

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАПАСОВ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Ю. П. ЖЕЛТОВ

(Москва)

Деятельность любой отрасли горнодобывающей промышленности характеризуется непрерывным расходом запасов полезного ископаемого вследствие его добычи и пополнением запасов за счет разведки. Между запасами полезного ископаемого, темпом его добычи и разведки существуют зависимости, которые можно сравнить с зависимостями между продукцией и запасами сырья, существующими в любой отрасли производства.

Соотношения между запасами сырья и продукцией, а также между запасами материальных ценностей и их реализацией изучаются в теории управления запасами [1]. Однако горнодобывающие отрасли промышленности имеют свою специфику.

Здесь рассматривается модель использования запасов полезных ископаемых, позволяющая определять ряд основных зависимостей между добычей, разведкой и запасами полезных ископаемых. Модель наиболее соответствует отраслям горнодобывающей промышленности, характеризующимся сравнительно быстрыми темпами добычи полезных ископаемых и, конечно, быстрым пополнением их запасов. К таким отраслям можно отнести, например, нефтедобывающую и газодобывающую промышленности.

Задача отыскания оптимальных соотношений между запасами и добычей нефти была сформулирована в [2, 3], изучалась в [4, 5] и др. Рассматриваемая ниже модель позволяет устанавливать взаимосвязи между основными величинами, характеризующими процесс расходования и пополнения запасов полезных ископаемых, предсказывать, как будут изменяться одни величины при произвольном изменении других величин и, следовательно, управлять процессом добычи и разведки полезных ископаемых.

Введение в модель экономических факторов и критериев оптимальности позволяет решить также задачу отыскания оптимальных соотношений между запасами и добычей полезного ископаемого.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Запасы полезного ископаемого, находящиеся в каждый момент времени в определенной геологической провинции или стране в целом, не являются равноценными из-за различной степени их разведанности. Поэтому они подразделяются на категории. Между величинами запасов различных категорий существуют соотношения, зависящие от геологических условий, характерных для данной провинции, от стратегии разведки запасов, от времени и ряда других факторов.

В соответствии с классификацией запасов, принятой в Советском Союзе, будем в основном рассматривать геологические запасы наиболее разведанных категорий (A , B и C_1).

Введем следующие обозначения: G — общие запасы категорий A , B и C_1 в какой-либо провинции или стране в целом; P — запасы категории C_2 ; u — приращение запасов категории C_2 за некоторый отрезок времени (скорость разведки запасов категории C_2); g — скорость разведки запасов категорий A , B и C_1 ; F — геологические запасы, оставшиеся в недрах неизвлеченными по технологическим или экономическим причинам, D — добыча полезного ископаемого в единицу времени; t — время.

Запасы различных категорий изменяются во времени. В результате геологических и геофизических исследований, геологической разведки и т. д. устанавливаются запасы категории C_2 .

В результате более детальной геологической разведки запасы C_2 переводятся в более высокие категории.

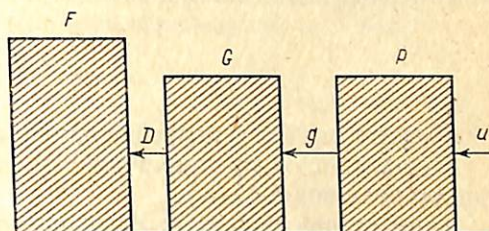


Рис. 1

Движение запасов полезного ископаемого можно представить в виде схемы (рис. 1), отражающей также баланс запасов. Согласно этой схеме количество запасов категории C_2 , обозначаемое величиной P , пополняется со скоростью u и убывает со скоростью g .

В свою очередь количество запасов более высоких категорий G пополняется со скоростью g и убывает со скоростью, равной сумме добычи полезного ископаемого D и скорости роста величины F , т. е. скорости накопления в недрах геологических запасов, не извлекаемых средствами и способами, принятыми в горнодобывающей промышленности в данный момент времени.

Описанные выше процессы можно выразить дифференциальными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= u - g, \\ \frac{dG}{dt} &= g - D - \frac{dF}{dt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Геологические запасы высоких категорий G подразделяются на запасы R , непосредственно введенные в разработку, и запасы L , оставшиеся не введенными в разработку по различным причинам («законсервированные»).

В таком случае

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dR}{dt} + \frac{dL}{dt}. \quad (2)$$

Введем понятие текущего коэффициента использования запасов η , определяемого следующим образом

$$\eta = \frac{D}{D + \frac{dF}{dt}}. \quad (3)$$

Например, если за данный отрезок времени добыта одна весовая единица полезного ископаемого, а за тот же отрезок времени перешли в категорию неизвлекаемых (остаточных) геологических запасов две весовые единицы, то текущий коэффициент извлечения полезного ископаемого за этот отрезок времени составит одну треть.

Из (3) получаем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1-\eta}{\eta} D. \quad (4)$$

Подставляя (4) во второе уравнение (1), получаем основное уравнение использования запасов полезного ископаемого

$$\frac{dG}{dt} = g - \frac{D}{\eta}. \quad (5)$$

Рассмотрим более подробно изменение во времени D .

Пусть в какой-то момент времени τ_i введены из разведки в разработку запасы величиной $\Delta\lambda(\tau_i)$.

Темп отбора полезного ископаемого от его извлекаемых запасов, т. е. отношение добычи полезного ископаемого в единицу времени к величине извлекаемых запасов, будет $z(t - \tau_i)$.

В таком случае вклад в общую добычу $D(t)$, получаемую от запасов $\Delta\lambda(\tau_i)$, вступивших в разработку с темпом $z(t - \tau_i)$, будет $\Delta\lambda(\tau_i)z(t - \tau_i)$ или $(\Delta\lambda / \Delta\tau_i)z(t - \tau_i)\Delta\tau_i$.

Общая текущая добыча $D(t)$, получаемая от запасов, вступивших в разработку в различные моменты времени от $\tau_i = 0$ до $\tau_i = t$, будет выражаться в интегральной форме

$$D(t) = \int_0^t \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} z(t - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Учитывая, что извлекаемые запасы составляют лишь часть геологических, равную произведению их на коэффициент использования запасов, полагаем

$$\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = \eta(\tau)g(\tau). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$D(t) = \int_0^t g(\tau)\eta(\tau)z(t - \tau)d\tau. \quad (8)$$

Из (5) и (8) имеем

$$\frac{dG}{dt} = g - \frac{1}{\eta} \int_0^t g(\tau)\eta(\tau)z(t - \tau)d\tau. \quad (9)$$

При заданных величинах $D(t)$, $\eta(t)$ и $z(t)$ (8) можно рассматривать как уравнение для определения $g(t)$. Это будет интегральное уравнение Вольтерра первого рода с ядром $z(t)$. При заданных $g(t)$, $\eta(t)$ и $z(t)$ (8) представляет собой интеграл для определения $D(t)$.

2. ОБЕСПЕЧЕННОСТЬ ДОБЫЧИ ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО ЗАПАСАМИ

Введем в рассмотрение величину ω — обеспеченность добычи полезного ископаемого запасами, определяемую формулой

$$\omega = \frac{G}{D}. \quad (10)$$

Дифференцируя (10) по времени, получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{D} \left(\frac{dG}{dt} - \omega \frac{dD}{dt} \right) = \frac{1}{D} \left(g - \frac{D}{\eta} - \omega \frac{dD}{dt} \right). \quad (11)$$

Рассмотрим некоторые простейшие случаи. Пусть, например, добыча и скорость разведки ископаемого изменяются по линейному закону, т. е. $D = kt$, $g = \alpha_0 t$, $k = \text{const}$, $\alpha_0 = \text{const}$, а также $\eta = \text{const}$. Тогда из (11) получаем дифференциальное уравнение для определения ω в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\alpha_0}{k} - \frac{1}{\eta} - \frac{\omega}{t}. \quad (12)$$

Решая (12), получаем

$$\omega = \frac{1}{2} \left(At + \frac{C}{t} \right),$$

$$A = \frac{\alpha_0}{k} - \frac{1}{\eta}. \quad (13)$$

Константу C определим следующим образом. Поскольку в принятом случае $\omega = \frac{G(t)}{kt}$, то при $t=0$

$$\frac{G_0}{k} = \frac{C}{2}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\omega = \frac{At}{2} + \frac{G_0}{kt}. \quad (14)$$

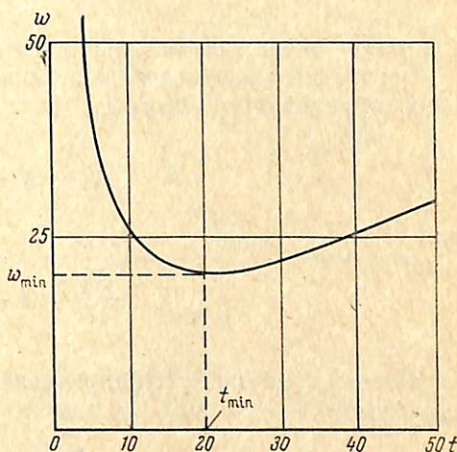


Рис. 2

Таким образом, из решения уравнения (12) получается, что в начальный момент времени может существовать «начальный запас» полезного ископаемого G_0 . Тогда величина ω при малых временах будет очень большой, но затем уменьшается до некоторого значения времени, после чего начнет возрастать. При $t = t_{\min}$ величина ω имеет минимальное значение $\omega_{\min}$.

Таким образом,

$$\omega_{\min} = \frac{At_{\min}}{2} + \frac{G_0}{kt_{\min}}, \quad t_{\min} = \left(\frac{2G_0}{Ak} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

На рис. 2 показана зависимость ω от времени t при следующих значениях параметров: $G_0 = 10^9$ т, $k = 5 \cdot 10^6$ т/год², $\alpha_0 = 15 \cdot 10^6$ т/год², $\eta = 0,5$.

Если использование запасов полезного ископаемого происходит при постоянном значении $\omega = \omega_*$, то из (11) получаем дифференциальное уравнение

$$\omega_* \frac{dD}{dt} + \frac{D}{\eta} - g(t) = 0. \quad (16)$$

Задавая значения $g(t)$, можно получить изменение $D(t)$ при постоянном ω_* . Например, при $g = \alpha_0 t$, $\alpha_0 = \text{const}$, имеем

$$\omega_* \frac{dD}{dt} + \frac{D}{\eta} - \alpha_0 t = 0. \quad (17)$$

Решение (17) при условии $D = 0$ и $t = 0$ имеет вид

$$D = \alpha_0 \omega_* \eta^2 \exp \left(-\frac{t}{\eta \omega_*} \right) + \alpha_0 \eta (t - \omega_* \eta). \quad (18)$$

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕМПОМ ОТБОРА ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО ОТ ОСТАТОЧНЫХ ЕГО ЗАПАСОВ И ТЕМПОМ ОТБОРА ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО ОТ ИЗВЛЕКАЕМЫХ ЗАПАСОВ

Обозначим через N извлекаемые запасы полезного ископаемого в некотором объекте (залежи, месторождении, группе залежей и т. д.). Тогда

$$z(t) = \frac{q(t)}{N}, \quad (19)$$

где $q(t)$ — темп добычи (дебит) полезного ископаемого из объекта.

Остаточные извлекаемые запасы полезного ископаемого в объекте N_t будут определяться формулой

$$N_t = N - \int_0^t q(t) dt \quad (20)$$

или

$$\frac{N_t}{N} = 1 - \int_0^t z(t) dt. \quad (21)$$

Введем функцию $\varphi(t)$, определяемую следующим образом

$$\varphi(t) = \frac{q(t)}{N_t}. \quad (22)$$

Дифференцируя (20), получаем

$$\frac{dN_t}{dt} = -q(t). \quad (23)$$

Учитывая (20) и (23)

$$\varphi(t) = -\frac{1}{N_t} \frac{dN_t}{dt}. \quad (24)$$

Из (20) и (22)

$$N - \int_0^t q(t) dt = \frac{q(t)}{\varphi(t)}. \quad (25)$$

Дифференцируя (25), имеем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \left[N - \int_0^t q(t) dt \right] - \varphi q \quad (26)$$

или

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{q}{\varphi} - \varphi q. \quad (27)$$

Разделив левую и правую части уравнения (27) на N , получим уравнение, связывающее φ и z

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{z}{\varphi} - \varphi z. \quad (28)$$

Дифференциальное уравнение (28) определяет зависимость между темпом отбора полезного ископаемого от его остаточных извлекаемых запасов $\varphi(t)$ и величиной $z(t)$, представляющей собой, как это было указано выше, темп отбора полезного ископаемого от его извлекаемых запасов.

Возьмем простейший случай $\varphi = c = \text{const}$. Тогда из (28) получаем

$$\frac{dz}{dt} = -cz, \quad (29)$$

откуда

$$z = c_1 \exp(-ct). \quad (30)$$

Выполняя условие нормировки

$$\int_0^{\infty} z(t) dt = 1, \quad (31)$$

получаем, что $c_1 = c$, откуда

$$z = c \exp(-ct). \quad (32)$$

В этом гипотетическом случае максимальный темп отбора полезного ископаемого от извлекаемых его запасов $z_{\max}$ достигается в самый начальный момент разработки при $t = 0$, так что $z_{\max} = c$.

Возьмем другой случай, когда, например,

$$\varphi = At^n, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (33)$$

Тогда

$$z = Bt^n \exp\left(-\frac{An}{n+1} t^{\frac{n+1}{n}}\right). \quad (34)$$

При $n = 1$ имеем, соблюдая условие нормировки (31),

$$z = At \exp\left(-\frac{At^2}{2}\right). \quad (35)$$

Зависимости $z = z(t)$, описываемые формулой (32) при различных A , показаны на рис. 3.

4. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАПАСОВ ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО И ПРИМЕР ОПТИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ

1. Рассмотрим некоторые решения уравнений (5), (8) при условии, что величина $z(t)$ описывается формулой (32).

Возьмем вначале случай, когда задана функция $g(t)$, причем по линейному закону $g = \alpha_0 t$. Требуется определить $D(t)$ из уравнения (8), превращающегося в интеграл.

Имеем при $\eta = \text{const}$

$$D(t) = \alpha_0 c \eta \int_0^t \tau \exp[-c(t-\tau)] d\tau = \alpha_0 \eta \left\{ t - \frac{1}{c} [1 - \exp(-ct)] \right\}. \quad (36)$$

Принимая условие $G = 0$ при $t = 0$ и подставляя (36) в (16) при $g = \alpha_0 t$, легко убеждаемся, что приведенный выше случай соответствует

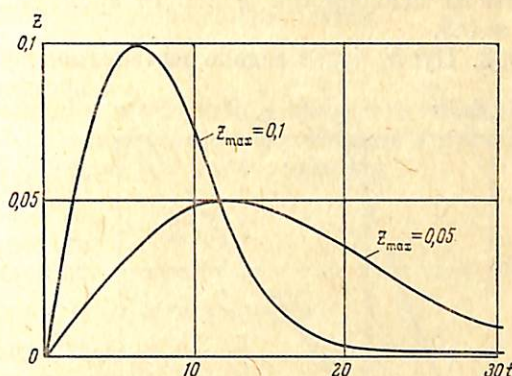


Рис. 3

значению

$$\omega_* = \frac{1}{c\eta} = \text{const.} \quad (37)$$

При этом значении ω_* решения (18) и (36) совпадают. На рис. 4 показаны зависимости g и D от времени t при $\alpha_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ т/год}^2$, $c = 0,1$, $\eta = 0,5$.

2. Пусть будет задано изменение добычи полезного ископаемого во времени по закону

$$D = kt \quad (38)$$

при $z(t)$, описываемом законом (32).

В этом случае для определения $g(t)$ имеем интегральное уравнение Вольтерра первого рода (8) в виде

$$kt = \eta c \int_0^t g(\tau) \exp[-c(t-\tau)] d\tau. \quad (39)$$

Решение интегрального уравнения (8) в изображениях по Лапласу имеет вид

$$\eta g^*(s) = \frac{D^*(s)}{z^*(s)}, \quad (40)$$

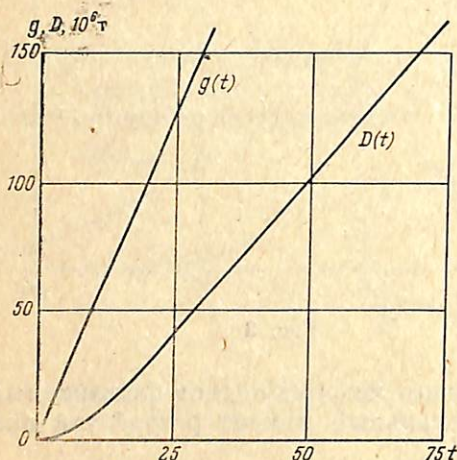


Рис. 4

где $g^*(s)$, $D^*(s)$, $z^*(s)$ — изображения по Лапласу соответствующих функций времени.

Переходя к оригиналу, получаем

$$\eta g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{D^*(s)}{z^*(s)} e^{st} ds. \quad (41)$$

В рассматриваемом случае (39) имеем

$$\eta g^*(s) = \frac{k}{c} \left(\frac{c}{s^2} + \frac{1}{s} \right). \quad (42)$$

Поэтому из (41) получаем

$$g(t) = \frac{k}{\eta} \left(t + \frac{1}{c} \right). \quad (43)$$

Таким образом, для поддержания изменения добычи полезного ископаемого во времени по закону (38) требуется в начальный момент времени иметь конечную величину скорости разведки полезного ископаемого $g = k/c\eta$.

3. Рассмотрим пример оптимизации капитальных затрат в разведку и добычу полезного ископаемого.

Пусть S — суммарные ежегодные капитальные вложения в разведку и добычу полезного ископаемого в районе или в стране в целом. Предположим, что капитальные затраты в разведку полезного ископаемого прямо пропорциональны скорости разведки полезного ископаемого g , а капитальные вложения в разработку прямо пропорциональны максимальному темпу добычи $z_{\max} = c$, т. е.

$$S = ag + bc, \quad (44)$$

где a и b — коэффициенты пропорциональности.

Коэффициент a имеет размерность $\text{руб}/\tau$ и равен капитальным затратам на 1 τ разведанного полезного ископаемого.

Обозначим ежегодные капитальные затраты на добычу полезного ископаемого величиной B . Тогда, согласно предположению о прямой пропорциональности между ежегодными капитальными вложениями и максимальным темпом годового отбора полезного ископаемого, имеем

$$B = bc. \quad (45)$$

Предположим, что при максимальном темпе отбора полезного ископаемого $c = 3\% = 3 \cdot 10^{-2}$ суммарные ежегодные капиталовложения в добычу полезного ископаемого составляют 300 млн. руб. Тогда величина

$$b = \frac{300 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-2}} = 10^{10} \text{ руб.}$$

Подставив в (44) выражение для $g(t)$ из (43), получим

$$S = \frac{akt}{\eta} + \frac{ak}{c\eta} + bc. \quad (46)$$

С целью минимизации S возьмем производную $\frac{dS}{dc}$ и приравняем ее нулю.

Имеем

$$\frac{dS}{dc} = -\frac{ak}{c^2\eta} + b = 0. \quad (47)$$

Отсюда

$$c_{\text{опт}} = \left(\frac{ak}{b\eta} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

Проверка решения (43) при условии (38) дает, что и в этом случае обеспеченность добычи полезного ископаемого его запасами будет постоянной, т. е.

$$\omega_* = \frac{1}{c\eta}. \quad (49)$$

Подстановка (48) в (49) дает

$$\omega_*^{\text{опт}} = \left(\frac{b}{ak\eta} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (50)$$

Возьмем, например, следующие исходные данные. Удельные капитальные затраты на 1 τ разведанного полезного ископаемого $a = 1 \text{ руб}/\tau$; величина $b = 10^{10} \text{ руб}$; $\eta = 0,5$; $k = 20 \cdot 10^6 \text{ т}/\text{год}^2$.

Тогда

$$c_{\text{опт}} = \left(\frac{1 \cdot 20 \cdot 10^6}{10^{10} \cdot 0,5} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,06, \quad (51)$$

$$\omega_*^{\text{опт}} = \left(\frac{10^{10}}{1 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 0,5} \right)^{\frac{1}{2}} = 33. \quad (52)$$

Рассмотренная модель использования запасов полезного ископаемого может быть усложнена с тем, чтобы учесть другие особенности деятельности исследуемой отрасли горнодобывающей промышленности.

Автор выражает благодарность Н. С. Ерофееву и В. Л. Данилову за советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Букан, Э. Кенигсберг. Научное управление запасами. М., «Наука», 1967.
2. А. А. Трофимук. Некоторые вопросы подготовки запасов нефти. Геология нефти и газа, 1957, № 2.
3. А. А. Трофимук. О рациональном соотношении запасов нефти и газа различных категорий и методике планирования их приростов. Геология нефти и газа, 1964, № 7.
4. М. М. Бреннер. Методологические основы определения эффективности геологоразведочных работ на нефть и газ. Геология нефти и газа, 1965, № 10.
5. Б. А. Тхостов, М. С. Львов. О пределах обеспеченности добычи нефти запасами промышленной категории. Геология нефти и газа, 1962, № 12.

Поступила в редакцию
19 VI 1969
