)$.

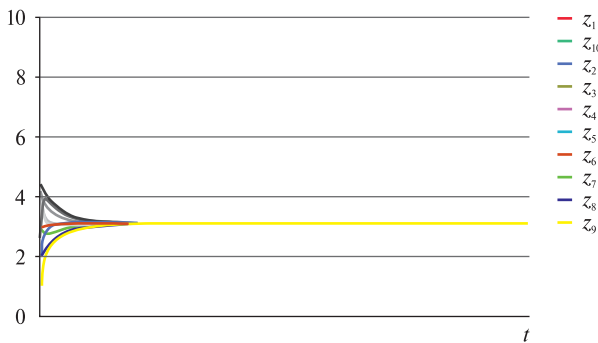


Рис. 1. График решения системы (8)–(10)

Момент времени $\bar{t}$ характеризуется начальными условиями и параметрами модели. На рис. 1 приведен график решений системы (8)–(10) при $\alpha = 2$, $a = 0,1$, $\Delta = 10$ и начальных условиях: $z_1(0) = 3$, $z_2(0) = 2$, $z_3(0) = 5$, $z_4(0) = 3$, $z_5(0) = 4$, $z_6(0) = 4$, $z_7(0) = 3$, $z_8(0) = 2$, $z_9(0) = 1$, $z_{10}(0) = 4$.

Из правых частей уравнений (8)–(10) следует, что, начиная с момента времени $\bar{t}$, первые два слагаемых в них равны нулю, ненулевыми являются только слагаемые, определяемые функцией $\varphi_i(\cdot)$. Это означает, что со временем движение грузопотока осуществляется только в рамках второй технологии, каждая станция

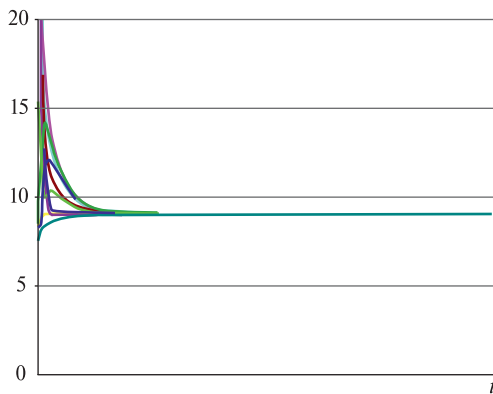


Рис. 2. Интенсивность потока в случае идентичных станций

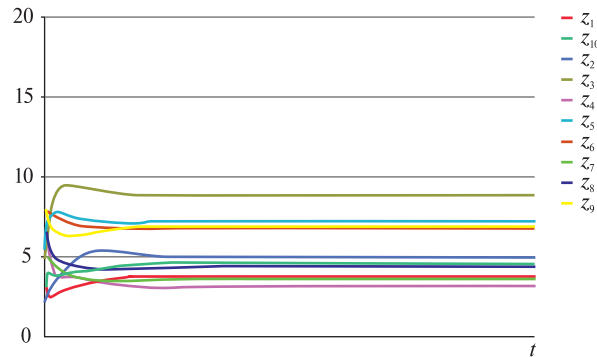


Рис. 3. Графики решений системы (5)–(7) первого типа

принимает груз с предыдущей станции и отправляет на следующую станцию с постоянной интенсивностью $\phi(\bar{c})$, т.е. в системе грузоперевозок устанавливается стационарный поток. На рис. 2 приведены графики интенсивностей потоков, возникающих между станциями.

Как следует из определения функции $\phi(\cdot)$, величина этого потока прямо пропорциональна параметрам a , Δ и обратно пропорциональна значению $\bar{c}$. Таким образом, в случае идентичности станций в системе грузоперевозок начиная с некоторого момента времени устанавливается стационарный поток, величина которого увеличивается по мере роста пропускной способности станций и уменьшается с увеличением загрузки станций в начальный момент времени ($\bar{c}$). Величина этого потока не зависит от характеристики первой технологии, т.е. параметра α . От него зависит время выхода на стационарный поток ($\bar{t}$). Чем меньше значение параметра α , тем позже наступит это время. Наконец отметим, что все выводы, полученные в этом параграфе относительно динамики решений системы (8)–(10) и интенсивности потока, остаются справедливыми и при $\alpha = 0$, т.е. в системе грузоперевозок устанавливается такой же стационарный поток, как и при $\alpha > 0$, но в более отдаленном будущем.

2.2. Численное решение системы (5)–(7)

Перейдем к исследованию общей системы (5)–(7). В результате численных экспериментов было установлено, что система (5)–(7) имеет два типа решений. Первый тип характеризуется непрерывными правыми частями и обладает следующим свойством:

$$\exists \tilde{t} > 0: z_i = \bar{c}_i, 0 < \bar{c}_i < \Delta_i, i = 1, \dots, n, t \in [\tilde{t}, +\infty). \quad (13)$$

Кроме того, выполняется условие $\left(\sum_{i=1}^n \bar{c}_i\right) / n = \bar{c}$, где $\bar{c} = \left(\sum_{i=1}^n z_i(0)\right) / n$.

Второй тип решения системы (5)–(7) характеризуется разрывными правыми частями. Как показывают численные эксперименты, такие решения являются следствием колебаний одной или нескольких компонент решения в правой окрестности нуля, периодически принимающих нулевые значения (терпят разрывы). Это приводит к разрывам остальных компонент решения. Вследствие такого поведения решений интенсивность грузопотока меняется скачкообразно. Данное поведение характерно для решений с малыми начальными значениями и решениями, полученными при значениях параметра α , близкого к нулю. При $\alpha = 0$ решения системы (5)–(7) разрывны независимо от начальных условий. На практике данный режим грузоперевозок сложно реализуем, поэтому такой тип решений мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Итак, будем исследовать первый тип решений. На рис. 3 приведен пример решения для $\alpha = 2$ и начальными значениями:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 10, \Delta_2 = 11, \Delta_3 = 12, \Delta_4 = 8, \Delta_5 = 10, \Delta_6 = 11, \Delta_7 = 9, \Delta_8 = 10, \Delta_9 = 12, \Delta_{10} = 10, \\ a_1 = 0,1, a_2 = 0,2, a_3 = 0,3, a_4 = 0,05, a_5 = 0,4, a_6 = 0,1, a_7 = 0,1, a_8 = 0,2, \\ a_9 = 0,2, a_{10} = 0,02, z_1(0) = 4, z_2(0) = 2, z_3(0) = 5, z_4(0) = 7, z_5(0) = 6, \\ z_6(0) = 8, z_7(0) = 5, z_8(0) = 6, z_9(0) = 8, z_{10}(0) = 3. \end{aligned} \quad (14)$$

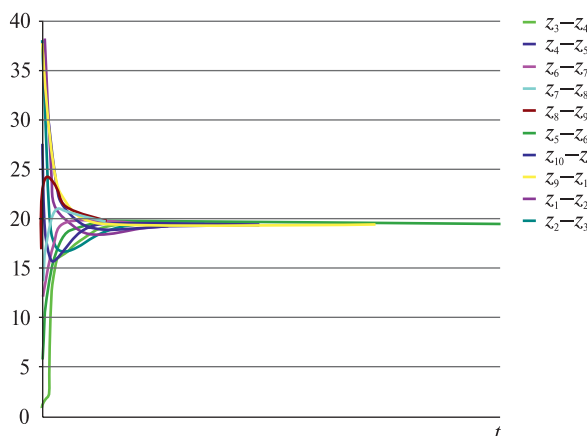


Рис. 4. Интенсивность потока в общем случае

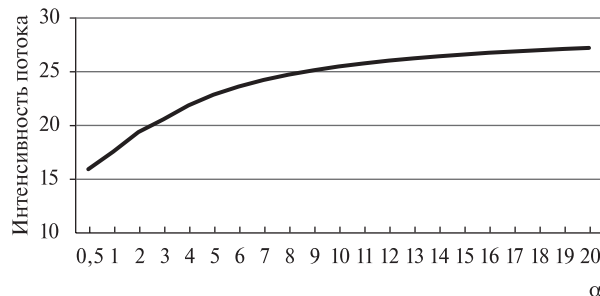


Рис. 5. Зависимость интенсивности стационарного потока от параметра α

Из-за симметричности правил приема и отправки грузов (отправка грузов со станции i на станцию $i + 1$ с определенной интенсивностью равносильна приему грузов на станции $i + 1$ с той же интенсивностью) и условия (13) следует, что каждая станция принимает груз с предыдущей станции и отправляет на следующую станцию с постоянной и одинаковой интенсивностью, т.е. в системе грузоперевозок, как и в случае идентичных станций, устанавливается стационарный поток (рис. 4). Величина данного потока зависит как от параметров модели, так и от начальных значений, а точнее, от их среднего арифметического $\bar{c}$. С помощью численных экспериментов исследуем эти зависимости.

Начнем с параметра α , который характеризует потенциал первой технологии. На рис. 5 приведен график зависимости интенсивности стационарного потока от α при фиксированных значениях остальных параметров и начальных значений (см. (14)).

Как мы видим, с увеличением параметра α растет интенсивность стационарного потока, а скорость ее роста уменьшается. При этом уменьшаются и слагаемые в правой части системы (5)–(7), отвечающие за прием и отставку грузов в рамках первой технологии. Это означает, что первая технология имеет ограниченный потенциал.

Перейдем к исследованию зависимости интенсивности стационарного потока от характеристик пропускной способности станций, т.е. от a_i и Δ_i .

Начнем с параметра a_i . На рис. 6 приведена зависимость интенсивности стационарного потока от a_1 при фиксированных значениях остальных параметров и начальных условий.

С увеличением a_1 растет поток, причем вначале скорость является возрастающей, но с некоторого значения она становится убывающей. Такая же тенденция наблюдается для других параметров a_i . Таким образом, увеличение эффективности использования путей на некоторой выбранной станции до определенного уровня дает неплохой вклад в увеличение интенсивности потока во всей системе грузоперевозок. Однако в силу ограниченности пропускной способности на остальных станциях дальнейшее увеличение эффективности путей на одной станции уже не может привести к ощутимому вкладу в увеличение интенсивности грузопотока.

Исследуем зависимость стационарного потока от числа путей Δ_i . На рис. 7 приведена зависимость от числа путей на первой станции при фиксированных значениях остальных параметров

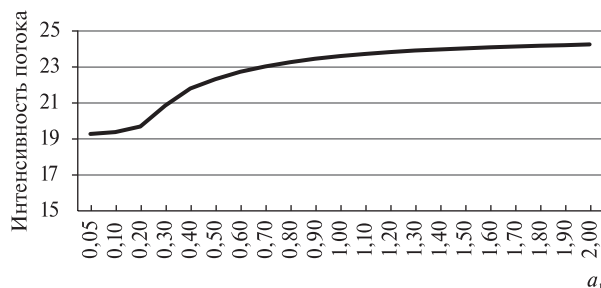


Рис. 6. Зависимость интенсивности стационарного потока от a_1

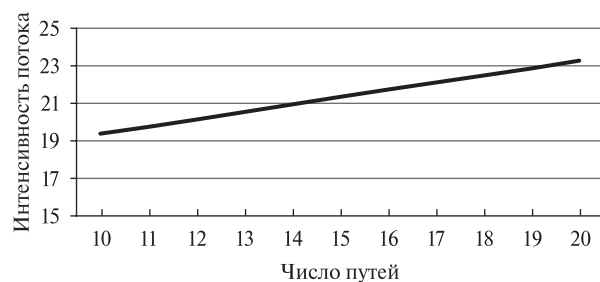


Рис. 7. Зависимость интенсивности стационарного потока от числа путей на станции 1

и начальных условий. Данная зависимость является линейной. Напомним, что пропускная способность станций зависит от числа путей согласно формуле (12). Такая же зависимость наблюдается и в отношении других параметров.

При исследовании зависимости интенсивности стационарного потока от начальной загруженности станций $\bar{c}$ эксперименты показали, что она является убывающей (рис. 8).

Максимальная начальная загруженность станций, равная 10,3, соответствует ситуации, когда в начальный момент времени на всех станциях задействованы все пути, т.е. $z_i(0) = \Delta_i$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае организация грузопотока в рамках данной модели невозможна. Она также невозможна, когда в начальный момент времени на всех станциях все пути свободны, т.е. $z_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$.



Рис. 8. Зависимость интенсивности стационарного потока от начальной загруженности станций (при фиксированных значениях параметров)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована модель организации грузоперевозок по круговой цепочке станций. Движение грузопотока осуществляется с помощью двух технологий, задающих интенсивность грузопотока в зависимости от пропускной способности станций и перегонов. Такая модель описывается системой дифференциальных уравнений с ограничениями, описывающими допустимый диапазон изменения числа задействованных путей на станциях. Эти ограничения могут порождать разрывы в правых частях уравнений. В силу сложности получения аналитического решения данная система была исследована численно. Проведенные эксперименты позволили выявить указанные разрывы. Они возникают вследствие того, что со временем некоторые компоненты решения начинают колебаться у левой границы указанных выше диапазонов (нуля), периодически выходя на нее. Такое поведение характерно для решений с малыми начальными значениями и решениями, полученными при значениях параметра α , близкого к нулю, т.е. в случае недостаточной обеспеченности станций грузом в начальный момент времени и низкой пропускной способности перегонов. Отметим, что данное свойство решений не распространяется на частный случай системы, описывающей модель с идентичными станциями (одинаковое число путей на всех станциях и эффективность их использования). В этом случае независимо от характеристик станций и перегонов, а также их начальной загруженности, в системе грузоперевозок устанавливается стационарный поток.

Разрывные решения приводят к большим колебаниям в величине потока, возникающего в системе грузоперевозок. На практике такой режим грузоперевозок крайне сложно реализовать, поэтому более детально изучены режимы грузоперевозок, определяемые непрерывными решениями. Как показали численные эксперименты, такие режимы грузоперевозок приводят к установлению стационарного потока в системе грузоперевозок. Исследование зависимости величины данного потока от характеристик используемых технологий показало, что с увеличением параметра α (характеристики первой технологии) скорость роста интенсивности стационарного потока уменьшается. Это говорит об ограниченном потенциале первой технологии. Таким же свойством обладает и одна из характеристик второй технологии, а именно, эффективность использования станционных путей. Скорость роста интенсивности стационарного потока от другой характеристики второй технологии (числа путей на станции) является постоянной.

В заключении отметим, что с помощью такой модели, предварительно оценив ее параметры на основе статистических данных, можно прогнозировать эффект, полученный от мероприятий, связанных с увеличением пропускной способности той или иной станции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К. (2013). Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т. 53. № 10. С. 1649–1667. [Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2013). On one class of dynamic transportation models. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53, 10, 1649–1667 (in Russian).]

- Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К.** (2019). Динамические модели организации грузопотока на железнодорожном транспорте // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 3. С. 62–73. [**Beklaryan L.A., Khachatryan N.K.** (2019). Dynamic models of cargo flow organization on railway transport. *Economics and Mathematical Methods*, 55 (3), 66–73 (in Russian).]
- Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.** (2013). Введение в математическое моделирование транспортных потоков. А.В. Гасников (ред.). М.: МЦНМО. [**Gasnikov A.V., Klenov S.L., Nurminskii E.A., Kholodov Ya.A., Shamrai N.B.** (2013). *Introduction to mathematical model operation of traffic flows*. A.V. Gasnikov (ed.) Moscow: MCCME (in Russian).]
- Иносэ Х., Хамада Т.** (1983). Управление дорожным движением. М.: Транспорт. [**Inose H., Hamada T.** (1983). *Road traffic control*. Moscow: Transport (in Russian).]
- Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чубарова Н.Г.** (2009). Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // *Математическое моделирование*. Т. 21. № 2. С. 118–126. [**Sukhinova A.B., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G.** (2009). Two-dimensional macroscopic model of traffic flows. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 1, 6, 669–676 (in Russian).]
- Швецов В.И.** (2003). Математическое моделирование транспортных потоков // *Автоматика и телемеханика*. № 11. С. 3–46. [**Shvetsov V.I.** (2003). Automation and remote control. *Avtomatika i Telemekhanika*, 11, 3–46 (in Russian).]
- Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y.** (1995). Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review. E*, 51, 1035–1042.
- Bar-Gera H.** (2002). Origin-based algorithm for the traffic assignment problem. *Transportation Science*, 36, 4, 398–417.
- Beklaryan L.A., Khachatryan N.K.** (2006). Traveling wave type solutions in dynamic transport models. *Functional Differential Equations*, 13, 12, 125–155.
- Beklaryan L.A., Khachatryan N.K., Akopov A.S.** (2019). Model for organization cargo transportation at resource restrictions. *International Journal of Applied Mathematics*, 32, 4, 627–640.
- Brackstone M., McDonald M.** (2000). Car following: A historical review. *Transportation Research. F*, 2, 181–196.
- Carrothers G.A.P.** (1956). An historical review of the gravity and potential concepts of human interaction. *J. American Instit. Planners*, 22, 94–102.
- Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A.** (2000). Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Physics Reports*, 329, 199–329.
- Cremer M., Ludwig J.** (1986). A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28, 297–303.
- Daganzo C.F.** (1994). The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *Transportation Research. B*, 28, 269–287.
- Daganzo C.F.** (1995). The cell transmission model. Part II: Network traffic. *Transportation Research. B*, 29, 79–93.
- Fotheringham A.S.** (1983). A new set of special-interaction models: The theory of competing destinations. *Environment and Planning. A*, 15, 15–36.
- Fotheringham A.S.** (1986). Modelling hierarchical destination choice. *Environment and Planning. A*, 18, 401–418.
- Harris B., Wilson A.G.** (1978). Equilibrium values and dynamics of attractiveness terms in production-constrained spatial-interaction models. *Environment and Planning. A*, 10, 371–388.
- Helbing D., Treiber M.** (1998). Gas-kinetic-based traffic model explaining observed hysteretic phase transition. *Physical Review Letters*, 81, 3042–3045.
- Khachatryan N.K., Akopov A.S.** (2017). Model for organizing cargo transportation with an initial station of departure and a final station of cargo distribution. *Business Informatics*, 1, 25–35.
- Khachatryan N.K., Akopov A.S., Belousov F.A.** (2018). About quasi-solutions of traveling wave type in models for organizing cargo transportation. *Business Informatics*, 1 (43), 61–70.
- Leventhal T., Nemhauser G.L., Trotter L.** (1973). A column generation algorithm for optimal traffic assignment. *Transportation Science*, 7, 168–176.
- Lo H.K., Chen A.** (2000) Traffic equilibrium problem with route-specific costs: Formulation and algorithms. *Transportation Research. B*, 34, 6, 493–513.
- Nelson P.** (1995). A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions. *Transport Theory and Statistical Physics*, 24, 383–409.
- Popkov Yu.S.** (1995). *Macrosystems theory and its applications*. Berlin: Springer Verlag.
- Shvetsov V.I.** (2009) Algorithms for distributing traffic flows. *Automation and Remote Control*, 70, 10, 1728–1736.

- Spiess H., Florian M. (1989). Optimal strategies: A new assignment model for transit networks. *Transportation Research. B*, 23, 83–102.
- Treiber M., Hennecke A., Helbing D. (2000). Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Physical Review. E*, 62, 1805–1824.
- Wilson A.G. (1971). A family of spatial interaction models and associated developments. *Environment and Planning. A*, 3, 255–282.

Study of flow dynamics in the model of cargo transportation organization along a circular chain of stations

© 2021 N.K. Khachatryan, L.A. Beklaryan

N.K. Khachatryan,

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: nerses@cemi.rssi.ru; nerses-khachatryan@yandex.ru*

L.A. Beklaryan,

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: beklar@cemi.rssi.ru*

Received 23.06.2020

This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 19-01-00147, 19-010-00958).

Abstract. The article is devoted to the construction and study of a model for organizing railway cargo transportation along a circular chain of stations. Each station is characterized by a certain number of roads, each of which can be involved at any time, as well as the efficiency of their use. Cargo traffic is carried out using two technologies. The first technology is based on the interaction of neighboring stations and sets the intensity of the flow between them, depending on the ratio of free roads on them and the normative coefficient characterizing the capacity of railway tracks (sections of the railway line between stations) and the technical characteristics of the railway rolling stock engaged in transportation. It is supplemented by a second technology, the task of which is to make full use of the capacity of stations, which is expressed in the amount of cargo transported per unit of time, depending on the congestion of stations and the efficiency of roads use. Such a model is described by a system of differential equations with discontinuous right-hand sides. The analytical solution of such a system is extremely difficult, therefore, it was investigated numerically. The results of a numerical study of this system are presented, the main purpose of which is to determine the dynamics of freight traffic, and also study its dependence on the model parameters characterizing the capacity of the stations and railway tracks, as well as the workload of the stations in the initial time.

Keywords: organization of railway cargo transportation, freight traffic intensity, differential equations, numerical solution, stationary flow.

JEL Classification: C63.

DOI: 10.31857/S042473880013024-5