турных изменений внешней торговли от уровня экономического развития. Сопоставление товарной структуры внешней торговли ряда стран с различным уровнем промышленного развития и различной степенью наделенности факторами свидетельствует о том, что схожесть в структуре спроса, как правило, характерна для стран с одинаковыми уровнями экономического развития. А степень промышленного развития играет значительно более важную роль в формировании внутреннего спроса, нежели наделенность факторами.

В течение многих лет на Западе дискутируется вопрос о возможностях развития внешнеторгового товарооборота при условии двусторонних торговых отношений. Современные сторонники свободной торговли и, в частности, их наиболее известный представитель Я. Тинберген считают, что двустороннее внешнеторговое сотрудничество, т. е. стремление к выравниванию баланса с каждой страной-конкурентом, лишает мировую торговлю перспектив развития. В соответствии с их точкой зрения лишь введение многосторонних торговых связей с многосторонними расчетами открывает простор для развития товарообмена. Эта точка зрения, в частности, нашла отражение и в описанной нами модели Тинбергена. Его положение о том, что страны — внешнеторговые партнеры с различным уровнем экономического развития якобы не могут иметь выравненного торгового баланса, свидетельствует о довольно своеобразном представлении автора о равноправном экономическом сотрудничестве.

Утверждая, что выравненный торговый баланс возможен лишь для одинаковых по степени развития стран, Я. Тинберген как бы берет под защиту дискриминационные торговые связи главных капиталистических государств с экономически отсталыми странами. Он игнорирует в своих рассуждениях тот факт, что пассивный торговый баланс и рост внешнеторговой задолженности являются одной из главных причин того, что экономически слаборазвитые страны попадают под иностранную финансовую зависимость. Он обходит то бесспорное положение, что выравнивание платежей в конечном счете происходит ценой допуска иностранного капитала в хозяйство страны и усиления всех видов зависимости, которая, как известно, не способствует, а препятствует самостоятельному развитию этой страны.

В то же время подход, рассмотренный в модели Х. Линнемана, свидетельствует о том, что предположение двусторонней сбалансированности не влечет за собой сколько-нибудь значительных изменений параметров уравнения товароборота, и стремление страны к достижению сбалансированного оборота с каждым из торговых партнеров не может служить тормозом развитию мировой торговли. Более того, именно отсутствие такой сбалансированности вызывает платежные затруднения стран с пассивными сальдо торгового баланса и заводит торговые отношения в тупик, лишая их перспектив дальнейшего развития.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Tinbergen. Shaping the world economy. Suggestions for an international economic policy. N. Y., 1962.
2. P. Pöyhönen. A tentative model for the volume of trade between countries. Weltwirtschaftliches Archiv., bd. 90, H. I, Hamburg, 1963.
3. H. Linnemann. An econometric study of international trade flows. Amsterdam, 1966.
4. S. Kuznets. Six lectures on economic growth. Glencoe, Id. the Free Press, 1959.

Поступила в редакцию
15 III 1968

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1968
том IV, вып. 4

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОСВЯЗИ ТЕМПА РОСТА НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА, ФОНДООТДАЧИ И НОРМЫ НАКОПЛЕНИЯ (НА ПРИМЕРЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ)

В. Г. ГРЕБЕННИКОВ

(*Москва*)

Взаимосвязь динамики основных составных частей национального дохода является одной из важнейших проблем теории воспроизводства. От того, в какой мере практика народнохозяйственного планирования овладеет действующими здесь закономерностями, зависит динамика всего общественного производства, благосостояние населения в настоящем и будущем.

В настоящее время в СССР наметилась явная тенденция к падению фондоотдачи как по основным, так и по оборотным фондам.

В этих условиях проблема выбора соотношения между фондами накопления и потребления приобретает особую остроту.

Падающая фондоотдача оказывает давление на темпы роста общественного производства в сторону их понижения. Возникает вопрос, является ли повышение доли накопления эффективным способом стабилизации темпов роста в условиях падающей фондоотдачи, или же между фондоотдачей и долей накопления существует такая связь, что повышение последней лишь ухудшает положение в отношении фондоотдачи, а это может свести на нет усилия, направленные на поддержание приемлемых темпов роста, и, следовательно, эффективность жертвы, принесенной обществом, увеличившим накоплние за счет потребления.

Во всяком случае, все эти проблемы значительно повысили интерес экономистов к макроэкономическим моделям воспроизводства. Учитывая весьма отвлеченный характер включенных в такие модели переменных, нельзя в то же время отказать последним в способности отражать отдельные стороны реальных процессов экономической динамики. Многое зависит от того, на какие вопросы мы стремимся ответить, от степени их отвлеченности. Вряд ли можно согласиться с той точкой зрения, что соответствующие ответы, полученные при помощи сильно агрегированных моделей народного хозяйства, окажутся ложными при последующем дезагрегировании.

Это относится, в частности, к проблеме связи между текущим потреблением и ростом потребления в будущем. Наиболее общий вопрос, подлежащий здесь выяснению, заключается в том, являются ли увеличение текущего потребления и рост потребления в будущем противоречивыми или же идущими рука об руку моментами экономической политики?

На языке макромоделей народного хозяйства, оперирующих физическими объемами национального дохода, фондов потребления и накопления, эта проблема формулируется как зависимость между темпами роста национального дохода и долей в ней фонда потребления (накопления). Важно выяснить хотя бы знак этой зависимости в различных, более или менее четко очерченных областях значений важнейших народнохозяйственных параметров. Существование весьма обширной литературы по этому вопросу указывает скорее на его важность, нежели на отсутствие белых пятен или невозможность развития альтернативных подходов к его решению.

Мы будем рассматривать экономику, которая располагает механизмом регулирования, обеспечивающим полную загрузку производственных факторов в любой момент времени. Последние представлены двумя агрегированными факторами: K_t — производственные фонды (основные и оборотные), L_t — занятость в сфере материального производства. Точнее было бы говорить не о «полной загрузке», а о том, что производственные факторы используются с максимальным эффектом, что, если K_t и L_t заданы, то при прочих равных условиях обеспечивается максимальный уровень совокупного чистого выпуска Y_t.

Основой модели является функция, связывающая темпы роста производительности труда и фондовооруженности (типа «функции технического прогресса» Кальдора [1])

$$\dot{g}_t / g_t = G(\dot{F}_t / F_t), \tag{1}$$

где $g_t = Y_t / L_t$ — производительность труда, определямая как отношение совокупного чистого выпуска к числу занятых в сфере материального производства; $F_t = K_t/L_t$ — фондовооруженность труда, определяемая как отношение наличных основных и оборотных производственных фондов общества к занятым в сфере материального производства.

Отметим, что (1) не является производственной функцией в строгом смысле этого понятия, поскольку в ее основу заложено предположение, что уровень чистого выпуска в любой данный момент времени определяется не только объемом наличных производственных фондов и уровнем занятости, но также и скоростью накопления $\dot{K}_t$.

Линеаризация (1) дает соотношение

$$\frac{\dot{g}_t}{g_t} = \alpha\frac{\dot{F}_t}{F_t} + \gamma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma > 0. \tag{2}$$

Как будет показано ниже, линеаризация в данном случае означает, что мы фиксируем внимание на тенденциях динамики основных переменных модели в течение определенного, достаточно длительного периода времени. Соотношение (2) приносит пользу прежде всего как инструмент долгосрочного анализа. Это обстоятельство следует учесть и при трактовке результатов модели, включающей это соотношение.

Если перейти от (2) к выражению для темпа роста фондоотдачи $Q_t = Y_t/K_t$:

$$\frac{\dot{Q}_t}{Q_t} = -(1-\alpha)\frac{\dot{F}_t}{F_t} + \gamma, \tag{3}$$

то видно, что модель в принципе включает три ситуации в динамике фондоотдачи (рис. 1 и 2):

1) фондоотдача растет ($\dot{F}_t/F_t < \gamma/(1-\alpha)$);
2) фондоотдача остается постоянной ($\dot{F}_t/F_t = \gamma/(1-\alpha)$);
3) фондоотдача падает ($\dot{F}_t/F_t) > \gamma/(1-\alpha)$.

Это в общем соответствует разнообразию тенденций, складывающихся в реальности, где соотношение между темпами роста производительности труда и фондовооруженности меняется от страны к стране, а также в различные периоды экономического развития одной и той же страны.

Таким образом, со ссылкой на соотношение (2) можно утверждать, что фондоотдача падает лишь тогда, когда темп роста фондовооруженности превышает некоторую пороговую величину (на графиках она представлена точкой E), и в этом смысле можно говорить об «умеренном» и «чрезмерном» темпе роста фондовооруженности.

Указанная особенность динамики фондоотдачи может оказаться весьма плодотворной при теоретическом объяснении некоторых эмпирически выявленных тенденций в ее движении. В данном случае речь идет о пере-

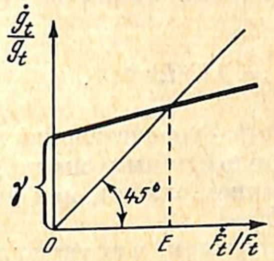

Рис. 1

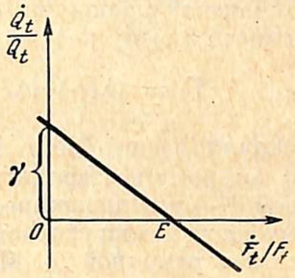

Рис. 2

ломе, происшедшем в США примерно во втором десятилетии XX в., в ходе которого предшествующее падение фондоотдачи сменилось противоположной тенденцией.

Движение фондоотдачи является столь существенной характеристикой экономической динамики, что некоторые исследователи склонны рассматривать этот перелом как более или менее четкую границу, разделяющую два периода развития современной экономики [2].

В самом деле, период индустриализации отличается, как правило, особо бурным ростом фондовооруженности труда. С другой стороны, именно рост фондовооруженности выступает на этом этапе как ведущий фактор повышения производительности труда. Прочие факторы — интенсификация труда, научная организация производства, рост квалификации кадров, непрерывное внедрение в производство новых технических идей — остаются на втором плане.

Точка E в этом случае сдвинута ближе к началу координат (вследствие относительной малости γ), высокие $\dot{F}_t/F_t$ оказываются где-то справа от нее, и экономическое развитие происходит в условиях падающей фондоотдачи.

На стадии технической зрелости картина меняется как в отношении роста фондовооруженности ($\dot{F}_t/F_t$ относительно ниже), так и в отношении ведущего фактора роста производительности труда: на первое место выходят факторы, действующие в сторону увеличения γ. Соответственно меняется и динамика фондоотдачи: производительность труда в тенденции растет быстрее фондовооруженности, и экономическое развитие происходит в условиях постепенно растущей фондоотдачи.

Разумеется, мы вовсе не намерены абсолютизировать эту схему. Вместе с тем она может оказаться полезной, поскольку акцентирует внимание на том, что, на наш взгляд, действительно является наиболее существенным моментом в исторической «развертке» двух различных стадий развития современной экономики, а именно: на сдвиге ведущих факторов роста производительности труда от роста фондовооруженности к всестороннему внедрению науки в производство.

Возвращаясь к соотношению (2), отметим, что если допущение $\alpha < 1$ не вызывает особых возражений, то несколько настораживает то обстоятельство, что в (2) как будто не учитывается эффект увеличения эффективности производства с ростом его масштаба. Действительно, перейдем от (2) к уравнению для Y_t (функция Кобба — Дугласа):

$$Y_t = aK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}e^{\gamma t}, \tag{4}$$

где a — коэффициент эффективности комбинации (K_t, L_t) в точке $t = 0$; без потери общности можно положить $a = 1$, e — основание натуральных логарифмов. Тогда легко видеть, что рост производственных фондов и занятости в одинаковой пропорции сопровождается таким же (но не бо́льшим) ростом чистого выпуска:

$$Y_t = (\lambda K_t)^{\alpha}(\lambda L_t)^{1-\alpha}e^{\gamma t} = \lambda K^{\alpha}L^{1-\alpha}e^{\gamma t}. \tag{5}$$

Эффекту крупномасштабного производства удовлетворяло бы допущение, согласно которому коэффициент эластичности выпуска по труду β был бы больше, чем $1 - \alpha$. Дальнейшее изложение покажет, как учесть и этот случай, не выходя за рамки соотношения (2).

Обратимся к переменной L_t. Мы предполагаем, что трудовые ресурсы, вовлекаемые в народное хозяйство, пропорциональны наличному трудоспособному населению и растут со слабопеременным темпом π:

$$L_t = L_0e^{\pi t}. \tag{6}$$

Предположение о неизменности темпа роста занятости на протяжении более или менее длительных периодов времени не является слишком жестким для плановой экономики, где занятость (по крайней мере номинальная) ограничивается главным образом демографическими характеристиками, которые, вообще говоря, обладают большей стабильностью по сравнению с собственно экономическими. Впрочем, из всех этих рассуждений вовсе не следует, будто мы не допускаем здесь возможности планового регулирования темпа роста занятости. Для получения дальнейших выводов достаточно, чтобы последний рассматривался как входная величина, фиксированная в рамках определенного периода времени.

Теперь можно обобщить соотношение (2) на случай $\alpha + \beta \neq 1$. Пусть $\alpha + \beta = 1 + \mu$. Тогда

$$Y_t = K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}L_t^{\mu}e^{\gamma t} \tag{7}$$

или, учтя (6):

$$Y_t = K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}e^{(\mu\pi+\gamma)t}L_0^{\mu}, \tag{8}$$

откуда

$$\frac{\dot{g}_t}{g_t} = \alpha\frac{\dot{F}_t}{F} + \gamma', \tag{9}$$

где

$$\gamma' = \mu\pi + \gamma.$$

Этому обобщению можно придать следующий смысл. Один и тот же темп роста фондовооруженности сопровождается бо́льшим или меньшим темпом роста производительности труда в зависимости от того, насколько быстро растет занятость, а следовательно, производственные фонды *.

* Если $\dot{F}_t/F_t = \omega_t$, то $\dot{L}_t/L_t = (\dot{K}_t/K_t) - \omega_t$, поэтому $\dot{g}_t/g_t = \alpha\omega_t + ((\dot{K}_t/K_t) - \omega_t)\mu + \gamma$ или $\dot{g}_t/g_t = (\alpha - \mu)\omega_t + \mu(\dot{K}_t/K_t) + \gamma$. Можно показать, что эта альтернативная форма записи соотношения (1) приводит к точно таким же формальным результатам модели.

Рост эффективности общественного производства γ' оказывается таким образом связанным с ростом производственных фондов, что в некоторой степени смягчает остроту критических замечаний в адрес функции Кобба — Дугласа и прежде всего гипотезы автономного технического прогресса [3].

Динамика производственных фондов на том обобщенном уровне, на котором мы строим наши рассуждения, также описывается весьма обще, констатируя в наиболее простой форме тот факт, что чистый прирост основных производственных фондов и запасов оборотных производственных фондов осуществляется за счет части чистого выпуска (национального дохода) $s'Y_t$:

$$\frac{dK}{dt} = s'Y_t \quad \text{или} \quad \frac{\dot{K}_t}{K_t} = s'Q_t, \tag{10}$$

где $\dot{K}_t/K_t$ — темп роста производственных фондов; Q_t — фондоотдача; s' — доля чистых инвестиций в национальном доходе. В дальнейшем мы будем называть ее нормой накопления в отличие от нормы потребления $c_1' = 1 - s'$. Далее положим $s' = \text{const}$.

Ввиду того, что, как правило, существует разрыв во времени между чистыми капиталовложениями и приростом производственных фондов, его можно учесть в (10), вводя, например, коэффициент (полагаемый заданным на определенный период), отражающий долю прироста незавершенного капитального строительства и неосвоенных мощностей в чистых капиталовложениях:

$$\frac{dK}{dt} = (1 - \rho)s'Y_t, \tag{11}$$

где ρ есть указанный коэффициент.

Изложим некоторые соображения по этому поводу. Поскольку речь идет о «запаздывании» прироста производственных фондов по отношению к чистым капиталовложениям, аппроксимируя это запаздывание показательной функцией, получим *:

$$\frac{d^2K}{dt^2} = -\varkappa\left(\frac{dK}{dt} - s'Y_t\right). \tag{12}$$

Легко видеть, что если темп роста чистого выпуска полагается постоянным: $Y_t = Y_0e^{kt}$, то

$$dK/dt \to (\varkappa/(k + \varkappa))s'Y_t \quad (t \to \infty).$$

Постоянный сомножитель $\varkappa/(k + \varkappa)$ можно экономически отождествить с коэффициентом $1 - \rho$. Характерно, что этот сомножитель связан отрицательно с темпом роста чистого выпуска, а следовательно, чем выше средние темпы экономического развития, тем при прочих равных условиях бо̀льший удельный вес занимает прирост незавершенного капитального строительства и неосвоенных мощностей в текущих чистых капиталовложениях.

Коэффициент $\varkappa/(k + \varkappa)$ можно рассчитать непосредственно на основе числовых значений $\bar{k}$ и $\varkappa$, где $\bar{k}$ — средний темп роста чистого выпуска за

---

* Запаздывание в форме показательной функции представляет собой непрерывный вариант распределенного дискретного запаздывания типа $Z_t = \alpha + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \ldots$, где взвешивающие коэффициенты уменьшаются по закону бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $a_2 = ra_1$, $a_3 = ra_2$ и т. д., причем $r < 1$. Конечно, такая форма, будучи применена к нашему случаю, упрощает реальность, но поскольку предполагается более или менее плавный характер экономического роста, она более предпочтительна по сравнению с «чистым» типом запаздывания $Z_t = \alpha + aX_{t-\theta}$.

период, а $\varkappa$ оценивается на основе следующей интерпретации. Пусть θ — средний срок полного освоения капиталовложений в исследуемом периоде. Так как выбрана экспоненциальная форма запаздывания со скоростью реакции $\varkappa$, распределение во времени прироста производственных фондов за счет чистых капиталовложений некоторого периода $t = 0$ имеет вид кривой, изображенной на рис. 3.

Как известно, в случае экспоненциального запаздывания период сходимости $dK/dt \to s'Y_0$ приблизительно равен $3(1/\varkappa)$. В данном случае это соответствует соотношению:

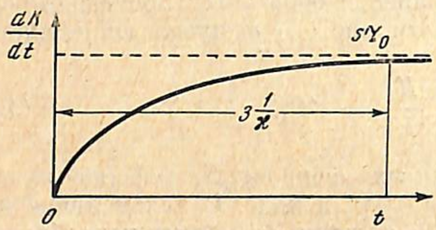

Рис. 3

$$\theta \approx 3^1/\varkappa \quad \text{или} \quad \varkappa \approx 3/\theta.$$

Для СССР в настоящее время коэффициент $\varkappa/(k+\varkappa)$ можно принять равным $\sim 0{,}85$, исходя из оценок $k = 0{,}07$ и $\varkappa = 0{,}4$ *.

Описанная методика учета временного запаздывания: «чистые капиталовложения — прирост производственных фондов» повышает точность числовых расчетов на основе модели. Итак, положив $m = \varkappa/(k+\varkappa)$, окончательно запишем наши предположения относительно динамики K_t:

$$\frac{dK}{dt} = ms'Y_t. \tag{13}$$

Анализ системы (2), (6), (13) приводит нас к следующим общим выводам (мы формулируем их, опуская промежуточные выкладки, впрочем, довольно элементарные).

Темп роста национального дохода обнаруживает устойчивость относительно некоторого значения

$$\frac{\dot{\bar{Y}}_t}{Y_t} = \pi + \frac{\gamma'}{1-\alpha}. \tag{14}$$

В самом деле, из (2), (6) и (13) получим уравнение, описывающее динамику Y_t при начальных значениях Y_0 и Q_0:

$$Y_t = \frac{Y_0}{B^{\alpha/(1-\alpha)}}[m(1-\alpha)s'Q_0(e^{Bt}-1)+B]^{\alpha/(1-\alpha)}e^{Bt}, \tag{15}$$

где $B = (1-\alpha)\pi + \gamma'$.

Отсюда

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\alpha B}{1-\alpha}\left[\frac{m(1-\alpha)s'Q_0e^{Bt}}{m(1-\alpha)s'Q_0(e^{Bt}-1)+B}\right] + B \tag{16}$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{B}{1-\alpha} = \pi + \frac{\gamma'}{1-\alpha}, \tag{17}$$

так как выражение в квадратных скобках стремится к единице, если $t \to \infty$.

Иными словами, при любых начальных условиях и любой норме накопления можно утверждать, что с течением времени темп роста националь-

* Оценка $\varkappa = 0{,}4$ получена ввиду $\theta = (2{,}5 + 5)$ лет, где 2,5 года — средний срок строительства, 5 лет — период полного освоения производственных мощностей в промышленности [4, стр. 83].

ного дохода будет сколь угодно близок к величине, которая определяется темпом роста занятости и параметрами α и γ', но не нормой накопления!

Объяснение этого следует искать в динамике фондоотдачи, которая оказывается самым тесным образом связанной с нормой накопления:

$$Q_t = \frac{B}{m(1-\alpha)s'}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{B}{Q_0 ms'(1-\alpha)}-1\right)e^{-Bt}}\right], \qquad (18)$$

$$\lim_{t\to\infty} Q_0 = \frac{B}{m(1-\alpha)s'}. \qquad (19)$$

Из (18) следует, что увеличение нормы накопления оказывает угнетающее воздействие на фондоотдачу: замораживает ее рост и усугубляет падение. Это легко видеть, перейдя от (18) к выражению для темпа роста фондоотдачи:

$$\frac{\dot{Q}_t}{Q_t} = B - \frac{Be^{Bt}}{e^{Bt}+\frac{B}{Q_0 ms'(1-\alpha)}-1}. \qquad (20)$$

Под этим углом зрения можно оценивать различные варианты политики в отношении доли накопления в условиях падающей фондоотдачи. Падение фондоотдачи оказывает давление на темпы роста общественного производства, понижая их. Возникает вопрос, является ли повышение доли накопления эффективным способом стабилизации темпов роста в этих условиях? Приведенные выше результаты склоняют к отрицательному ответу на этот вопрос. Увеличение доли накопления может еще более ухудшить картину в отношении фондоотдачи, что довольно скоро свело бы на нет усилия по поддержанию более высоких темпов роста производства путем расширенных капиталовложений. В итоге существует опасность вернуться к прежнем (до увеличения s') темпам роста производства, но уже ценой повышенной нормы накопления.

Подчеркнем, что из результатов модели вовсе не вытекает независимость темпа роста чистого выпуска от уровня нормы накопления. Однако в динамическом аспекте эта связь включает моменты, противодействующие устойчивому повышению темпа роста выпуска под воздействием увеличившейся нормы накопления. Если рост занятости задан, то темпы расширения общественного производства зависят от темпов роста производственных фондов:

$$\dot{K}_t/K_t = ms'Q_t.$$

Поэтому оценка влияния нормы накопления на темпы роста производства принципиального зависит от ответа на вопрос: можно ли считать s' и Q_t независимыми факторами $\dot{K}_t/K_t$, а следовательно, и $\dot{Y}_t/Y_t$? Результаты анализируемой нами модели опровергают такую гипотезу. Механизм обратной связи «норма накопления — темп роста производственных фондов — темп роста фондовооруженности — движение фондоотдачи» функционирует до тех пор, пока фондоотдача не уравновешивается на уровне $B/[m(1-\alpha)s']$, элиминирующем влияние нормы накопления на дальнейший рост, характеризующийся постоянным темпом

$$\frac{\bar{\dot{K}}_t}{K_t} = \frac{\bar{\dot{Y}}_t}{Y_t} = \pi + \frac{\gamma'}{1-\alpha}. \qquad (21)$$

Однако следует соблюдать осторожность в трактовке этого «равновесного» темпа роста. Его следует рассматривать лишь как тенденцию, отражающую определенный уровень технико-экономического развития общества, некую «осевую» траекторию, к которой тяготеют реальные кривые выпуска и производственных фондов.

Поскольку увеличение доли накопления на первых порах все же сказывается положительно на темпе роста национального дохода, уместно поставить вопрос, как это отразится на динамике фонда потребления.

Если в качестве критерия оптимальности экономики принят максимум фонда потребления, произведеного за определенный период, то оптимальная норма накопления определяется, вообще говоря, в зависимости от продолжительности этого периода. Анализ описанной модели позволил добавить к этому общеизвестному утверждению следующее.

В любом случае оптимальная норма накопления не превышает α, т. е. не существует такого периода максимизации, для которого оптимальная норма накопления была бы больше α.

Действительно, фонд потребления, произведенный за период $(0, T)$, выражается:

$$\int_0^T (1-s')Y_t dt = (1-s')\frac{Y_0}{B^{\alpha/(1-\alpha)}}\int_0^T [(1-\alpha)s'Q_0 m(e^{Bt}-1)+B]^{\alpha/(1-\alpha)}e^{Bt}. \tag{22}$$

Находим производную полученного интеграла по s'.

Знак ее зависит от знака выражения:

$$\frac{(1-\alpha)mQ_0(e^{Bt}-1)}{B^{1/(1-\alpha)}}s'\left[\frac{(1-\alpha)ms'Q_0(e^{Bt}-1)}{B^{1/(1-\alpha)}}+1\right]^{\alpha/(1-\alpha)}(\alpha-s')-$$
$$-(1-\alpha)\left\{\left[\frac{(1-\alpha)msQ_0(e^{Bt}-1)}{B^{1/(1-\alpha)}}+1\right]^{\alpha/(1-\alpha)}-1\right\}. \tag{23}$$

Отсюда ясно, что $\left[\int_0^T (1-s)Y_t dt\right]'_{s'} < 0$ в области $[\alpha, 1]$.

Более того, α является лишь предельным значением оптимальной нормы накопления, соответствующим бесконечно большему периоду максимизации. Для периодов, которыми обычно оперирует планирование народного хозяйства и которые не превышают 15—20 лет, оптимальная норма накопления значительно меньше. Для числовых расчетов можно воспользоваться приближенной формулой

$$\overline{s'} \approx \alpha - [(e^{Bt}-1)\alpha m Q_0]^{-1}B^{1/(1-\alpha)}$$

($\bar{s}'$ — норма накопления, максимизирующая интеграл фонда потребления за период $(0, T)$).

Подчеркнем еще раз, что если доля накопления больше α, то ее снижение скажется на увеличении фонда потребления, произведенного за любой период времени. Наоборот, любое повышение доли накопления за пределы α ухудшило бы картину не только в отношении потребления периодов, непосредственно следующих за моментом этого повышения, но, что самое интересное, и для периодов, сколько угодно отдаленных от него. Таким образом, в этом случае текущее и будущее потребление идут рука об руку.

Лишь в границах $[0, \alpha)$ действуют закономерности, укладывающиеся в схему: увеличение доли накопления — относительное падение текущего потребления — увеличение темпа роста национального дохода и вместе с ним темпа роста фонда потребления — относительное увеличение потребления будущих периодов, начиная с некоторого, отстоящего более или менее далеко от начального момента.

Эта схема лежит в основе большинства моделей, созданных с целью дать экономико-математическое обоснование выбора нормы накопления, и потому ее можно назвать «классической» вместе с «классическими» проблемами типа определения продолжительности периода максимизации, параметров весовой функции потребления и т. п., рассмотрение которых не входит в цель данной работы [5].

Покажем теперь, что гипотеза автономного технического прогресса не является необходимым условием для получения тех общих выводов, которые были изложены выше. Для этого вместо (2) включим в модель известную функцию Солоу [6], сохранив, однако, суть предположений (6) и (13). Итак, модель характеризуется теперь уравнениями:

$$Y_t^* = \bar{J}_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad \text{причем} \quad \bar{J}_t = e^{-\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{(\delta+\lambda)v} I_v^* \, dv, \tag{24}$$

$$L_t = L_0 e^{\pi t}, \tag{25}$$

$$I_t^* = s'' Y_t^*. \tag{26}$$

Отметим, что в данном случае мы оперируем уже не категориями «чистого выпуска» и «чистых инвестиций», а конечным продуктом Y_t^* и валовыми инвестициями (капиталовложениями) I_t^*. Соответственно этому s'' есть доля валовых капиталовложений в конечном продукте (I_t^*/Y_t^*). Переход к рассмотрению брутто-величин выпуска и капиталовложений в конечном счете связан с лежащим в основе функции Солоу специфическим подходом к описанию технического прогресса, по мнению большинства исследователей, более реалистическим, нежели производственная функция Кобба — Дугласа. Суть этого подхода заключается в том, что технический прогресс эффективен лишь при реализации новых капиталовложений (embodied type of technical progress). Это относится не только к тем капиталовложениям, которые обеспечивают чистый прирост производственных фондов, но в равной мере и к капиталовложениям, обеспечивающим замену выбывших фондов (в результате физического или морального износа). С другой стороны, разграничение между техническим прогрессом, на который влияют одни только чистые капиталовложения, и техническим прогрессом, зависящим от капиталовложений, идущих на возмещение, было бы чисто произвольно и, кроме того, не могло бы быть доказано эмпирически.

Рассмотрим переменную $\eta_t = \bar{J}_t/Y_t^*$. Ее динамика описывается уравнением *

$$\frac{\dot{\eta}_t}{\eta_t} = -(1-\alpha)\pi + (1-\alpha)\frac{\dot{\bar{J}}_t}{\bar{J}_t},$$

откуда

$$\dot{\eta}_t = -(1-\alpha)\pi\eta_t + (1-\alpha)\frac{\dot{\bar{J}}_t}{\bar{J}_t}\eta_t \tag{27}$$

---

* Если учесть, что

$$\frac{\dot{Y}_t^*}{Y_t^*} = (1-\alpha)\pi + \alpha\frac{\dot{\bar{J}}_t}{\bar{J}_t} \quad \text{и} \quad \frac{\dot{\eta}_t}{\eta_t} = \frac{\dot{\bar{J}}_t}{\bar{J}_t} - \frac{\dot{Y}_t^*}{Y_t^*}$$

или

$$\dot{\eta}_t = -(1-\alpha)\pi\eta_t + (1-\alpha)[-\delta\eta_t + e^{\lambda t}s''].$$

$$\dot{\eta}_t = -(1-\alpha)(\pi+\delta)\eta_t + (1-\alpha)e^{\lambda t}s'', \tag{28}$$

откуда легко видеть*, что

$$\lim_{t\to\infty}\eta_t = \frac{e^{\lambda t}s''(1-\alpha)}{\lambda+(1-\alpha)(\pi+\delta)}. \tag{29}$$

Таким образом, $\dot{\eta}_t/\eta_t \to \lambda$ при $t\to\infty$. Что это означает для темпа роста конечного продукта $(\dot{Y}_t^* / Y_t^*)$? Из определения переменной η и выражения (25) вытекает, что темп роста Y_t^* стремится (с течением времени) к некоторому постоянному уровню

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{Y}_t^*}{Y_t^*} = \pi + \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}. \tag{30}$$

Если теперь от переменных $\bar{J}_t$ и η_t перейти к обычным макроэкономическим переменным K_t (производственные фонды) и Q_t (фондоотдача, рассматриваемая как отношение конечного продукта к производственным фондам), то и здесь модель с функцией Солоу приводит к предельным характеристикам, аналогичным модели с функцией Кобба — Дугласа, включающей автономный технический прогресс **. Действительно, если валовые инвестиции растут с некоторым постоянным темпом ν, то предельный (при $t\to\infty$) темп роста производственных фондов также равен ν:

$$\dot{K}_t = s''Y_t^* - \delta K_t, \qquad K_t = Ce^{-\delta t} + \frac{s''Y_0^*}{\nu+\delta}e^{\nu t}, \tag{31}$$

где C — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий, $\delta > 0$.

Поэтому, если учесть (30), что при предположении $s'' = \text{const}$ дает предельный темп роста валовых инвестиций, равный $\nu = \pi + [\alpha/(1-\alpha)]\lambda$, то можно утверждать

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \pi + \frac{\alpha}{1-\alpha}\lambda. \tag{32}$$

Итак, замена гипотезы автономного технического прогресса более реалистическим предположением Солоу не опровергла нашего общего вывода о том, что в экономике с постоянно растущей занятостью и фиксированной нормой накопления существует тенденция к поддержанию некоторого независимого от нормы накопления постоянного темпа роста чистого выпуска (конечного продукта) и производственных фондов при постоянной фондоотдаче.

Изложенные результаты *** имеют интерес еще и потому, что они характеризуют функцию Кобба — Дугласа с автономным техническим прогрессом как предельный случай функции Солоу. Иными словами, если предположения (22) — (24) близки к реальности, можно говорить об объективно

---

* Решив простое дифференциальное уравнение (28).

** Разумеется, если использовать эту функцию для описания не чистого выпуска, как это было сделано выше, а конечного продукта. На основе изложенного нетрудно показать, что предельные характеристики динамики Y_t и Y_t^* одни и те же в рамках предположений (2), (6) и (13).

*** Под несколько иным углом зрения и при более сложных формальных рассуждениях сходные результаты получил Фелпс [7]. К. Сато применил их, исследуя вопрос о продолжительности периода сходимости, к траектории с устойчивым темпом роста [8].

существующей тенденции к «линеаризации» исходной функции $\dot{g}_t/g_t = G(\dot{F}_t/F_t)$, что, на наш взгляд, повышает надежность выводов, получаемых на основе макроэкономических моделей с производственной функцией типа Кобба — Дугласа.

Рассмотрим далее некоторую модификацию модели с функцией Кобба — Дугласа, в основе которой ложит попытка учесть обратную связь между фондом потребления и затратами общественного труда в процессе производства. Эта связь раскрывается по следующим соображениям.

Пусть трудовые ресурсы общества, измеряемые в единицах занятости (N_t), вовлекаются в народное хозяйство с темпом роста, который, как и прежде, задается извне:

$$N_t = N_0 e^{\pi t}. \tag{33}$$

Следующие ниже экономические предположения более удобно формализовать в терминах дискретно изменяющегося времени. Поэтому вместо (33) запишем

$$N_t = nN_{t-1}, \tag{34}$$

где $n = \text{const}$ отражает коэффициент роста занятости *.

Однако переменная N_t лишь номинально представляет массу общественного труда, действительно участвующего в производстве. Речь идет о качественных определениях живого труда, скрывающихся за каждой единицей занятости, такой, например, как человеко-час. Сюда следует отнести, между прочим, общую квалификацию работников, которая базируется прежде всего на общеобразовательном и культурном уровне населения; интенсивность труда, которая определяется не только технологией и уровнем организации производства, но и такими факторами, как общефизическая и психологическая подготовка, степень поглощенности работой. Последняя является одним из самых существенных факторов, определяющих интенсивность, и, с другой стороны, именно этот фактор, пожалуй, наиболее тесно связан со сферой потребления, особенно в тех отраслях, где система машин не вовлекает работника в свой строгий ритм.

Разумеется, мы не ставим здесь задачу полно изложить все моменты, характеризующие «вес» единицы живого труда в производстве и побудившие нас ввести понятие «эффективные трудовые усилия общества» в отличие от номинальной занятости, а коснулись лишь тех из них, на которых может быть прослежена связь между эффективными трудовыми усилиями общества и уровнем его благосостояния.

При формализации этой связи для ввода ее в модель можно воспользоваться в качестве грубого приближения следующими соотношениями:

$$L_t = b_t N_t, \tag{35}$$

$$b_t = l_t \frac{(1 - s')\, Y_{t-1}}{N_{t-1}}, \tag{36}$$

где b_t — параметр, отражающий эффективную отдачу каждой единицы занятости. Изложенное выше говорит в пользу предположения, что все физические, психологические и социальные факторы, определяющие эту отдачу, сами в существенной степени формируются под воздействием уровня благосостояния общества, представленного здесь в фонде потребления $C_t = (1 - s')\, Y_t$, приходящегося на единицу занятости, что упрощенно и выражено в соотношении (36), где l_t — параметр линейной функции. Временной лаг, взятый для простоты одноинтервальным, следует из допущения

* По определению, коэффициент роста некоторой переменной X_t равен темпу роста этой переменной ($\dot{X}_t / X_t$ или в дискретном случае $\Delta X_t / X_t$) плюс 1.

ния, что эффективность единицы занятости реагирует на изменение C_t / N_t с некоторым запаздыванием.

Если существование зависимости между эффективными трудовыми усилиями общества и уровнем его благосостояния в принципе вряд ли может быть подвергнуто сомнению [9], то выбранную нами линейную форму этой зависимости следует рассматривать лишь как первое приближение. Эта же оговорка относится и к результатам модели в целом.

Итак, модель оказывается замкнутой не только на K_t:

$$K_t = K_{t-1} + s'Y_{t-1}, \qquad s' = \text{const}, \tag{37}$$

но и на L_t:

$$L_t = nl_t(1 - s')Y_{t-1}. \tag{38}$$

Наконец, запишем производственную функцию в виде

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \gamma_t, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{39}$$

γ_t — сомножитель, отражающий автономный технический прогресс, здесь является кусочно-постоянной (возрастающей) функцией времени. Мы будем рассматривать динамические свойства системы в интервалах $\gamma_t = \text{const} = \gamma$. Математическая строгость выводов предполагает, что эти интервалы выбраны достаточно большими. С другой стороны, предположение о возрастании во времени может быть использовано для сравнения статических характеристик *, присущих различным периодам. Этот метод применяется и в отношении параметра l_t, а также α, s', n. Все они полагаются постоянными, поскольку выявляются некоторые устойчивые тенденции, или траектории, однако различные предположения об их изменении во времени могут быть приняты во внимание при сравнительной оценке параметров этих траекторий для различных периодов времени или различных стран.

Математический анализ системы (37) — (39) приводит нас к следующему утверждению: темп роста чистого выпуска $\Delta Y_t / Y_t$ стремится к некоторой величине $k = \text{const}$, зависимость которой от нормы накопления выражается кривой с ветвями, опущенными по обе стороны от точки $s' = \alpha$. Этот результат получен из следующих формальных соображений.

Введя переменную $z_t = K_t / s'Y_t$, от (37) — (39) перейдем к выражению

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = z_t^{\alpha/(1-\alpha)} A^{1/(1-\alpha)}, \tag{40}$$

где $A = s'^{\alpha}(1 - s')^{1-\alpha}(nl)^{1-\alpha}\gamma$.

Так как $Y_t / Y_{t-1} = (z_{t-1} + 1) / z_t$, то, исключив Y_t / Y_{t-1} из (40), получим нелинейное разностное уравнение для z_t:

$$z_t = \frac{(z_{t-1} + 1)^{1-\alpha}}{A}. \tag{41}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде: $z_t = \bar{z} + X_t$, где $\bar{z} = (\bar{z} + 1)^{1-\alpha} / A$. Последнее уравнение имеет решение (притом единственное) при любых значениях $A > 0$ и $0 < \alpha < 1$ **. Тогда из (41) по-

* В теории автоматического регулирования термин «статические характеристики» имеет в виду параметры, характеризующие предельные состояния (или траектории) системы в отличие от «динамических характеристик», связанных с переходными процессами.

** Это вытекает из того, что $A = (\bar{z} + 1)^{1-\alpha} / \bar{z}$ есть функция, непрерывная в интервале $(0, \infty)$ с областью значений $(0, \infty)$.

лучим

$$X_t = \frac{(1+\alpha)^{-\alpha}}{A}(1-\alpha)X_{t-1} + \ldots \tag{42}$$

Можно доказать асимптотическую сходимость этого ряда к 0. Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} z_t = \bar{z}, \tag{43}$$

откуда

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}} \tag{44}$$

или для темпа роста

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Delta Y_t}{Y_t} = \frac{1}{\bar{z}} = k. \tag{45}$$

Равенства (43) и (45) означают, что темпы роста производственных фондов $\Delta K_t / K_t = 1 / z_t$ и чистого выпуска с течением времени сколь угодно близко приближаются к одной и той же постоянной величине $1/\bar{z}$. Отсюда следует, что фондоотдача Q_t также стремится к некоторому фиксированному уровню. В этом смысле модель обнаруживает динамические свойства, аналогичные вариантам, разобранным выше. В то же время здесь присутствует существенно новый момент: устойчивый темп роста Y_t и K_t не является независимым от нормы накопления.

Уточняя эту зависимость, будем искать dk / ds':

$$\frac{dk}{ds'} = \frac{\left(\frac{1}{k}+1\right)k^2}{k^2\left(\frac{1}{k}+1\right)^{2-\alpha} - (1-\alpha)A}\cdot\frac{\partial A}{\partial s'}, \tag{46}$$

причем $k^2((1/k)+1)^{2-\alpha} - (1-\alpha)A = k((1/k)+1)^{1-\alpha}[k((1/k)+1) - 1 + \alpha] > 0$, если $A > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Таким образом, искомая производная имеет тот же знак, что и $\partial A / \partial s'$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial s'} > 0, \quad 0 \leqslant s' < \alpha,\\ &\frac{\partial A}{\partial s'} = 0, \quad s' = \alpha,\\ &\frac{\partial A}{\partial s'} < 0, \quad \alpha < s \leqslant 1. \end{aligned} \tag{47}$$

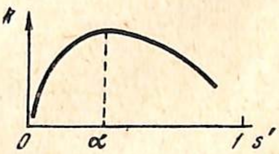

Рис. 4

Следовательно, зависимость темпа роста чистого выпуска от нормы накопления в пределе имеет следующий вид (рис. 4).

На наш взгляд, представляет интерес вывод относительно существования *отрицательной* зависимости темпа роста чистого выпуска от нормы накопления в области $(\alpha, 1]$. Иными словами, ускорение роста чистого выпуска не является неизбежным следствием увеличения нормы накопления — с точки зрения длительной тенденции. Более того, описанная выше попытка учета обратной связи «эффективные трудовые усилия общества — уровень благосостояния» дает основание предположить, что максимальный темп роста чистого выпуска требует, чтобы норма накопления не превышала некоторой величины α (а, следовательно, доля потребления не опускалась ниже $1 - \alpha$).

Вывод о принципиальной возможности повышения темпов роста национального дохода путем увеличения доли потребления в некотором смысле соприкасается с теорией Кейнса относительно связи расходов на потребление и национального дохода, хотя существенное различие предпосылок и областей экономической жизни, в которых соответствующие идеи претендуют на теоретическое оправдание, очевидно. В одном случае речь идет о закономерностях процесса расширенного материального воспроизводства, в другом — о факторах, определяющих степень загруженности наличных производственных мощностей и рабочей силы. Но в обоих случаях прослеживается активная роль текущего потребления — не как вычета из ресурсов, обеспечивающих развитие производства в последующие периоды, но, напротив, как фактора, действующего в направлении этого развития.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Kaldor. Capital Accumulation and Economic Growth. In the Theory of Capital. London. 1961.
2. М. М. Голанский. Экономическое развитие и моделирование. Автореф. докт. дис., ЦЭМИ, 1967.
3. G. Bombach. Über die Möglichkeit wirtschaftlicher Vorraussagen. Kyklos, 1962, № 15.
4. А. И. Анчишкин, Ю. В. Яременко. Темпы и пропорции экономического развития. М., Экономиздат, 1966.
5. Я. Тинберген, Х. Бос. Математические модели экономического роста. М., «Прогресс», 1967.
6. R. M. Solow. Investment and Tehnical Progress. Mathematical Methods in Social Sciences. 1959.
7. E. S. Phelps. The New View of Investment: A Neoclassical Analysis. Quart. J. Econ. LXXVI, November 1962, LXXVI.
8. K. Sato. On the Adjustment Time in Neoclassical Growth Models. Rev. Econ. Stud. July, 1966, XXXIII.
9. А. Л. Вайнштейн. Динамика народного дохода СССР и его основных компонентов. Экономика и матем. методы, 1967, т. III. вып. I.

Поступила в редакцию
27 II 1968

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1968 том IV, вып. 4

ОБОБЩЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

(*Москва*)

1. Соотношения двойственности и связанный с ними двойственный подход к анализу задач линейного и выпуклого программирования играют существенную роль не только в теории и вычислительной практике математического программирования, но и при исследовании многих экономических механизмов. Ниже описана некоторая достаточно общая схема составления двойственной задачи для задачи математического программирования, сформулированной в абстрактных терминах. Естественно, что эта схема, как впрочем и всякая другая схема, далеко не во всех случаях приводит к цели, т. е. позволяет построить двойственную задачу, связанную с исходной некоторым соотношением двойственности. Выделение тех экстремальных задач, для которых предлагаемая схема оказывается эффективной, составляет основное содержание работы. При этом мы сосредоточим свое внимание лишь на так называемых *обобщенных* соотношениях двойственности, связывающих двойственную задачу с так называемой обобщенной исходной задачей, понятие которой было введено в [1] и [2] соответственно для конечномерного и общего случаев. Переход к обобщенной исходной задаче вполне естественен (в частности, он позволяет получить теорему двойственности для общей задачи выпуклого программирования без каких бы то ни было дополнительных предположений типа условия Слейтера).

2. Начнем с формулировки экстремальной задачи, которая явится предметом последующего анализа. Пусть G — непустое множество произвольной природы; $f(x)$ — вещественный функционал, определенный на G; $\Phi(x)$ — оператор, определенный на G и действующий из G в вещественное банахово пространство (B-пространство) E_1; G_1 — непустое подмножество пространства E_1. Положим

$$R = \{x\colon \Phi(x) \in G_1, x \in G\}.$$

Рассмотрим экстремальную задачу, состоящую в отыскании верхней грани $f(x)$ на множестве R, т. е. задачу вида

$$f(x) \to \sup \tag{1}$$

при условиях

$$\Phi(x) \in G_1, \tag{2}$$

$$x \in G. \tag{3}$$

Задача (1) — (3) является функциональным аналогом общей задачи математического программирования. Соотношения (2), (3) представляют собой две группы ограничений, на которые обычно подразделяется система условий задачи. Такое подразделение, конечно, может осуществляться мно-