
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Модель изменения индивидуальных мнений в группе под влиянием межличностных контактов и внешних факторов

© 2021 г. Ю.Н. Гаврилец, И.В. Тараканова

Ю.Н. Гаврилец,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: yurkag@mail.ru

И.В. Тараканова,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: itar40@mail.ru

Поступила в редакцию 18.08.2020

Аннотация. В работе предложена техника компьютерного моделирования процессов формирования мнений и субъективных ценностей людей под влиянием межличностных информационных контактов и различных внешних факторов. Основой модели межличностных контактов является матрица, коэффициенты которой выражают влияние мнений одних индивидов на позиции других. Указаны свойства этих матриц, обеспечивающие устойчивость стационарных состояний систем оценок и облегчающие прогнозирование. На основе выведенных формул выполнены прогнозные расчеты по условным данным, показавшие эффективность предложенных процедур. На модельном уровне рассмотрены возможности учета влияния различных внешних факторов на мнения и оценки. Такими факторами могут быть материальные условия жизни, природные условия, СМИ, политические события и т.п. Подчеркивается, что отдельные внешние факторы могут отражать управляющие воздействия со стороны неких социальных сил, имеющих собственные цели. Предложена конкретная модель влияния на электоральное поведение, имеющая целью изменить пропорции голосов между несколькими кандидатами. В работе проанализировано влияние случайных факторов на процесс формирования мнений. Приведены формулы оценок дисперсий и математических ожиданий для возможных прогнозов, а также выполнены соответствующие расчеты для описанной модели. Отмечается, что практическое использование описанных методов требует наличия данных официальной статистики и проведения серьезных социологических опросов.

Ключевые слова: субъективные оценки, коэффициенты взаимовлияний, разностные уравнения, стационарные состояния, внешние воздействия, случайные факторы, электоральное поведение, управление общественным мнением.

Классификация JEL: C31.

DOI: 10.31857/S042473880014053-7

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование продолжает цикл работ, выполненных в лаборатории математической социологии ЦЭМИ РАН, посвященных компьютерному моделированию и анализу процессов формирования социальных позиций групп населения и общественного мнения в целом. В этих работах использовалось два способа моделирования: 1) изменение социальных предпочтений в группах с постоянной численностью участников (Гаврилец, Тараканова, 2019), 2) изменение численностей групп с одинаковыми позициями (Гаврилец, Тараканова, 2018). В подобных работах других авторов в основном рассматривались модели изменения численностей групп (Михайлов и др., 2014; Прончева, 2016) под влиянием информационных взаимодействий между людьми, СМИ и других внешних факторов. Необходимо отметить, что анализ динамики общественного мнения близок анализу формирования социальных норм, которому, особенно на Западе, уделяется большое внимание (Calabuig, Olcina, Panebianco, 2017; Roos et al., 2015; Tankard, Paluck, 2016; Kimbrough, Vostroknutov, 2016).

Целью данной работы является не решение какой-то конкретной прикладной задачи, каких много в современной жизни, а разработка и развитие математических и компьютерных процедур, способных обеспечить более конструктивный анализ социальной действительности. По нашему мнению, сложность социума достигла такого уровня, что *адекватно понять происходящее в нем и увидеть последствия принимаемых решений без использования математических моделей и количественных (цифровых) расчетов невозможно*. Приводимые далее модели, их свойства, поведение

и внешние условия необходимо рассматривать как некий виртуальный мир — аналог мира, в котором мы живем. Анализируя его, мы оттачиваем инструмент возможного прогнозирования и управления реальностью.

Далее рассматривается процесс формирования у людей *субъективной оценки* некой социальной проблемы или объекта. Эти оценки могут меняться в результате взаимодействия с другими людьми при получении информации об их оценках, под воздействием отдельных каналов СМИ, а также под влиянием условий жизни или случайных обстоятельств. Предполагается, что эти оценки могут измеряться в некоторой количественной шкале типа интервальной. В данной работе в отличие от большинства наших предыдущих исследований особое внимание уделяется возможностям учета влияния случайных факторов.

2. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ОЦЕНОК ПРИ ИНФОРМАЦИОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИНДИВИДОВ В ЗАМКНУТОЙ ГРУППЕ

В данной работе мы следуем традиции, когда при описании массовых социальных процессов (демографических, эпидемиологических, экономических, политических и пр.), в которые вовлечены люди различного характера, употребляются термины «группа», «межгрупповые взаимодействия» и подобные категории. Это удобно, но просто использовать эти термины недостаточно, так как отсутствие операционального определения может приводить к ошибочным выводам, особенно если применяются статистические расчеты, а группа рассматривается как нечто целое.

Реализации конкретного вида поведения и осуществлению осознанного выбора обычно предшествует формирование субъективного отношения к результатам возможного выбора. Мы считаем, что субъективное отношение (положительное или отрицательное) всегда может быть описано количественной шкалой определенного типа (Фантаццини, Шаклеина, Юрас, 2016), как это принято при анализе общественного мнения. В связи с этим мы предварительно изложим свое понимание перехода от описания оценок одного человека к описанию оценок группы. Следуя подходу, разработанному авторами ранее, основное соотношение, выражающее формирование у произвольного индивида его субъективной оценки, может быть представлено как стохастическое:

$$\xi^{t+1} = \xi^t + h \left(\sum_k a_k \xi_k^t - \xi^t + \sum_j f_j^t \right), \quad (1)$$

где ξ^t — случайная величина, выражающая оценку в момент t у взятого наугад представителя рассматриваемой группы, закон распределения этой величины часто предполагается Гауссовым; h — доля от разности между общим воздействием на оценку и самой оценкой, определяющая величину текущего изменения оценки; ξ_k^t — оценка в момент t у члена группы k , с которыми контактирует данный представитель; a_k — весовые коэффициенты, соизмеряющие влияние на оценку данного индивида со стороны остальных членов референтной группы k ; f_j^t — дополнительное изменение в момент t оценки у рассматриваемого представителя группы (j — номер внешнего фактора, воздействующего на оценку). В замкнутых социумах, рассматриваемых в данном разделе, изменения f_j^t равны 0.

Используемые здесь линейные модели удобны в силу своей простоты, а нелинейные — требуют более сложных процедур анализа и верификации, приводят к неоднозначности стационарных состояний, а также усложняют содержательную интерпретацию (Гаврилец, Тараканова, 2018).

Таким образом, модель предполагает, что в основе изменения мнений лежит стремление уменьшить собственный дискомфорт (когнитивный диссонанс) от наличного рассогласования между собственным мнением и мнением ближайшего социума. При этом: 1) конкретное соотношение (1) для фиксированного момента времени относится к любому (взятому наугад) представителю данной однородной группы; 2) структура связей между людьми и степень их взаимовлияния (задаваемые коэффициентами a_k) не меняются. Далее мы можем перейти от стохастического соотношения (1) к его математическому ожиданию, т.е. к соотношению между средними величинами, и вместо переменных ξ^t будем пользоваться переменными x^t .

Уточним смысл временных параметров модели t, h . Предполагается, что информационный контакт каждого индивида с другими и внешней средой происходят регулярно через каждые h единиц времени, т.е. время меняется по правилу $t = 0, h, 2h, 3h, \dots$ В зависимости от конкретной ситуации и соответствующих статистических данных, а также желаемой точности модели эти величины h могут быть по-разному связаны с реальностью и принимать значения от нескольких минут до суток и недель.

В качестве простейшего варианта модели рассмотрим следующую ситуацию. Пусть имеется n социальных субъектов, обозначаемых номерами i , с оценками объекта $x_i(t)$, где вектор $x(t)$ с компонентами $x_i(t)$ характеризует набор всех оценок в момент времени t . Предполагается, что изменение состояний (оценок всеми участниками) происходит только в результате информационного общения между участниками от начального состояния $x(0)$ по закону

$$x(t) = x(t-1) + hAx(t-1), \quad (2)$$

где матрица A состоит из коэффициентов, указывающих влияние информации об оценке одного участника на оценки других, а h — малый параметр итеративного процесса.

Пусть E — единичная матрица. Тогда разностные уравнения (1) означают, что при неизменной матрице информационного влияния A в момент t вектор оценок всех членов группы будет равен

$$x(t) = (E + hA)x(t) = (E + hA)^t x(0), \quad t = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Как было отмечено выше, при описании реальных процессов подобным образом необходимо придавать четкий смысл параметрам времени t и h . Соотношение (2) порождает не только естественные вопросы о возможностях прогнозирования на фиксированный момент времени t , но и об устойчивости стационарного состояния, если таковое существует. Качественные особенности динамики системы определяются свойствами матрицы A . При различных ненулевых корнях характеристического уравнения решение системы разностных уравнений (3) может быть выражено с помощью правых (столбцовых) V_j и левых (строковых) U_i собственных векторов в виде суммы правых векторов с коэффициентами, зависящими от элементов начального вектора $x(0)$ и собственных чисел λ_i :

$$x(t) = \sum K_j (1 + \lambda_j)^t V_j. \quad (4)$$

Здесь коэффициенты K_j определяются произведениями компонентов векторов $x(0)$ и u_i (вектор $K = Ux(0)$, U — матрица из строк u_i) (см., например, (Ланкастер, 1972)). Из (4) следует, что при $|1 + \lambda_j| < 1$ для всех j будет существовать при $t \rightarrow \infty$ предельное (стационарное) состояние. При этом данное состояние представляет собой линейную комбинацию тех собственных векторов, которым соответствуют нулевые собственные числа. Этот факт часто существенно облегчает анализ динамических систем. Действительно, становится возможным по собственным векторам матрицы взаимовлияний и начальному состоянию сразу вычислять предельное конечное состояние.

3. ПРИМЕР

В качестве начального примера рассмотрим условный социум, состоящий из трех возрастных групп — «молодых», «зрелых» и «старших», которые оценивают качество трех кандидатов по некоторой шкале установок. Значения качеств принадлежат действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$. Предполагается, что численности всех групп известны и равны соответственно N_1, N_2, N_3 .

Введем обозначения. Средние оценки каждого кандидата по группам: x_{1t}, x_{2t}, x_{3t} — в группе молодых; y_{1t}, y_{2t}, y_{3t} — в группе зрелых; v_{1t}, v_{2t}, v_{3t} — в группе старших.

Вообще говоря, структура и сила взаимовлияний может быть различной, и число нулей в матрице A — тоже. С кем контактируют индивиды и как часто, кто из них пользуется большим авторитетом и т.п. — все это определяет вид матрицы взаимосвязей. Специально организованные социологические опросы могли бы дать необходимую информацию по особенностям и структуре взаимных контактов, о роли лидеров в социальных группах. Анализ социальных сетей (Губанов, Новиков, Чхартисвили, 2010) позволяют получать непрерывную информацию о контактах и оценках людьми различных сторон жизни, но для получения конкретной информации нужны специальные исследования.

В данной работе нас интересуют только методологические возможности анализа, прогноза и управления общественным мнением. Реальными данными мы не располагаем, а формируем некий виртуальный мир и стремимся разработать компьютерную методологию для возможностей последующего обращения к реальности.

Будем рассматривать ситуацию, когда общественное мнение представляет собой систему оценок населением некоторых явлений общественной жизни, а динамика общественного мнения определяется таким процессом взаимодействия индивидов, в котором члены групп стремятся согласовать оценки кандидатов с оценками ближайших по возрасту членами, т.е. молодые и старшие

ориентируются на средних, а средние — на тех и других. В этом случае модель взаимодействия может быть представлена в виде системы разностных уравнений, связывающих средние значения оценок в группах между собой:

$$\begin{pmatrix} x1_{t+1} \\ x2_{t+1} \\ x3_{t+1} \\ y1_{t+1} \\ y2_{t+1} \\ y3_{t+1} \\ v1_{t+1} \\ v2_{t+1} \\ v3_{t+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x1_t \\ x2_t \\ x3_t \\ y1_t \\ y2_t \\ y3_t \\ v1_t \\ v2_t \\ v3_t \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a_{0,1}(y1_t - x1_t) \\ b_{0,1}(y2_t - x2_t) \\ c_{0,1}(y3_t - x3_t) \\ a_{1,0}(0,5(x1_t - v1_t) - y1_t) \\ b_{1,0}(0,5(x2_t - v2_t) - y2_t) \\ c_{1,0}(0,5(x3_t - v3_t) - y3_t) \\ a_{2,1}(y1_t - v1_t) \\ b_{2,1}(y2_t - v2_t) \\ c_{2,1}(y3_t - v3_t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В системе (5) первые три уравнения описывают изменения оценок в группе молодых, вторая тройка — в группе средних, последние три — в группе старших. Коэффициенты a, b, c (с соответствующими индексами) указывают силу реакции одной группы на отличие от оценок другой. Параметр h характеризует скорость изменений. Очевидно, мы имеем итерационный процесс вида (2). Для модельного расчета использовалась матрица A .

Далее для определенности в последующих расчетах приняты следующие значения начального состояния $x(0)$ и матрицы взаимодействия A :

$$A = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 \\ 0,015 & 0 & 0 & 0,03 & 0 & 0 & 0,015 & 0 & 0 \\ 0 & 5 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0,09 & 0 & 0 & 0,09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 & 0 & 0 & 0,09 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 & 0 & 0 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, что собственные значения матрицы A неположительные, поэтому стационарное решение (предельное состояние при $t \rightarrow \infty$) системы (5) устойчиво.

При заданном начальном векторе $x(0)$ и $h = 0,1$ система приходит в стационарное состояние менее чем за 2000 шагов (рис. 1): $x^* = (23,312; 26,597; 46,312; 23,313; 26,595; 46,313; 23,313; 26,595; 46,313)$.

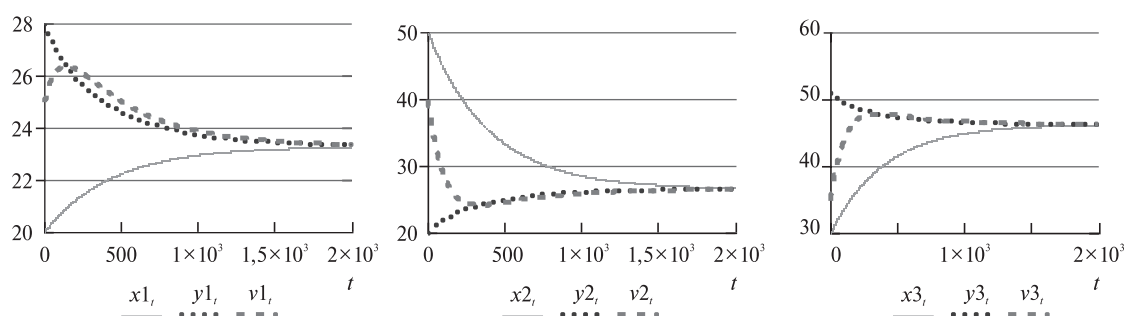


Рис. 1. Состояние системы на 2000-м шаге для каждого кандидата

Это состояние можно получить по формуле (3) или через собственные векторы (V , U) и числа λ (по формуле (4)):

$$(E + hA)^{2000} x(0) = \begin{pmatrix} 23,27 \\ 26,76 \\ 46,19 \\ 23,36 \\ 26,56 \\ 46,34 \\ 23,37 \\ 26,54 \\ 46,35 \end{pmatrix}, \quad V A^{2000} U x(0) = \begin{pmatrix} 2,27 \\ 2,76 \\ 46,19 \\ 23,36 \\ 2,56 \\ 46,34 \\ 2,37 \\ 2,54 \\ 4,35 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что система (5) построена как стандартная модель, формализующая поведение каждой социальной группы в условиях ее взаимодействия с другими группами. Матрица A содержит большое множество нулей, разбросанных, на первый взгляд, весьма хаотично. Однако одновременными перестановками строк и столбцов она может быть приведена к виду, указывающему ее истинную структуру. Мы получим блочную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,015 & 0,03 & 0,015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,09 & 0,09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} & 0,01 & 5 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 & 0,09 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} & 0,01 & 5 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что система представляет три независимые модели формирования группами оценок каждого из трех кандидатов. Такая матрица получилась автоматически, если бы мы начинали рассматривать не поведение групп, а формирование рейтинга каждого кандидата. Однако в общем случае выявление особенностей структуры матрицы взаимосвязей является известной проблемой, решение которой часто облегчает анализ и прогноз социальных ситуаций.

Рассмотрим дополнительно случай, когда коэффициенты взаимодействия между людьми носят случайный характер. Пусть коэффициенты исходной модели, характеризующие непосредственное взаимное сопоставление балльных оценок участников, имеют гауссовскую случайную добавку с нулевым математическим ожиданием и малой стандартной ошибкой $\sigma = 0,25$. Псевдослучайная последовательность порождена в пакете "MATHCAD": $R^{(t)} = \text{norm}(9, 0, 0, 25)$. В этом случае система разностных уравнений записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x1_{t+1} \\ x2_{t+1} \\ x3_{t+1} \\ y1_{t+1} \\ y2_{t+1} \\ y3_{t+1} \\ v1_{t+1} \\ v2_{t+1} \\ v3_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1_t \\ x2_t \\ x3_t \\ y1_t \\ y2_t \\ y3_t \\ v1_t \\ v2_t \\ v3_t \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} [a_{0,1} + R_0^{(t)}](y1_t - x1_t) \\ [b_{0,1} + R_1^{(t)}](y2_t - x2_t) \\ [c_{0,1} + R_2^{(t)}](y3_t - x3_t) \\ [a_{1,0} + R_3^{(t)}](0,5(x1_t + v1_t) - y1_t) \\ [b_{1,0} + R_4^{(t)}](0,5(x2_t + v2_t) - y2_t) \\ [c_{1,0} + R_5^{(t)}](0,5(x3_t + v3_t) - y3_t) \\ [a_{2,1} + R_6^{(t)}](y1_t - v1_t) \\ [b_{2,1} + R_7^{(t)}](y2_t - v2_t) \\ [c_{2,1} + R_8^{(t)}](y3_t - v3_t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

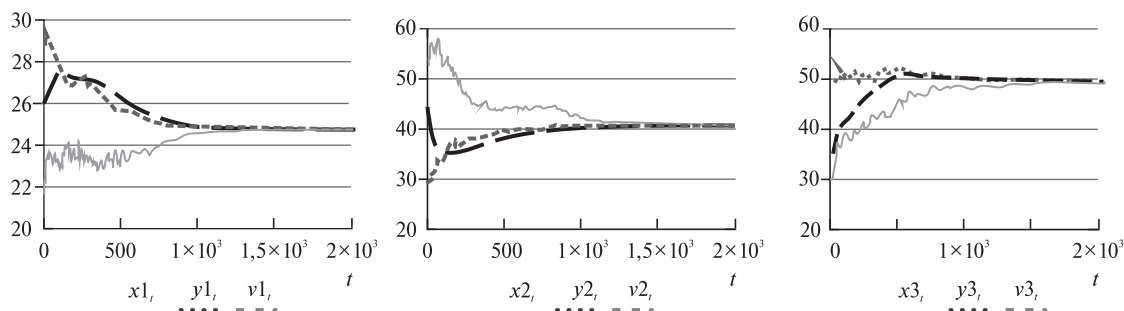


Рис. 2. Траектории процесса сближения оценок в каждой возрастной группе при влиянии возмущений на коэффициенты

Решением системы на момент времени T будет вектор $\mathbf{x}(T) = (19,67; 26,48; 46,28; 21,77; 25,68; 45,89; 22,12; 25,91; 46,57)$.

Как показывают расчеты (рис. 2), в этом случае общий характер, или качество, траекторий сохраняется и все траектории сходятся к состояниям, близким к тем, которые получались в исходном детерминированном случае (5). Случайные возмущения коэффициентов можно интерпретировать либо как ошибки измерений, либо как возможные изменения в ходе самого процесса. Расчеты показывают, что окончательное состояние структурно устойчиво.

4. ВНЕШНИЕ ВЛИЯНИЯ И ИХ УЧЕТ

Наряду с изменениями, вызванными взаимодействиями с другими участниками, в каждый момент времени могут добавляться внешние возмущения, обозначаемые далее вектором $\mathbf{F}$. Изменения переменных модели (2) зависят от характера этих возмущений. В исходной формуле необходимо суммировать вектор изменений $h(\mathbf{E}+h\mathbf{A})^t\mathbf{x}(t-1)$ с вектором возмущений $\mathbf{F}$, и вместо формулы (2) мы получим

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-1) + h(\mathbf{A}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{F}(t-1)). \quad (7)$$

При этом необходимо различать ситуации, когда возмущения постоянны во времени или как-то меняются. При неизменности возмущений задача упрощается, и мы получаем

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^{t+1}\mathbf{x}(0) + h \sum_{k=0}^t [(\mathbf{E} + h\mathbf{A})^k \mathbf{F}]. \quad (7a)$$

Так как собственные числа матрицы $(\mathbf{E}+h\mathbf{A})$ положительны, то последовательность $\mathbf{X}(t)$ при $\mathbf{F} = \text{const}$ будет расходиться, а при невырожденной матрице $\mathbf{A}$ стационарное состояние $(\mathbf{x}(t-1) \rightarrow \mathbf{x}(t))$ будет иметь смысл и согласно (7) выражаться как $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$.

На рис. 3 сходящиеся и расходящиеся траектории наглядно демонстрируют это для прежней матрицы $\mathbf{A}$ и некоторого фиксированного вектора возмущений $\mathbf{F} = \mathbf{q}\mathbf{0} = (-1,25; 0; 2,5; -0,75; 1,25; 0,25; 0,75; 0; 2,5)$.

Компоненты вектора внешних влияний особенно важны с точки зрения возможности управления всем процессом изменения показателей. Нулевые компоненты означают отсутствие непосредственного влияния извне, когда изменения происходят только в результате прямого взаимодействия между участниками. Отрицательные значения ведут к возможному уменьшению значений этих компонент, положительные — к их росту. Это означает, что лицо, имеющее возможности определять значения

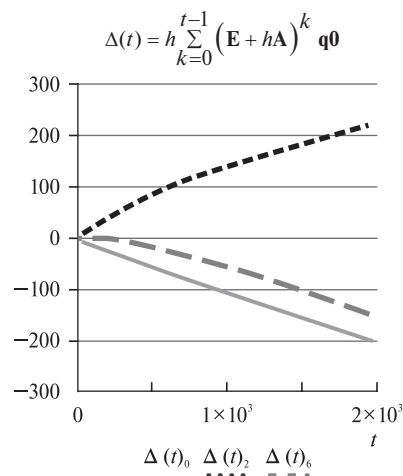


Рис. 3. Неограниченное убывание приростов оценок при $q0_i < 0$ и возрастание при $q0_i > 0$

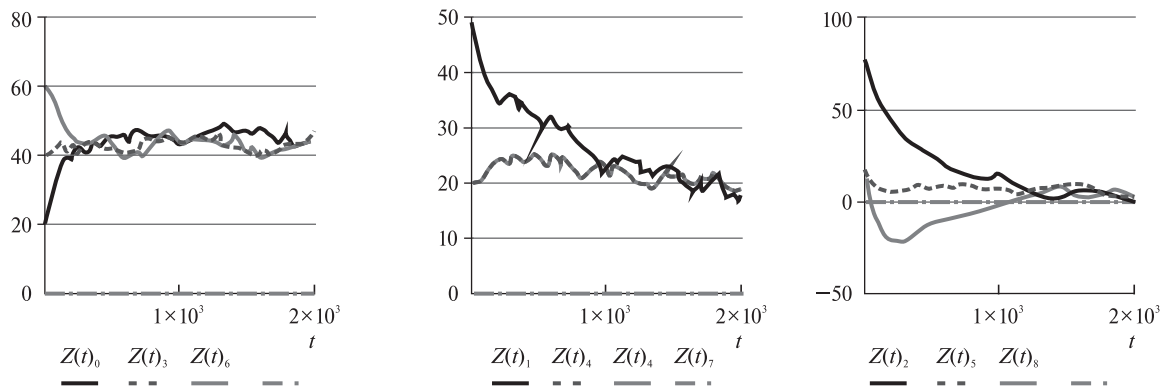


Рис. 4. Траектории изменения оценок кандидатов во всех возрастных группах при наличии случайных возмущений

характеристик внешней среды, может управлять формированием мнений у взаимодействующих субъектов.

Для выхода всей системы в некоторое стабильное состояние необходимо, чтобы влияние извне с какого-то момента было прекращено. Удобно это сделать, связав изменения внешнего управления с затухающей экспонентой. Будем предполагать, что компонента i вектора $\mathbf{F}$ имеет вид $F_i = q_i \exp(-\alpha_i t)$, где параметры q_i , α_i определены внешними условиями либо заданы управленцем.

5. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ВНЕШНЕГО ВЛИЯНИЯ СО СТОХАСТИКОЙ

Рассмотрим теперь случай, когда внешние факторы подвержены случайным возмущениям, т.е. становятся случайными. Для этого будем предполагать, что члены случайной последовательности векторов-возмущений имеют вид

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{R}(t), \quad (8)$$

где компоненты $q_i(t) = q_i \exp(-\alpha_i t)$, а компоненты вектора $\mathbf{R}(t)$ — нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и некоторыми дисперсиями σ_i^2 . В момент времени t у величины $\mathbf{F}(t)$ математическое ожидание равно $\mathbf{q}(t)$. Таким образом, мы получаем случайную последовательность векторов $\mathbf{x}(t)$. В целом наличие во внешнем влиянии случайных факторов означает, что динамический процесс (6) является стохастическим, поэтому прогнозирование значений баллов у кандидатов неоднозначно. В силу (7а) каждый член этой последовательности состоит из двух частей — детерминированной и случайной, а все выражение выглядит как

$$\mathbf{Z}(t) = (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^t \mathbf{x}(0) + h \sum_{k=0}^{t-1} (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^k \mathbf{F}(t-k-1). \quad (9)$$

Как показали расчеты, при заданных дисперсиях в $\mathbf{R}(t)$ ($\sigma = 1,5$) характер сближения оценок каждого кандидата сохраняется (рис. 4).

$$\mathbf{Z}(2000) = (43,19; 17,77; 2,79; 46,31; 20,05; 2,07; 44,16; 19,43; 3,13).$$

6. РАСЧЕТ ЗНАЧЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ ВЕКТОРА $\mathbf{X}(T)$

Рассмотрим, какими вероятностными характеристиками обладают векторы $\mathbf{z}(t)$ на любой момент времени $t > 0$. Формула (9) показывает, что математическое ожидание $\mathbf{E}(\mathbf{z}(T))$ образуется из двух слагаемых: первое слагаемое формулы не зависит от случайностей и непосредственно входит как часть $\mathbf{E}(\mathbf{z}(T))$. Вторая часть выражения будет складываться из математических ожиданий членов под знаком суммирования. Эти математические ожидания в момент k равны векторам $(\mathbf{E} + h\mathbf{A})^k \mathbf{q} e^{-\alpha(T-k)}$, где $\mathbf{q} e^{-\alpha t}$ обозначает вектор с координатами $q_i e^{-\alpha_i t}$. Таким образом, ожидаемое значение прогнозируемого вектора на момент времени T равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}(T)) = (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^T \mathbf{z}(0) + h \sum_{t=0}^{T-1} (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^t \mathbf{q} e^{-\alpha(T-t)}. \quad (10)$$

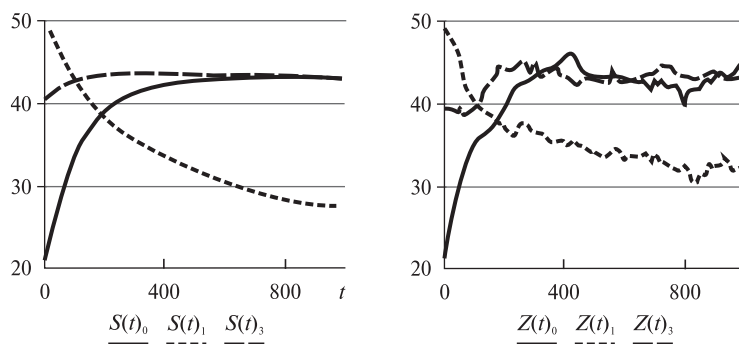


Рис. 5. Изменение во времени средних значений S и прогнозных траекторий Z для трех выбранных переменных 0, 1, 3

Рассмотрим дисперсию случайного вектора $\mathbf{z}(T)$. Так как первая часть выражения (10) не зависит от случая, то дисперсия всего выражения определяется дисперсией второго слагаемого, равного сумме векторов $\sum_k^{T-1} (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^k (\mathbf{q}(T-k) + \mathbf{R}(T-k-1))$. Каждый элемент этой суммы содержит только одну составляющую случайной природы $\sum_k^{T-1} (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^k \mathbf{R}(T-k-1)$.

Обозначим $\mathbf{B}(k) = (\mathbf{E} + h\mathbf{A})^k$. Теперь для получения дисперсии компоненты i вектора $\mathbf{x}(T)$ надо вычислить дисперсию компонент суммы $\sum_j \mathbf{B}(k)_{i,j} \mathbf{R}(T-k)_j$.

Как известно, для двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 с дисперсиями $D1$ и $D2$ дисперсия их линейной комбинации $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ равна $c_1^2 D1 + c_2^2 D2$. Поскольку первая часть формулы (9) детерминирована, получаем для окончательного выражения дисперсии

$$D(z_i(T)) = h^2 \sum_k \sum_j (B(k)_{i,j})^2 \sigma_j^2, \quad (12)$$

где σ_j^2 — дисперсии величин R_j .

Для полноты анализа рассмотрим, какими статистическими характеристиками обладают прогнозные траектории модели (9), показанные на рис. 5.

Траектория зависимости средних значений определяется по формуле (10) и представлена для трех переменных $S(t)$ на рис. 5. вместе с одной из возможных реализаций $\mathbf{z}(t)$ при названных выше внешних возмущениях $\mathbf{q}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$. На рис. 6 ясно видно, что случайные гауссовские отклонения при $\sigma = 1,5$ не сказываются до момента $t = 1000$.

Интересно посмотреть, какими будут априорные ошибки прогнозирования данной модели. Естественно, что с течением времени дисперсия и стандартные ошибки прогнозных значений будут расти, при этом дисперсия обусловлена только случайным слагаемым формулы (9). Коэффициенты (априорные) вариации для всей траектории растут, как это показано на рис. 6. Они, естественно, отличаются от таких же коэффициентов $\mathbf{vk}$, рассчитанных только для случайного слагаемого формулы (9), где средняя отличается от общего среднего:

$$\begin{aligned} k\text{var}_{i,t} &= D_{i,t} / S(t)_i, \quad vk_{i,t} = D_{i,t} / \Delta(t)_i, \\ k\text{var}_{i,T} &= (0,09; 0,13; 0,24; 0,08; 0,16; \\ &\quad 0,63; 0,07; 0,15; -2,83), \\ vk &= (0,26; -4,13; -0,16; 0,28; -7,9; \\ &\quad -0,16; 9,28; -7,98; -0,12). \end{aligned}$$

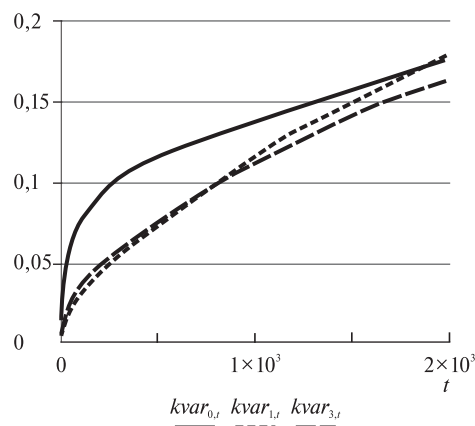


Рис. 6. Траектории изменения коэффициентов вариации во времени

7. ВОЗМОЖНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОБЩЕСТВЕННОГО МНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЙ РЕЙТИНГОВ ПОЛИТИКОВ

Основная модель (9) описывает изменения оценок социальными группами какого-то одного явления, факта, рейтинга политического деятеля и т.п. Предполагается, что эти оценки могут измеряться количественно, а их изменения могут происходить в результате информационных сообщений СМИ или личных контактов между членами групп (в частности, это описано моделью (4)). Известно, что на субъективные оценки людей серьезно влияют средства массовой информации, условия жизни и другие внешние факторы.

Модель (9) позволит учитывать эти моменты, если будет определено, как компоненты вектора внешних воздействий отражают факторы информационного влияния или условий жизни, и на какие группы это действует. Существенно, что внешние влияния можно рассматривать как не зависящие от наблюдателя и прогнозировать их автономно, а можно управлять некоторыми из них. В первом случае мы будем прогнозировать динамику групповых оценок под влиянием не зависящих от нас факторов, а во втором — выбирая тип воздействия. При этом можно управлять общественным мнением в соответствии с некоторыми своими целями. Кроме того, наличие в модели случайных переменных позволяет понимать неоднозначность будущих состояний и учитывать возможности неопределенных изменений в общественном мнении.

Рассмотрим ситуацию, когда оценки людьми потенциальных кандидатов будут изменены либо с помощью СМИ, либо из-за изменения внешних условий жизни. Пусть начальные групповые оценки кандидатов равны вектору $z(0) = (20; 50; 80; 40; 20; 22; 60; 40; 15)$. В результате непосредственного взаимодействия по формулам (5) к моменту $T = 2000$ будет получен вектор $z(T) = (29,881; 26,762; 33,148; 30,146; 26,557; 32,73; 30,194; 26,543; 32,7)$.

Мы видим, что в начальный момент суммарные оценки (при одинаковой численности всех трех групп) первого кандидата равны 120 баллам, второго — 110, третьего — 117. В результате расчетов мы получили, что оценка первого кандидата опускается до 90 баллов, второго — до 80, третьего — до 98 баллов.

Предположим, что некая управленческая структура, имеет возможность влиять на изменение оценок в течение определенного времени и намерена поддерживать рейтинг первого кандидата и понизить рейтинг третьего (см. о роли СМИ в (Луман, 2005)). Для этого она вбрасывает положительную информацию для первого и отрицательную — для третьего. Что касается внешнего влияния на оценки второго кандидата, то полагаем для определенности, что в средней группе таковое отсутствует, условия жизни младшей группы ухудшают ее оценки, а старшей группы, наоборот, увеличивают. Все эти влияния отражаются компонентами вектора $q(t)$, динамика трех компонентов которого изображена на рис. 7. И мы видим, что к такту $t = 300$ внешнее влияние прекращается. Используя для расчетов формулу (9) с вектором $q(t)$ в качестве внешнего влияния на шаге $t = 2000$, получим конечный (стационарный) вектор: $z(2000) = (43,06; 26,16; 7,523; 43,088; 25,989; 6,446; 43,093; 25,976; 5,397)$.

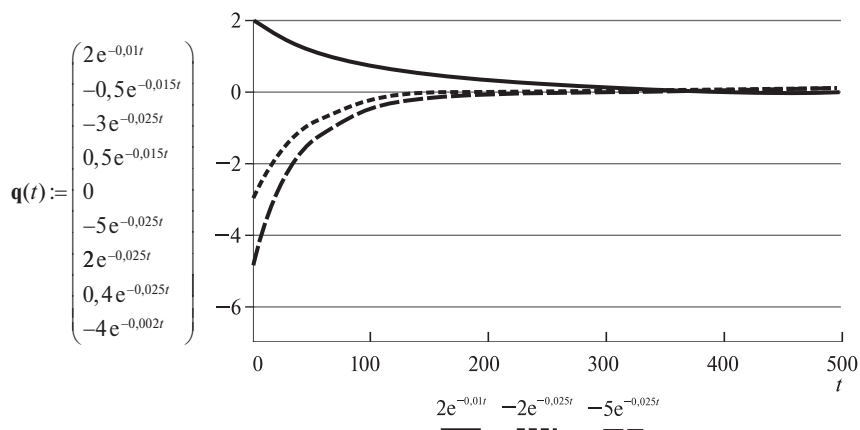


Рис. 7. Изменение внешних влияний q во времени

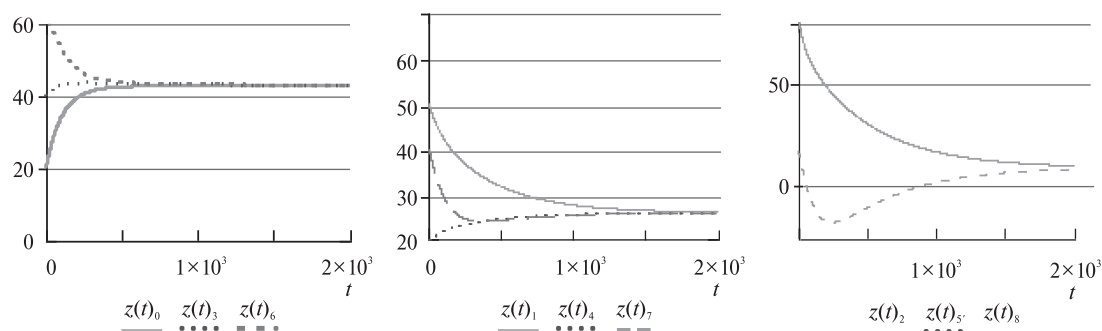


Рис. 8. Кривые выхода в равновесие при наличии внешнего влияния

Как легко убедиться, в результате выполненного воздействия рейтинг первого кандидата вырос до 40 баллов во всех возрастных группах, а рейтинг третьего кандидата упал до 6 баллов. Траектории выхода в равновесие изображены на рис. 8.

8. ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ШАНСОВ КАНДИДАТОВ ЭЛЕКТОРАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим первоначальную модель оценок трех кандидатов тремя социальными группами. Можно считать, что балльная оценка кандидата, так сказать, его рейтинг, означает возможность его поддержки *при отдельном голосовании «за» или «против» его кандидатуры*. Удобно перейти от рейтинга к вероятности поддержки по известной формуле логистической функции, как мы это делали в (Гаврилец, Тараканова, 2018). В нашем случае эта формула имеет вид

$$f(x) = P e^{rx} / (1 + P(e^{rx} - 1)), \quad (13)$$

где x — рейтинг кандидата, $f(x)$ — вероятность поддержки. Параметры функции должны быть оценены из данных социологического наблюдения. Так, например, если предварительно в группах, указавших рейтинги 20, 50, 80, 90, были установлены проценты поддержки 10, 50, 90, 95, то статистически можно получить следующие значения параметров: $P = 0,025$; $r = 0,073$. Согласно этой формуле вероятности поддержки трех кандидатов в трех группах в начальный момент при $t = 0$ для $x(0)$ будут (0,1; 0,5; 0,19; 0,16; 0,1; 0,53; 0,14; 0,32; 0,25).

Для рейтингов, получившихся в результате внешнего воздействия (см. рис. 7), вероятности поддержки для $z(2000)$ становятся равными (0,42; 0,11; 0,03; 0,38; 0,12; 0,03; 0,42; 0,11; 0,03).

Зная число человек в каждой возрастной группе, можно подсчитать, сколько голосов получит каждый кандидат *при отдельном голосовании*. Если в младшей и старшей группах было по 400 человек, а в средней — 700, то, сложив голоса в группах, получим: 1135; 752; 395. Легко убедиться, что управляющие воздействия на мнения людей привели к радикальному изменению в результатах возможного голосования.

Альтернативная схема возможного расчета числа сторонников.

Очевидно, средняя оценка кандидата группой не означает полного единомыслия со стороны всех членов группы, поскольку мнения в группе могут различаться. Зная средние значения балльных оценок в каждой группе по каждому кандидату (обозначим их через m), можно оценить долю лиц, которые дали оценку кандидатам выше некоторого фиксированного уровня. Для этого необходимо знать закон распределения балльных оценок. Если предположить, что оценки в группе распределяются по нормальному закону с известной дисперсией σ^2 , то доля лиц с оценкой, большей заданного S , будет равна $P = 1 - \text{cnorm}((S - m) / \sigma)$, где $\text{cnorm}(\cdot)$ обозначает кумулятивное распределение вероятностей со средним, равным 0, и дисперсией, равной 1. Предположив, например, что стандартная ошибка составляет 0,33 от среднего значения m , а заданная величина $S = 0,8m$, для стационарного состояния получим такие значения: $z = (43,059; 26,163; 7,523; 43,088; 25,989; 6,446; 43,093; 25,976; 5,397)$; $P = (0,742; 0,552; 0,327; 0,742; 0,55; 0,315; 0,742; 0,55; 0,304)$.

Пусть вектор численностей равен $\mathbf{N} = (400; 400; 400; 700; 700; 700; 400; 400; 400)$. Соответственно этому число людей, которые оценили кандидатов на величину, большую, чем 0,33 от среднего значения, будет равно $S_i = f(z_i)N_i$, $\mathbf{S} = (296,64; 220,88; 130,74; 519,32; 385,03; 220,58; 296,77; 219,9; 121,56)$, откуда число индивидов, доверяющих кандидатам, $S_0 + S_3 + S_6 = 1113$; $S_1 + S_4 + S_7 = 661,7$; $S_2 + S_5 + S_8 = 472,88$.

Далее можно предположить, что число сторонников кандидата определяет вероятность его избрания. Эта вероятность может быть представлена той же логистической функцией, но со своими параметрами, подлежащими оцениванию из статистических наблюдений.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Несмотря на простоту модели (5), она имеет ценность, указывая требования к статистическим опросам, которые могут вскрыть социально-психологическую структуру формирования личных оценок у взаимодействующих индивидов. Структура матрицы коэффициентов взаимовлияний может иметь такой вид, что небольшое число ее собственных векторов *сразу* позволяет определять конечное решение по начальному вектору. Поэтому грубый прогноз результатов информационного взаимодействия между группами без внешних добавок (как бы внутренняя инерция) имеет смысл сделать до применения управляющих воздействий.

2. Для оценки влияния на прогноз случайных факторов в работе приведены оценки ошибок прогноза. Для реализации потенциальных возможностей модели необходимо иметь не только некоторую массу статистических и других данных, но и формализованную подмодель, соответствующую целям ЛПР. Так, например, для реализации информационного влияния надо знать, какого типа информация обеспечивает какое изменение балльных оценок. Или — как изменение рыночных цен скажется на авторитете того или иного политика и т.д. Как правило, требуется хотя бы приблизительная оценка необходимых параметров, определяющих взаимовлияния между переменными.

3. Модель позволяет анализировать различные варианты внешних влияний на формирование мнений населения (СМИ, изменения условий жизни, экономическая конъюнктура, сезонные изменения и т.п.). Для этого надо заранее знать, как те или иные события внешнего мира влияют на мнения людей. Но даже общие гипотезы о возможном характере связи между внешними событиями и мнениями могут быть полезны для получения столь же общих и гипотетических выводов.

4. Важной особенностью наших моделей является их потенциальная возможность определять наиболее подходящие виды информационного воздействия, т.е. управления процессом посредством формирования различного рода мнений и тем самым — нужного поведения, например изменения рейтингов разных кандидатов путем запуска некоторой информации.

Заметим, что внешние факторы могут быть разносторонне направленными, стабильность мнений во времени может означать лишь их балансировку не за счет равновесия между информационными влияниями.

5. Подчеркнем, что, хотя в основном мы анализировали влияние СМИ и рейтинги кандидатов, содержание общественного мнения, которым интересуется исследователь, может быть другим. Например, для общества могут быть безразличными морально-нравственный уровень молодежи или уровень общественной безопасности. Прогнозирование показателей социальных мнений и оценок определяет в ряде случаев возможности *прогнозирования социального поведения*, как это было отмечено в случае голосования за разных политических деятелей. Субъективные оценки также определяют виды поведения (массовые протесты, потребительское поведение, посещение культурных мероприятий, выполнение религиозных обрядов и т.п.). В таких случаях необходимо знать вид зависимости поведения не только от мнений, но и от некоторых других факторов.

6. Процессы изменений или поддержания стабильности так называемых социальных норм морально-этического характера (Calabuig, Olcina, Panebianco, 2017) могут описываться моделями, аналогичными представленным нами. В частности, начальные значения некоторых переменных могут иметь смысл фиксированных норм, входящих отдельными компонентами вектора $\mathbf{q}(t)$. Даже следование таким нормам, как юридические (например, о которых говорит Уголовный кодекс), вполне укладывается в описанные выше модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Гаврилец Ю.Н., Тараканова И.В.** (2018). Компьютерный анализ качественных особенностей формирования социально-идеологической структуры социума // *Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз*. Т. 11. № 1. С. 116–131. [Gavrilets Yu.N., Tarakanova I.V. (2018). Computer Analysis of Qualitative Features in the Formation of the Socio-Ideological Structure of Society. *Economic and Social Changes: Facts, Trends, Forecast*, 11, 1, 116–131 (in Russian).]
- Гаврилец Ю.Н., Тараканова И.В.** (2019). Оптимизация информационного влияния при ограниченных ресурсах // *Вестник ЦЭМИ*. Вып. 2. [Gavrilets Yu.N., Tarakanova I.V. (2019). Optimizing information influence with limited resources. *Herald of CEMI*, 2 (in Russian).]
- Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.** (2010). Социальные сети: модели информационного влияния управления и противоборства. М.: Физматлит. [Gubanov D.A., Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. (2010). *Social networks: Models of information influence of management and confrontation*. Moscow: Fizmatlit (in Russian).]
- Ланкастер К.** (1972). Математическая экономика. М.: Советское радио. [Lankaster K. (1972). *Mathematical Economics*. Moscow: Sovetskoe radio (in Russian).]
- Луман Н.** (2005). Реальность медиа. М.: Праксис. [Luman N. (2005). *The reality media*. Moscow: Praxis (in Russian).]
- Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В.** (2014). Развитие модели распространения информации в социуме. В сб.: «Математическое моделирование». Т. 26. № 3. С. 65–74. [Mikhailov A.P., Petrov A.P., Marevtseva N.A., Tret'yakova I.V. (2014). Development of the model of information dissemination in society. In: *Mathematical modeling*, 26, 3, 65–74 (in Russian).]
- Прончева О.Г.** (2016). Влияние степени поляризации общества на исход информационного противоборства. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. № 75. С. 29. [Proncheva O.G. (2016). The influence of the degree of polarization of society on the outcome of the information confrontation. *Preprint's Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 75, 29 (in Russian).]
- Фантащини Д., Шаклеина М.В., Юрас Н.А.** (2018). Big Data в определении социального самочувствия населения России // *Прикладная эконометрика*. Т. 50. С. 43–66. [Fantatstini D., Shakleina M.V., Yuras N.A. (2018). Big Data in determining the social well-being of the Russian population. *Applied Econometrics*, 50, 43–66 (in Russian).]
- Calabuig V., Olcina G., Panebianco F.** (2017). The dynamics of personal norms and the determinants of cultural homogeneity. *Rationality and Society*, 29 (3), 322–354.
- Gavrilets Y., Kudrov A., Tarakanova I.** (2020). Optimization of the media messages structure for recruiting supporters. In: *50th International Scientific Conference on Economic and Social Development*, 257–263.
- Kimbroug E.O., Vostroknutov A.** (2016). Norms make preferences social. *Journal of the European Economic Association*, 14, 608–638.
- Roos P., Gelfand M., Nau D., Lun J.** (2015). Societal threat and cultural variation in the strength of social norms: An evolutionary basis. *Organizational Behavior and Human Decision, Processes*, 129, 14–23.
- Tankard M.E., Paluck E.L.** (2016). Norm perception as a vehicle for social change. *Social Issues and Policy Review*, 10, 181–211.

A model for changing individual opinions in a group under the influence of interpersonal contacts and external factors

© 2021 Yu.N. Gavrilets, I.V. Tarakanova

Yu.N. Gavrilets,

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: yurkag@mail.ru*

I.V. Tarakanova

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: itar40@mail.ru*

Received 18.08.2020

Abstract. The paper proposes a technique for computer modeling of the formation of opinions and subjective values of people under the influence of interpersonal information contacts and various external factors. It is assumed that the studied society consists of a fixed number of individuals, each of whom has its own subjective attitude to a certain socially significant phenomenon. This ratio (position) can be expressed in a numeric scale of the interval type. A dynamic model is proposed in the form of a difference system of linear equations. The basis of the interpersonal contact model is a matrix, coefficients of which express the influence of the opinions of some individuals on the positions of others. The properties of these matrices are indicated, which provide stability of stationary states of estimation systems and facilitate forecasting. Based on the derived formulas, the forecast calculations were made on conditional data, which showed the effectiveness of the proposed procedures. At the model level, the possibilities of taking into account the influence of various external factors on opinions and assessments are considered. Such factors may include living conditions, natural conditions, media, political events, etc. It is emphasized that certain external factors can express controlling influences from certain social forces that have their own goals. A specific model of influence on electoral behavior is proposed, which aims to change the proportions of votes between several candidates. The paper considers the influence of random factors on the process of forming opinions. The formulas of estimates of variances and mathematical expectations for possible forecasts are given, and the corresponding calculations for the described model are performed. It is noted that the practical use of the described methods requires the availability of official statistics and serious sociological surveys.

Keywords: subjective estimates, coefficients of mutual influence, difference equations, stationary states, external influences, random factors, electoral behavior, public opinion management.

JEL Classification: C31.

DOI: 10.31857/S042473880014053-7