

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ
И ЗАПАСАМИ (ОБЗОР)

С. Н. КАЩЕЕВ

(Москва)

В понятие «запасы» вкладывается различное содержание в зависимости от круга изучаемых явлений. Можно рассматривать запасы конечной продукции, непосредственно удовлетворяющей спрос общества, запасы полуфабрикатов на различных этапах производственного процесса, запасы в незавершенном производстве, запасы сырья, природных и трудовых ресурсов, средств производства, запасных частей, денежных средств и т. д. Роль производства в названной теории сводится к пополнению уровня запасов по мере возникновения потребности в них.

В производственной деятельности организаций всегда возникают проблемы: когда и где купить или заготовить продукт, изделие или полуфабрикат, в каком количестве его изготовить, куда перевезти, какими партиями и в каких количествах, когда заменить изношенное оборудование. Принятие решений по этим вопросам и составляет политику управления запасами. Политика должна быть оптимальна с точки зрения некоторого критерия, определенного для системы в целом и учитывающего специфические для системы издержки. В критерии сопоставляются противоречивые мотивы, а в оптимальном решении учитываются их правильные пропорции. «Запасом» будем называть величину ресурса, находящегося на хранении и предназначенного для удовлетворения спроса на этот ресурс. Спрос реализуется с помощью *заказов*, поступающих от потребителя в систему управления запасами (в частности, к поставщику или в производство). Запас пополняется из некоторого источника, которым может быть *производство* или *склад*, хранящий требуемый ресурс. Пополнение запаса производится с помощью *заказа* и завершается в момент осуществления *доставки*. При этом, как правило, наблюдается *запаздывание* от момента выдачи заказа до момента осуществления доставки. Запаздывание учитывает особенности рассматриваемого производственного процесса.

В системе принимаются во внимание издержки, характеризующие стоимостную сторону ее функционирования: *издержки хранения запаса*, *издержки реализации заказа*, *издержки дефицита запаса* и др.

Поскольку работ по теории запасов к настоящему времени очень много, трудно даже перечислить основные результаты и назвать их авторов. Однако большинство исследователей ссылаются на основополагающие работы [1, 2] (например, [3-5]).

Постановки конкретных задач по управлению запасами могут быть самыми разнообразными.

Общим для различных моделей является учет издержек, связанных с хранением запасов. Эти издержки состоят из рентных платежей, амортизационных отчислений, расходов на содержание штата персонала и др.

Особенность моделей теории управления запасами состоит в учете из-

держек, связанных с производством партий товаров или доставкой заказов. Это, как правило, издержки на подготовительно-заключительные операции при производстве и организационные и транспортные расходы при доставке. В отличие от издержек хранения, существующих во времени непрерывно, издержки организации заказа возникают лишь в моменты принятия решений о заказах и при их осуществлении.

Другой важной особенностью моделей теории управления запасами является возможность в явном виде учитывать в критерии интересы потребителя производимой или распределяемой продукции. Спрос потребителя является в системах внешним воздействием, а политика управления выбирается из условия «разумного» удовлетворения спроса с учетом «собственных» интересов производителя. Причем «разумное» удовлетворение не обязательно предполагает полное его удовлетворение. Допускается возможность образования дефицита продукции. При этом, конечно, предполагают, что есть способы оценить издержки, которые несет система при возникновении дефицита за счет потери репутации, уменьшения клиентуры и т. д., т. е. задана функция потерь от дефицита и воздействие дефицита на спрос.

Модели теории запасов обычно классифицируют в зависимости от следующих характерных признаков, определяющих тип системы: а) структуры системы и номенклатуры (ассортимента) продуктов; б) поведения системы во времени; в) полноты информации о процессах, происходящих в системе.

В каждом из этих типов моделей может быть введен ряд дополнительных ограничений, определяющих характерные особенности рассматриваемых систем.

Остановимся подробнее на характеристиках каждого из названных трех типов моделей.

Однолинейная и однопродуктовая модель (одна база снабжения) является наиболее распространенной; при анализе её получено значительное число содержательных результатов о структуре оптимальной политики управления с учетом довольно тонких моментов, отражающих специфику функционирования этой системы. В такой модели удастся учесть нестационарность спроса, случайность времени запаздывания при доставке, отказаться от ограничивающего предположения о независимом спросе, ввести ограничения на объем склада и размер заказа. В одних моделях принимается во внимание необходимость поставки партиями фиксированного размера, в других — допускается удовлетворение спроса в условиях дефицита запаса за счет дополнительных, более дорогостоящих способов организации заказа по сравнению с обычными. Удастся учесть факторы порчи и старения товара в процессе хранения, в том числе и моральный износ.

При усложнении топологии системы (многолинейные системы типа параллельных, последовательных баз, сети баз) для получения содержательных результатов приходится жертвовать многими особенностями, которые учитываются в однолинейных системах. Что касается многопродуктовых систем, то здесь появляется возможность независимого управления запасами по группам невзаимозаменяемых продуктов в рамках определенной структуры. Кроме того предпринимаются попытки рассмотрения моделей управления запасами взаимозаменяемых продуктов.

При исследовании поведения системы во времени речь идет о длительности периода планирования (горизонт планирования) и необходимой частоте управления в течение этого периода. Задачи разбиваются на *одношаговые* и *многошаговые* (или статические и динамические). Статическая постановка задачи требует одноразового принятия решения об уровне за-

паса (или о размере заказа с учетом начального запаса на заданный интервал времени (длительность планового периода)). Предполагается при этом, что на следующем интервале времени решение будет приниматься независимо. Динамическая постановка задачи учитывает возможность взаимного влияния на критерий решений о запасах или заказах на интервале планового периода. В условиях фиксированного горизонта планирования неизменным в каждом плане и окончательным является лишь первое решение, а все остальные корректируются при изменении текущих условий. В некоторых случаях оказывается, что последовательные решения в динамической задаче могут приниматься независимо одно от другого, т. е. динамическая задача распадается на ряд статических.

В динамических задачах длительность интервала планирования обычно принимается в качестве переменного параметра, а длительность интервала между двумя последовательными моментами принятия решений о запасах — фиксированной. При этом рассматривают задачу как на конечном интервале времени, интересуясь динамикой запаса, так и на бесконечном интервале времени, интересуясь стационарными (установившимися) состояниями в системе.

Полнота информации о параметрах определяет детерминированные и стохастические модели управления запасами. В системах с неполной информацией случайными величинами могут оказаться различные параметры: размер заявки потребителя, интервалы между заявками, размер заказа или размер доставленной партии, время запаздывания при доставке. В предположении неполной информации, т. е. наличия случайных параметров, в системе могут быть допущения о полностью известных статистических характеристиках (функциях распределения) или об априорных распределениях, определенных с точностью до неизвестных параметров, которые уточняются в процессе работы системы при статистической обработке реализаций действительных процессов. Следует отметить, что неполнота информации является характерной чертой реальных систем. Это в свою очередь определяет статистический подход к трактовке проблем управления запасами.

Рассмотрим более подробно некоторые типы моделей в соответствии с указанной классификацией.

СТАТИЧЕСКИЕ ОДНОЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Модель 1. Рассмотрим простейшую модель управления запасами однородной продукции при известном непрерывном спросе с постоянной интенсивностью r . Будем учитывать следующие издержки: стоимость хранения запаса x в течение единицы времени

$$h(x) = \begin{cases} hx, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

и стоимость организации заказа размером z

$$c(z) = \begin{cases} K + cz, & z > 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В условиях детерминированного спроса нет необходимости вводить страховые запасы. При этом заказ следует делать в момент истощения запаса (или раньше на величину запаздывания при доставке).

Неизвестной величиной является z . Существенное значение в данной модели имеет постоянная составляющая в функции стоимости заказа $c(z)$,

связанная с накладными расходами при организации заказа. Частные заказы малыми партиями приводят к преобладанию издержек организации заказа, а редкие заказы большими партиями увеличивают издержки хранения.

Выведем формулу оптимального размера партии. Пусть функция $x(t)$ определяет текущее значение запаса в момент времени t . Тогда

$$x(t) = z - rt. \quad (3)$$

Поскольку заказ повторяется после истощения запаса в тех же условиях, задача решается независимо для каждого интервала длительностью T , определяемого условием $x(T) = 0$, откуда следует, что $T = z/r$. Другими словами, динамическая задача в этом случае распадается на последовательность независимых статических задач.

Среднее значение запаса за период T составит

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = z/2. \quad (4)$$

Средние издержки за период

$$J(z) = h\bar{x}T + c(z). \quad (5)$$

Средние издержки за единицу времени составят

$$j(z) = J(z) / T = hz / 2 + Kr / z + cr. \quad (6)$$

Оптимальный размер партии получим из уравнения $dj(z) / dz = 0$, что дает известную формулу Уилсона

$$z^* = \sqrt{2Kr / h}. \quad (7)$$

Как отмечается в [5, 6], несмотря на значительную простоту модели «эта формула дает исключительно хорошее приближение... в значительно более сложных реальных моделях».

В рассматриваемой модели существенным было предположение о непрерывном спросе, что в действительности выполняется далеко не всегда.

Если заявки относительно редки и нерегулярны, а целесообразность хранения или производства в запас значительного количества продукции сомнительна, мы приходим к моделям с дискретным спросом. При этом необходимо определить, например, целесообразность создания запасов по некоторому виду продукции; оптимальный порядок выдачи запасенной продукции со склада, когда учитывается старение и порча продукции при хранении, и другие задачи.

Модель 2. Рассмотрим дискретную модель со спросом a единиц продукции, возникающим через фиксированные интервалы времени. Необходимость создания запаса не появляется, если расходы на хранение запаса a на интервале τ между заявками больше постоянных издержек организации заказа

$$a h \tau > K. \quad (8)$$

Если это неравенство не выполнено, то целесообразно иметь запас. Интересно определить величину запаса, кратного спросу $q = m a$, или, что то же самое, длительность интервала повторения заказа $m \tau$. Пусть число $n = 1 / \tau$ характеризует интенсивность потока заявок. Поскольку первая заявка удовлетворяется из запаса $m a$, а m -я из запаса a , то средний запас на интервале $m \tau$ есть $(m - 1) a / 2$.

Средние издержки хранения и организации заказа равны $J(m, \tau) =$

$= (m-1)ahm\tau / 2 + K$, а средние издержки за единицу времени $j(m) = J(m, \tau) / m\tau = (m-1)ah / 2 + K / m\tau$.

Составляя первую разность $\Delta j(m) = j(m+1) - j(m)$ и приравнявая ее к нулю, получаем уравнение для оптимального размера партии

$$m(m+1) = 2Kn / ah. \quad (9)$$

В качестве решения m^* следует принять ближайшее целое число. Полученная формула является дискретным аналогом формулы Уилсона (7).

Рассмотренная модель позволяет решить вопрос о разделении продукции на группы массового и индивидуального потребления. Действительно, для каждого вида продукции по заданной частоте годового спроса n , размеру заявки a и издержкам h и K соотношение (9) определяет оптимальный размер запаса. Совокупность видов продукции, для которых требуется запас, образует группу массового потребления. Условием отказа от создания запаса является неравенство $m^* < 1$, совпадающее с неравенством (8). Совокупность видов продукции, для которой выполняется (8), определяет группу продукции индивидуального потребления.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ОДНОЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Модель 3. Рассмотрим простейший вариант динамической модели в случае дискретного времени.

Пусть $r_1, \dots, r_n$ определяют спрос в моменты $t_1, \dots, t_n$. Требуется определить производственный план $z_1, \dots, z_n$, если учитываются издержки хранения $h_i x_i$ и постоянные издержки организации производства K_i . Дефицит запаса не допускается.

Динамика запаса характеризуется выражением

$$x_i = x_0 + \sum_{k=1}^i (z_k - r_k), \quad (10)$$

где x_0 — начальный запас.

Ограничения на переменные имеют вид

$$z_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Полные издержки за период планирования, которые надо минимизировать, равны

$$J(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n (\delta_i K_i + h_i x_i), \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & z_i = 0, \\ 1, & z_i > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Рассмотрим алгоритм решения этой задачи, приведенный в [7]. Нетрудно показать, что оптимальное решение обладает следующими свойствами:

а) производственный план в моменты t_k в точности равен полному спросу за ряд будущих интервалов

$$z_k = \sum_{j=k}^i r_j; \quad (13)$$

б) продукция не производится, пока запасы не исчерпаны. Отсюда следует, что оптимальное решение определяется некоторым набором номеров времени $n_1, n_2, \dots, n_s$, таким, что каждое $n_j < n_{j+1}$ и любое $n_j < n$, $j = 1, \dots, s$, а величина заказа выражается через два соседних номера k и i формулой (13). Запас в моменты t_{n_j} обращается в нуль, а полные издержки $J_{n_j}^*$ минимальны.

Пусть $n_j = k - 1$, $n_{j+1} = i$, а J_{k-1}^* — минимальные издержки за первые $k - 1$ интервалов. Для $k \leq u \leq i$ уровень запаса

$$x_u = z_k - \sum_{j=k}^u r_{j1} \quad (14)$$

а издержки на интервале $[k, i]$ составляют

$$G_{ki} = K_k + \sum_{u=k}^i h_u x_u. \quad (15)$$

Используя полученные зависимости, построим следующий рекуррентный процесс вычисления оптимального плана. Для каждого $i = 1, \dots, n$, будем искать значение номера $k \leq i$ интервала t_k , который минимизирует полные издержки за время t_i

$$J_i^* = \min_{k \leq i} [J_{k-1}^* + G_{ki}], \quad i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

$$J_0^* = 0, \quad J_1^* = K_1.$$

Решением задачи являются значения минимальных издержек J_n^* и соответствующий им оптимальный план $z_{n1}, \dots, z_n$.

Предложенный алгоритм содержит $n(n+1)/2$ операций по вычислению оптимального плана, что значительно меньше числа операций 2^{n-1} при прямом переборе.

МНОГОЛИНЕЙНЫЕ И МНОГОПРОДУКТОВЫЕ МОДЕЛИ

Практические задачи управления производством и запасами связаны, как правило, с необходимостью выпуска некоторого ассортимента продукции в условиях ограниченных производственных мощностей. Производственный цикл обычно состоит из этапов со сложными взаимосвязями использования видов продукции и типов оборудования как внутри некоторого этапа производства, так и между этапами.

В силу названных особенностей практические задачи в общей постановке оказываются настолько сложными, что не поддаются решению даже с использованием современных средств вычислительной техники. Однако можно исследовать упрощенные модели производственных процессов, обращая внимание на их характерные особенности. При таком подходе можно выделить несколько получивших достаточно широкое распространение типов задач: а) определения плана оптимальной загрузки оборудования для выпуска заданного ассортимента продукции; б) сглаживания производства при выпуске некоторого ассортимента продукции; в) размещения запасов по этапам производственного процесса.

Модель 4. Рассмотрим постановку задачи определения оптимальной загрузки оборудования, предложенную в [8]. Пусть задан детерминированный спрос r_{ij} на i -й продукт, $i = 1, \dots, m$, в j -м периоде, $j = 1, \dots, n$. Требуется определить план производства x_{ij} продукта i в периоде j при условии, что i -й продукт может изготавливаться на k -м станке, $k = 1, \dots, d$, если учитываются следующие затраты: h_i — стоимость хранения продукта i за период j ; K_{ik} — стоимость подготовки станка k к производству продукта i ; a_{ik} — затраты времени на подготовку станка k к производству продукта i ; b_{ik} — затраты времени на изготовление единицы продукта i на станке k , а ресурс времени станка k в периоде j ограничен значением L_{kj} .

Условие отсутствия дефицита имеет вид

$$X_{ij} - R_{ij} \geq 0, \quad (17)$$

где $X_{ij} = \sum_{l=1}^j x_{il}$ — общий объем производства за j периодов, а $R_{ij} = \sum_{l=1}^j r_{il}$ — суммарное потребление за j периодов.

Вводя единичную функцию

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

запишем ограничение по ресурсу времени для станка k

$$\sum_i a_{ik} u(x_{ij}) + \sum_i b_{ik} x_{ij} \leq L_{kj}, \quad k = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n, \quad (18)$$

и полные затраты на хранение запаса и подготовку станков к производству

$$J = \sum_{i,j} h_i (X_{ij} - R_{ij}) + \sum_{i,j,k} u(x_{ij}) K_{ik}. \quad (19)$$

Выражение (19) при ограничениях (17), (18) является задачей нелинейного программирования. Результаты ее решения — временные графики загрузки d станков на производство m видов продукции в n периодах. Общая постановка задачи производственного планирования дана в [9, 10].

Модель 5. Задача размещения запаса по этапам производственного процесса исследовалась различными авторами. Она состоит в выборе уровня запасов на всех этапах производственного процесса для удовлетворения спроса в конечном продукте. В [11] рассматривается модель производственного процесса, в котором стоимость хранения продукции возрастает по мере продвижения к завершающему этапу, а спрос убывает в зависимости от длительности интервала времени выполнения заказа, в силу чего существует оптимальное размещение запасов по этапам производства, максимизирующее прибыль.

В [12] приводится интересная постановка и результаты, полученные Зангвиллом. Производственная система состоит из N участков, связанных «ациклической» сетью, т. е. такой, в которой входная продукция j -го участка поступает от участка с меньшими номерами $1, 2, \dots, j-1$. Каждый участок предназначен для производства одного вида продукции. Пусть a_{ij} обозначает количество продукта i -го участка, требующееся для производства единицы продукции на j -м участке $i < j$, а r_i^j, x_i^j, y_i^j — соответственно внешний спрос, заверщенное производство и запас на участке j в период t . Обозначим через $x_j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$ производственный график j -го участка, а через $x = (x^1, \dots, x^N)$ — общий производственный план. Задача состоит в минимизации суммарных издержек производства $J(x)$ при ограничениях

$$x \geq 0, \quad (20)$$

$$y_k^j \equiv \sum_{i=1}^k (x_i^j - \bar{r}_i^j) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, N, \quad (21)$$

где $y_n^j = 0$ для всех j , и

$$\bar{r}_i^j = r_i^j + \sum_{k=j+1}^N a_{jk} x_{i+\lambda_k}^k. \quad (22)$$

Здесь λ_k — время запаздывания в производстве, т. е. число периодов между началом и завершением производства на k -м участке, а $\bar{r}_t^j$ — суммарный спрос на продукт в период t , поступающий от j -го внешнего потребителя и от участков производства с номерами $j+1, \dots, N$. В соответствии с (24) в процессе производства дефициты недопустимы, а запасы в конце производственного процесса расходуются полностью.

Если $J(x)$ вогнутая функция, то оптимальное решение находится в одной из граничных точек выпуклого множества S , определяемого (20) — (22). В общем случае оптимальное решение получается с помощью рекуррентной процедуры перебора вершин многогранника S . Зангвилл использует эти результаты, чтобы дать эффективный алгоритм динамического программирования для нахождения производственного плана в случае «параллельных» или «последовательных» сетей.

Для параллельной сети каждый производственный участок снабжает только внешнего потребителя, так что $\bar{r}_t^j$ заменяется на r_t^j . Пусть $r^j = (r_t^j)$ — внешний спрос на продукт j . Будем предполагать, что суммарные издержки

$$J(x) = \sum_{j=1}^N J_j(x^j), \quad (23)$$

где $J_j(\cdot)$ — вогнутые функции, а полная производственная мощность в каждом периоде ограничена

$$\sum_{j=1}^N x^j \leq K. \quad (24)$$

Здесь $K = (K_1, \dots, K_n)$ — n -мерный вектор производственных мощностей.

Задача состоит в выборе производственного плана $x = (x^1, \dots, x^N)$, минимизирующего (23) при ограничениях (24). В такой постановке в [13] предлагается следующий приближенный алгоритм сепарабельного программирования для случая $N \gg n$. Пусть $x^1, \dots, x^{jp_j}$ — подмножество граничных точек множества $S(r^j)$. Тогда их выпуклая комбинация даст точку

$$x^j = \sum_k x^{jk} z_{jk}, \quad \sum_k z_{jk} = 1, \quad z_{jk} \geq 0. \quad (25)$$

Поскольку $J_j(\cdot)$ вогнутая функция, то

$$J_j(x^j) \geq \sum_k J_j(x^{jk}) z_{jk}. \quad (26)$$

Следовательно, исходную задачу можно заменить эквивалентной задачей линейного программирования, сводящейся к определению чисел z_{jk} и n -мерного вектора w , так чтобы минимизировать

$$\hat{J} = \sum_{j,k} J_j(x^{jk}) z_{jk} \quad (27)$$

при ограничениях

$$\sum_{j,k} x^{jk} z_{jk} + w = K, \quad (28)$$

$$\sum_k z_{jk} = 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad z_{jk} \geq 0, \quad w \geq 0.$$

В той же работе приводятся результаты расчетов по этому алгоритму.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В действительных системах случайные факторы являются скорее правилом, чем исключением. В моделях управления запасами основными характеристиками, случайный характер которых следует учитывать в первую очередь, служат величина спроса и время доставки заказа. Кроме того в моделях с непрерывным временем случайны также интервалы времени между появлениями заявок.

При случайном спросе, как правило, уже нельзя устранить дефицит запаса, если не принимать специальных мер, а можно лишь ограничить его по вероятности увеличением размера штрафа за дефицит. В некоторых системах, когда дефицит недопустим, предусматривается возможность срочной доставки продукции по более дорогой цене, чтобы немедленно устранить нехватку запаса.

В [1, 2] впервые дается строгая и общая постановка задач управления запасами при случайном спросе, рассматривается оптимальное решение задачи для частного случая двухуровневой политики управления с учетом постоянных и пропорциональных издержек в условиях, когда необеспеченные заявки исчезают. В [2] приводится самая общая постановка и различные варианты решения задачи выбора оптимальной политики управления с учетом таких факторов, как возможность удовлетворения заявок в последующих интервалах в случае возникновения дефицита (очередь заявок), многопродуктовость системы и запаздывание при доставке.

В дальнейшем появляется много работ, посвященных аналогичным постановкам задач в основном для однолинейных однопродуктовых систем. Их можно условно сгруппировать по следующим направлениям: а) определение оптимальной политики управления запасами для ограничений, присущих рассматриваемой модели; б) изучение простых политик управления запасами и выявление общих условий, выполнение которых обеспечивает оптимальность таких политик; в) анализ оптимальных систем управления запасами; г) анализ чувствительности оптимальных и приближенно оптимальных алгоритмов управления запасами.

СТАТИЧЕСКИЕ (ОДНОШАГОВЫЕ) МОДЕЛИ

Модель 6. Простейшей моделью системы с неопределенным спросом является модель производства сезонного товара. Пусть $\varphi(\xi)$ — заданная плотность вероятности распределения спроса; hx — стоимость нераспроданной и ликвидируемой продукции в количестве x ; px — недополученная прибыль при дефиците продукции в количестве x . Требуется определить оптимальный размер S партии сезонной продукции, минимизирующей ожидаемые потери

$$J(S) = M_{\xi} [h(S - \xi) + p(\xi - S)] = \int_0^S h(S - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_S^{\infty} p(\xi - S) \varphi(\xi) d\xi. \quad (29)$$

Дифференцируя это выражение по S и приравнявая нулю результат, получим

$$h\Phi(S) - p[1 - \Phi(S)] = 0, \quad (30)$$

где $\Phi(S) = \int_0^S \varphi(\xi) d\xi$ — функция распределения спроса. Из (30) следует, что оптимальное значение уровня производства S^* является решением уравнения

$$\Phi(S^*) = \frac{p}{p + h}. \quad (31)$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Динамические однолинейные модели, по-видимому, наиболее хорошо исследованный тип систем управления запасами. Очень подробно рассмотрена модель Эрроу — Харриса — Маршака (ЭХМ) [1], характерные особенности которой: независимые заявки, дискретное время, непрерывные запасы и учет основных стоимостных функций — хранения $h(\cdot)$, дефицита $p(\cdot)$ и организации заказа $c(\cdot)$. Внимание уделялось и другим типам моделей. Так, в [14] усложняется модель введением случайных интервалов между моментами поступления заявок с учетом зависимости их размера от длительности временного интервала до предшествующей заявки.

В [15] вместо функции стоимости дефицита запаса ввиду очевидных трудностей ее практического получения вводится ограничение на ожидаемое значение некоторой функции дефицита. Например, таким способом можно ограничить вероятность превышения дефицитом некоторого заданного уровня.

В [4, 16, 17] рассматриваются модели систем, в которых дефицит недопустим. Однако поскольку дефицит возможен из-за случайности заявок, он устраняется введением срочной доставки по более дорогой цене без запаздывания, по сравнению с обычным способом доставки заказа с запаздыванием.

В случае существенной дискретности уровня запасов ставится аналогичная задача о поставках партиями фиксированного размера. Аналогом двухуровневой (s, S) -политики является (k, Q) -политика, когда начиная с уровня запаса k поставляется минимальное число n партий размера Q .

Отказ от предположения о статистической независимости заявок на различных интервалах времени приводит к существенному усложнению моделей и затрудняет возможности аналитического решения задачи. Такие попытки предпринимаются по двум направлениям.

В [2] предложена модель, в которой плотность распределения заявок на i -м интервале будет функцией от всей предыстории процесса. В дальнейшем делались попытки получить решение задачи, ограничиваясь случаем марковской зависимости распределения спроса от предыстории процесса [2, 3].

Другое направление использует результаты теории оптимальной фильтрации Винера и Калмана, широко применяемые при оптимальном управлении динамическими системами. В такой постановке удастся учесть корреляционную зависимость спроса на соседних интервалах, однако в качестве критерия оптимизации системы в целом при этом берется дисперсия уровня запаса, что характерно лишь для задач сглаживания производства и является существенным ограничением данного метода оптимизации [18, 19].

Остановимся подробнее на различных модификациях модели ЭХМ.

Модель 7. Система с отказами. Динамическая система с отказами в стационарном режиме подробно исследована в [20]. Будем считать заданным коэффициент скидки на будущие расходы $0 < \alpha \leq 1$. Пусть функция $f_n(x)$ задает минимальные ожидаемые издержки в n -шаговом процессе. Она удовлетворяет функциональному уравнению

$$f_n(x) = \min_{y \geq x} \left\{ I(y, x) + \alpha \left[\int_0^y f_{n-1}(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi + f_{n-1}(0) \int_y^\infty \varphi(\xi) d\xi \right] \right\}, \quad (32)$$

где

$$I(y, x) = c(y - x) + G(y), \quad (33)$$

$$G(y) = \int_0^y h(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_y^\infty p(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi, \quad (34)$$

и является ожидаемыми издержками одношагового процесса. При $n \rightarrow \infty$ получим функциональное уравнение стационарного состояния

$$f(x) = \min_{y \geq x} \left\{ I(y, x) + \alpha \left[\int_0^y f(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(0) \int_y^\infty \varphi(\xi) d\xi \right] \right\}. \quad (35)$$

Рассмотрим случай линейной функции стоимости заказа.

Линейная функция стоимости заказа. Если функция $c(y - x)$ линейна, то (35) легко привести к виду

$$f(x) = \min_{y \geq x} \{-cx + G(y)\}, \quad (36)$$

где

$$G(y) = cy + \int_0^y h(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_y^\infty p(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi + \\ + \alpha \left[f(0) \int_y^\infty \varphi(\xi) d\xi + \int_0^y f(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi \right]. \quad (37)$$

Поскольку $G(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$, то при условии

$$G'(0) < 0 \quad (38)$$

можно определить наименьшее значение $0 < y^* < \infty$, для которого

$$G'(y^*) = 0. \quad (39)$$

Если значение y^* единственно, то оно является искомым оптимальным уровнем запаса. Оптимальная политика заказов

$$z = \max[y^* - x, 0], \quad (40)$$

т. е. заказывается $y^* - x$, если $x < y^*$, и заказ не делается в противном случае.

Используя указанный вид оптимальной политики заказов, нетрудно получить уравнение для определения оптимального уровня запасов y^* . Поскольку функцию $\min_{y \geq x} G(y)$ можно представить в виде

$$\min_{y \geq x} G(y) = \begin{cases} G(y^*), & x < y^*, \\ G(x), & x \geq y^*, \end{cases} \quad (41)$$

производная функции минимальных издержек

$$f'(x) = \begin{cases} -c, & x < y^*, \\ -c + G'(x), & x \geq y^*. \end{cases} \quad (42)$$

Дифференцируя (37), получим

$$G'(y) = c + \int_0^y h'(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi - \int_y^\infty p'(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi + \alpha \int_0^y f'(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (43)$$

Из (42) следует, что для интересующих нас значений аргумента $y \leq y^*$ функции $G'(y)$ производная f' в последнем слагаемом (43) равна $-c$. Следовательно, y^* будет решением уравнения

$$c + \int_0^{y^*} [h'(y - \xi) - \alpha c] \varphi(\xi) d\xi - \int_{y^*}^\infty p'(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (44)$$

Модель 8. Система с задалживанием. Если в системе управления запасами неудовлетворенные заявки не покидают систему, а ждут, пока дефицит запаса не будет устранен очередным заказом, получается система ЭХМ с очередью заявок (с задалживанием). В такой системе возможен отрицательный уровень запаса, показывающий, сколько склад должен потребителю.

Функция минимальных ожидаемых издержек в системе с задалживанием при начальном запасе x для n -шагового процесса удовлетворяет функциональному уравнению

$$f_n(x) = \min_{y \geq x} \{c(y - x) + L(y) + \alpha \int_0^{\infty} f_{n-1}(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (45)$$

где

$$L(y) = \begin{cases} \int_0^{\infty} p(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi, & y < 0, \\ \int_y^0 h(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_y^{\infty} p(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi, & y \geq 0. \end{cases} \quad (46)$$

Важный результат исследования этой модели — полученное в [20] условие оптимальности (s, S) -политики, требующее только выпуклости функции $L(y)$, если функция стоимости заказа имеет вид

$$c(z) = \begin{cases} 0, & z = 0, \\ K + cz, & z > 0. \end{cases} \quad (47)$$

Доказательство опирается на введенное понятие K -выпуклости: дифференцируемая функция $F(x)$ называется K -выпуклой, если

$$K + F(x + a) - F(x) - aF'(x) \geq 0 \quad (48)$$

для всех $a > 0$ и всех x .

Используя (47), перепишем функциональное уравнение (45)

$$f_n(x) = \min_{y \geq x} \{-cx + K + G_n(y)\}, \quad (49)$$

где

$$G_n(y) = cy + L(y) + \alpha \int_0^{\infty} f_{n-1}(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (50)$$

По индукции доказывается K -выпуклость функций $G_n(y)$ и $f_n(x)$ для $n = 1, 2, \dots$, и этого оказывается достаточно для оптимальности (s, S) -политики.

Будучи K -выпуклой, функция $G_n(y)$ может иметь несколько максимумов и минимумов, однако их расположение таково, что не требуется делать заказы больше чем для одного интервала значений аргумента. Если K -выпуклая функция $G(y)$ имеет минимумы в точках y_0 и y_1 , то для нее оптимальная политика (s_n, S_n) требует заказывать до уровня S_n , если $x < s_n$, и не делать заказа в противном случае. Значение S_n равно y_0 , а s_n определяется решением уравнения

$$G_n(s_n) = K + G_n(y_0). \quad (51)$$

Линейная стоимость заказа. Стационарное решение. Если функция стоимости заказа линейна $K \equiv 0$, то оптимальна однопоро-

говая политика заказов с единственным критическим параметром $\bar{x}$. Для стационарного состояния значения $\bar{x}$ — решение уравнения

$$c(1 - \alpha) + \int_0^x h'(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi - \int_x^\infty p'(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (52)$$

Этот результат получается следующим образом. Пусть точка $y = \bar{x}$ обращает в минимум (50). Тогда в стационарном состоянии в области $x < \bar{x}$ значение $\bar{x}$ является решением уравнения

$$c + L'(y) + \alpha \int_0^\infty f'(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (53)$$

Подставляя сюда значение производной функции минимальных издержек в той же области $x < \bar{x}$

$$f'(x) = -c, \quad (54)$$

полученное дифференцированием (49) при $K = 0$, находим

$$c(1 - \alpha) + L'(y) = 0. \quad (55)$$

Это уравнение совпадает с (52), поскольку

$$L'(y) = \begin{cases} - \int_0^\infty p'(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi, & y < 0, \\ \int_0^y h'(y - \xi) \varphi(\xi) d\xi - \int_y^\infty p'(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi, & y \geq 0. \end{cases} \quad (56)$$

Для линейных функций $p(x) = px$ и $h(x) = hx$ (55) принимает вид

$$\Phi(y) = \frac{p - c(1 - \alpha)}{p + h}. \quad (57)$$

Отсюда получаем уравнение для одношаговой задачи, положив $\alpha = 0$

$$\Phi(x) = \frac{p - c}{p + h}. \quad (58)$$

Это совпадает с уравнением простейшей задачи (34) при $c = 0$.

Многие модели управления запасами, описанные в [1—20], уже сейчас могут использоваться в задачах оптимальной организации производства, управления материально-техническим снабжением, розничной торговли и т. д.

Из публикаций в отечественной литературе можно назвать работы [17, 21—28].

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Arrow, T. Harris, I. Marschak. Optimal Inventory Policy. *Econometrica*, 1951, v. 19, N 3.
2. A. Dvoretzky, J. Kiefer, J. Volfowitz. The Inventory Problem. I, II. *Econometrica*, 1952, v. 20, N 2, 3.
3. K. Arrow, S. Karlin, P. Suppes. *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford Univ. Press., 1960.
4. H. Scarf, D. Gilford, M. Schelly. *Multistage Inventory Models and Techn.* California, Stanford Univ. Press., 1963.

5. Ф. Хенсмен. Применение математических методов в управлении производством и запасами. М., «Прогресс», 1966.
6. Г. Скарф. Обзор аналитических методов в теории управления запасами. Доп. к [5].
7. H. M. Wagner, T. M. Whitin. Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. *Manag. Sci.*, 1958, v. 5, N 1.
8. A. Vazsonyi. Economic Lot Size Formulas in Manufacturing. *OR*, 1957, v. 5, N 1.
9. G. Rodgers. A Computational Approach to the Economic Lot Size Scheduling Problem. *Manag. Sci.*, 1958, v. 4, N 3.
10. A. Manne. Programming of the Economic Lot Size. *Manag. Sci.*, 1958, v. 4, N 2.
11. F. Hannssman. Optimal Inventory Location and Control in Production in Distribution Networks. *OR*, 1959, v. 7, N 4.
12. A. Veinott. The Statute of Mathematical Inventory Theory. *Manag. Sci.*, 1966, v. 12, N 11.
13. B. Dzelinsky, C. Baker, A. Manne. Simulation Tests of Lot Size Programming. *Manag. Sci.*, 1963, v. 9, N 2.
14. M. Beckman. On the Theory of Stochastic Control Processes. *Bull. Roy. Soc. Sci. Liège*, 1964, v. XXXIII, N 9, 10.
15. S. Fromovitz. A Class of One-period Inventory Models. *OR*, 1965, v. 13, N 5.
16. K. Daniel. A Delivery Lag Inventory Model with Emergency. *Econometrica*, 1951, v. 19, N 3.
17. Е. В. Булинская. Некоторые задачи оптимального управления запасами. Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 3.
18. H. A. Simon. On the Application of Servomechanism Theory in the Study of Production Control. *Econometrica*, 1952, v. 20, N 2.
19. H. J. Vassian. Application of Discrete Variable Servo Theory to Inventory Control. *OR*, 1955, v. 13, N 3.
20. H. Scarf. The Optimality of (s, S) Policies in the Inventory Problem, Ch. 13 in [20].
21. С. М. Вишнев. Проблемы оптимальной системы народнохозяйственных резервов. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 3.
22. Е. В. Булинская. О задачах оптимального управления запасами. Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 2.
23. Ю. И. Рыжиков. Перераспределение запасов в системе складов. Экономика и матем. методы, 1968, т. IV, вып. 5.
24. Ю. И. Рыжиков. Оптимальное управление запасами. Морской сборник, 1964, № 10.
25. Ю. И. Рыжиков. О задаче управления запасами для произвольно распределенной задержки поставок. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1.
26. С. Н. Кащеев. Об одной модели оптимального управления запасами. В сб. Применение экономико-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным предприятием. М., «Машиностроение», 1968.
27. С. Н. Кащеев. Оптимальное управление запасами при случайной доставке и пропорциональных издержках. В сб. Кибернетику на службу коммунизму, М.-Л., «Энергия», 1968, т. 4.
28. С. Н. Кащеев. Оптимальное управление запасами в нестационарных динамических системах при ограничениях на заказы. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 6.

Поступила в редакцию
23 XII 1968