

шала некоторой величины  $\alpha$  ( $\alpha$ , следовательно, доля потребления не опускалась ниже  $1 - \alpha$ ).

Вывод о принципиальной возможности повышения темпов роста национального дохода путем увеличения доли потребления в некотором смысле соприкасается с теорией Кейнса относительно связи расходов на потребление и национального дохода, хотя существенное различие предпосылок и областей экономической жизни, в которых соответствующие идеи претендуют на теоретическое оправдание, очевидно. В одном случае речь идет о закономерностях процесса расширенного материального воспроизводства, в другом — о факторах, определяющих степень загруженности различных производственных мощностей и рабочей силы. Но в обоих случаях прослеживается активная роль текущего потребления — не как вычета из ресурсов, обеспечивающих развитие производства в последующие периоды, но, напротив, как фактора, действующего в направлении этого развития.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. N. Kaldor. Capital Accumulation and Economic Growth. In the Theory of Capital. London, 1961.
2. М. М. Голанский. Экономическое развитие и моделирование. Автореф. докт. дис., ЦЭМИ, 1967.
3. G. Bombach. Über die Möglichkeit wirtschaftlicher Vorrassagen. *Kyklos*, 1962, № 15.
4. А. И. Анчишкин, Ю. В. Яременко. Темпы и пропорции экономического развития. М., Экономиздат, 1966.
5. Я. Тинберген, Х. Бос. Математические модели экономического роста. М., «Прогресс», 1967.
6. R. M. Solow. Investment and Tehnical Progress. *Mathematical Methods in Social Sciences*, 1959.
7. E. S. Phelps. The New View of Investment: A Neoclassical Analysis. *Quart. J. Econ.* LXXVI, November 1962, LXXVI.
8. K. Sato. On the Adjustment Time in Neoclassical Growth Models. *Rev. Econ. Stud.* July, 1966, XXXIII.
9. А. Л. Вайнштейн. Динамика народного дохода СССР и его основных компонентов. Экономика и матем. методы, 1967, т. III. вып. I.

Поступила в редакцию  
27 II 1968

## ОБОБЩЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Е. Г. ГОЛЬШТЕИН

(Москва)

1. Соотношения двойственности и связанный с ними двойственный подход к анализу задач линейного и выпуклого программирования играют существенную роль не только в теории и вычислительной практике математического программирования, но и при исследовании многих экономических механизмов. Ниже описана некоторая достаточно общая схема составления двойственной задачи для задачи математического программирования, сформулированной в абстрактных терминах. Естественно, что эта схема, как впрочем и всякая другая схема, далеко не во всех случаях приводит к цели, т. е. позволяет построить двойственную задачу, связанную с исходной некоторым соотношением двойственности. Выделение тех экстремальных задач, для которых предлагаемая схема оказывается эффективной, составляет основное содержание работы. При этом мы сосредоточим свое внимание лишь на так называемых *обобщенных* соотношениях двойственности, связывающих двойственную задачу с так называемой обобщенной исходной задачей, понятие которой было введено в [1] и [2] соответственно для конечномерного и общего случаев. Переход к обобщенной исходной задаче вполне естественен (в частности, он позволяет получить теорему двойственности для общей задачи выпуклого программирования без каких бы то ни было дополнительных предположений типа условия Слейтера).

2. Начнем с формулировки экстремальной задачи, которая явится предметом последующего анализа. Пусть  $G$  — непустое множество произвольной природы;  $f(x)$  — вещественный функционал, определенный на  $G$ ;  $\Phi(x)$  — оператор, определенный на  $G$  и действующий из  $G$  в вещественное банахово пространство ( $B$ -пространство)  $E_1$ ;  $G_1$  — непустое подмножество пространства  $E_1$ . Положим

$$R = \{x: \Phi(x) \in G_1, x \in G\}.$$

Рассмотрим экстремальную задачу, состоящую в отыскании верхней грани  $f(x)$  на множестве  $R$ , т. е. задачу вида

$$f(x) \rightarrow \sup \quad (1)$$

при условиях

$$\Phi(x) \in G_1, \quad (2)$$

$$x \in G. \quad (3)$$

Задача (1) — (3) является функциональным аналогом общей задачи математического программирования. Соотношения (2), (3) представляют собой две группы ограничений, на которые обычно подразделяется система условий задачи. Такое подразделение, конечно, может осуществляться мно-

гими способами. Выбор того или иного способа производится в зависимости от структуры условий задачи и характера ее последующего анализа.

Условимся называть последовательность  $X = \{x^{(k)}\}$  точек  $x^{(k)} \in R$ , для которой существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(X)$ , *планом* задачи (1) — (3). План

$X = \{x^{(k)}\}$  задачи (1) — (3) назовем ее *решением*, если

$$f(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \sup_{x \in R} f(x) = v.$$

При  $R = \emptyset$  положим, как обычно,  $v = -\infty$ . Для дальнейшего нам понадобится несколько расширить понятие плана. Именно, назовем последовательность  $X = \{x^{(k)}\}$  точек  $x^{(k)} \in G$  *обобщенным планом* задачи (1) — (3), если найдется такая последовательность  $\{y_1^{(k)}\}$  элементов  $y_1^{(k)} \in G_1$ , что

$$\Phi(x^{(k)}) = y_1^{(k)} + y_2^{(k)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |y_2^{(k)}| = 0, \quad (4)$$

причем существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(X)$ .

Как видим, обобщенный план задачи (1) — (3) отличается от ее плана тем, что, вообще говоря, удовлетворяет ограничению (2) только «в пределе».

Объединим в множество  $\bar{R}$  все обобщенные планы задачи (1) — (3). Расширим постановку задачи (1) — (3), потребовав, чтобы верхняя грань функционала  $f(X)$  бралась не на множестве планов, а на множестве  $\bar{R}$  обобщенных планов этой задачи. Значение новой верхней грани обозначим через  $\bar{v}$ , доопределив ее в случае  $\bar{R} = \emptyset$  равенством  $\bar{v} = -\infty$ . Очевидно,

$$v \leq \bar{v}. \quad (5)$$

Вновь введенную задачу максимизации  $f(X)$  на множестве  $\bar{R}$  назовем *обобщенной задачей* (1) — (3). Обобщенный план  $X^*$  задачи (1) — (3), для которого  $f(X^*) = \bar{v}$ , назовем *решением* обобщенной задачи (1) — (3).

3. Опишем схему составления двойственных задач, ограничившись вначале случаем, когда  $G_1$  является выпуклым конусом, т. е. таким множеством, что при любых  $y', y'' \in G_1$ ,  $\lambda' \geq 0$ ,  $\lambda'' \geq 0$

$$\lambda' y' + \lambda'' y'' \in G_1.$$

Используя выпуклый конус  $G_1$  в качестве так называемого положительного конуса, превратим  $E_1$  в частично упорядоченное множество. Для этого введем для элементов  $E_1$  отношение порядка « $\leq$ » следующим образом:

$$y' \leq y'' (G_1) \Leftrightarrow_{(y', y'' \in E_1)} y'' - y' \in G_1.$$

Теперь ограничение (2) может быть переписано в эквивалентном виде

$$\Phi(x) \geq 0(G_1).$$

Пусть  $E_1^*$  — пространство, сопряженное с  $E_1$ . Положительный конус  $G_1 \in E_1$  индуцирует в сопряженном пространстве  $E_1^*$  выпуклый конус

$$G_1^* = \{\lambda : \lambda(y) \geq 0, \text{ если } y \geq 0(G_1); \lambda \in E_1^*\},$$

который мы примем за положительный конус этого пространства. Конус  $G_1^*$  обычно называют сопряженным с  $G_1$ .

Положим для любых  $x \in G$  и  $\lambda \in E_1^*$

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda(\Phi(x)).$$

Пусть

$$\psi(\lambda) = \sup_{x \in G} F(x, \lambda). \quad (6)$$

Определим задачу, двойственную к задаче (1) — (3), следующим образом: требуется найти

$$\tilde{v} = \inf \psi(\lambda) \quad (7)$$

при условии

$$\lambda \geq 0(G_1^*). \quad (8)$$

Применительно к некоторым частным классам экстремальных задач приведенная формулировка двойственной задачи допускает дальнейшую конкретизацию, которая состоит в выделении ограничений, отсекающих множество точек  $\lambda$ , для которых  $\psi(\lambda) < \infty$ . Проиллюстрируем это на примере линейной задачи.

Пусть  $G$  — выпуклый конус  $B$ -пространства  $E$ ;  $A$  — ограниченный линейный оператор из  $E$  в  $E_1$ ,  $\Phi(x) = -A(x) + b$ , где  $b \in E_1$ ;  $f(x) = c(x)$ , где  $c \in E^*$ . Тогда задача (1) — (3) превращается в функциональный аналог задачи линейного программирования вида:

$$c(x) \rightarrow \sup, \quad (9)$$

$$Ax \leq b(G_1), \quad (10)$$

$$x \geq 0(G). \quad (11)$$

Очевидно,

$$\psi(\lambda) = \sup_{x \in G} [(c - A^*\lambda)(x) + \lambda(b)] = \begin{cases} \lambda(b), & \text{если } c - A^*\lambda \leq 0(G^*); \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, двойственная задача (6) — (8) в данном случае принимает вид:

$$\lambda(b) \rightarrow \inf, \quad (12)$$

$$A^*\lambda \geq c(G^*), \quad (13)$$

$$\lambda \geq 0(G_1^*), \quad (14)$$

с которым мы привыкли иметь дело в теории линейного программирования.

4. Перейдем к установлению связи между исходной и двойственной задачами, оправдывающей описанную схему формирования двойственной задачи. Прежде всего докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$\bar{v} \leq \tilde{v}. \quad (15)$$

Доказательство. Если  $\bar{R} = \emptyset$ , то  $\bar{v} = -\infty$ , и неравенство (15) очевидно. Пусть  $\bar{R} \neq \emptyset$  и  $X = \{x^{(k)}\}$  — решение обобщенной задачи (1) — (3), т. е. такая последовательность, для которой соблюдаются условия (4), причем  $\bar{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)})$ .

Имеем для любого  $\lambda \geq 0(G_1^*)$

$$\psi(\lambda) = \sup_{x \in G} F(x, \lambda) \geq F(x^{(k)}, \lambda) = f(x^{(k)}) + \lambda(y_1^{(k)} + y_2^{(k)}) \geq f(x^{(k)}) + \lambda(y_2^{(k)}).$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , приходим к соотношению

$$\psi(\lambda) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \bar{v},$$

справедливому для произвольного  $\lambda \geq 0 (G_1^*)$ . Следовательно,

$$\bar{v} = \inf_{\lambda \geq 0 (G_1^*)} \psi(\lambda) \geq \bar{v},$$

что и требовалось доказать.

Введем  $B$ -пространство  $\hat{E}_1 = L \times E_1$ , где  $L$  — пространство вещественных чисел, положив для каждого элемента

$$\hat{y} = (y_0, y) \in \hat{E}_1, \quad y_0 \in L, \quad y \in E_1, \quad |y| = \max(|y_0|, |y|).$$

В качестве положительного конуса пространства  $\hat{E}_1$  примем

$$\hat{G} = \{\hat{y} = (y_0, y) : y_0 \geq 0, y \geq 0(G_1)\}.$$

Используя данные задачи (1) — (3), определим в  $\hat{E}_1$  множество  $K = \{\hat{y} = (y_0, y) : y_0 = f(x) - y_0', y = \Phi(x) - y'; x \in G, y_0' \geq 0, y' \in G_1\}$ . Очевидно,  $K \neq \emptyset$  (так как  $G \neq \emptyset$  и  $G_1 \neq \emptyset$ ).

Пусть  $\bar{K}$  — замыкание  $K$ . Имеет место следующая обобщенная теорема двойственности.

**Теорема 1.** Если множество  $\bar{K}$  выпукло и множество обобщенных планов  $\bar{R}$  непусто, то

$$\bar{v} = \tilde{v}, \quad (16)$$

т. е. значение верхней грани в обобщенной исходной задаче (1) — (3) равно значению нижней грани в двойственной задаче (6) — (8).

**Доказательство.** В случае  $\bar{v} = \infty$  утверждение теоремы 1 непосредственно следует из леммы 1. Предположим поэтому, что  $\bar{v} < \infty$ .

Пусть при любом  $\varepsilon > 0$  множество  $K(\varepsilon)$  объединяет точки пространства  $\hat{E}_1$ , удаленные от  $\bar{K}$  меньше чем на  $\varepsilon$ . Очевидно,  $K(\varepsilon)$  — открытое множество. Из выпуклости  $\bar{K}$  вытекает, что множество  $K(\varepsilon)$  также выпукло. Обозначим через  $l(\delta)$  точку  $(\bar{v} + \delta, 0) \in E_1^*$ . Покажем, что при любом  $\delta > 0$  найдется такое  $\varepsilon(\delta) > 0$ , что  $l(\delta) \notin K(\varepsilon(\delta))$ . Действительно, предположение противного в силу определения множества  $K(\varepsilon)$  ведет к существованию элементов  $x^{(k)} \in G$ ,  $y^{(k)} \in E_1(|y^{(k)}| \leq 1)$  и чисел  $\varepsilon_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , таких, что

$$\bar{v} + \delta \leq f(x^{(k)}) + \varepsilon_k, \quad 0 \leq \Phi(x^{(k)}) + \varepsilon_k y^{(k)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0. \quad (17)$$

Если теперь из последовательности  $\{x^{(k)}\}$  выделить подпоследовательность  $\{x^{(k_i)}\} = \{\tilde{x}^{(i)}\}$ , для которой  $f(\tilde{x}^{(i)})$  имеет предел, то  $\tilde{X} = \{\tilde{x}^{(i)}\}$  согласно (17) является обобщенным планом задачи (1) — (3), причем

$$f(\tilde{X}) \geq \bar{v} + \delta, \quad \delta > 0.$$

Последнее неравенство противоречит определению числа  $\bar{v}$  и служит доказательством нашего утверждения.

Положим  $K_\delta = K(\varepsilon(\delta))$ , где  $\delta > 0$ . Поскольку открытое выпуклое множество  $K_\delta$  не содержит точку  $l(\delta)$ , то согласно известной теореме о разделяющей гиперплоскости найдется такой ненулевой функционал

\* Предполагается, что  $\bar{v} > -\infty$ . Случай  $\bar{v} = -\infty$  исследуется аналогично, если положить  $l(\delta) = (-1/\delta, 0)$ ,  $\delta > 0$ .

$\hat{\lambda}^{(\delta)} = (\lambda_0^{(\delta)}, \lambda^{(\delta)}) \in \hat{E}_1^*$ , что

$$\hat{\lambda}^{(\delta)}(\hat{y}) = \lambda_0^{(\delta)} \cdot y_0 + \lambda^{(\delta)}(y) \leq \hat{\lambda}^{(\delta)}(l(\delta)) = \lambda_0^{(\delta)} \cdot (\bar{v} + \delta) \quad (18)$$

при любом  $\hat{y} = (y_0, y) \in K_\delta$ .

Из определения множества  $K_\delta$  вытекает, что при  $\hat{y} \in K_\delta$ ,  $\hat{y}' \geq (\hat{G}_1)$  и  $\alpha \geq 0$

$$\hat{y} - \alpha \hat{y}' \in K_\delta. \quad (19)$$

Используя (18) и (19), получаем

$$\frac{1}{\alpha} [\hat{\lambda}^{(\delta)}(\hat{y}) - \hat{\lambda}^{(\delta)}(l(\delta))] \leq \hat{\lambda}^{(\delta)}(\hat{y}').$$

Устремляя далее  $\alpha$  к бесконечности, приходим к неравенству:

$\hat{\lambda}^{(\delta)}(\hat{y}') \geq 0$ , справедливому для любого  $\hat{y}' \geq 0(\hat{G}_1)$ . Следовательно,

$$\hat{\lambda}^{(\delta)} = (\lambda_0^{(\delta)}, \lambda^{(\delta)}) \geq 0(\hat{G}_1^*), \text{ т. е. } \lambda_0^{(\delta)} \geq 0, \lambda^{(\delta)} \geq 0(G_1^*). \quad (20)$$

Покажем, что  $\lambda_0^{(\delta)} > 0$ . В самом деле, предположение противного с учетом (18) ведет к неравенству

$$\lambda^{(\delta)}(y) \leq 0, \quad (21)$$

если  $\hat{y} = (y_0, y) \in K_\delta$  при некотором  $y_0$ .

Пусть  $X = \{x^{(h)}\} \in \bar{R}$ ,  $z \in E_1$ ,  $|z| < 1$ . Положим

$$y^{(h)}(z) = (y_0^{(h)}, y^{(h)}(z)), \text{ где } y_0^{(h)} = f(x^{(h)}), y^{(h)} = \Phi(x^{(h)}) + \varepsilon(\delta)z.$$

Очевидно,  $\hat{y}^{(h)}(z) \in K_\delta$ . Поэтому в силу (21)

$$\lambda^{(\delta)}(\Phi(x^{(h)})) + \varepsilon(\delta)\lambda^{(\delta)}(z) \leq 0 \quad (22)$$

при любом  $z \in E_1$ ,  $|z| < 1$ .

Из определения обобщенного плана и (20) вытекает, что

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda^{(\delta)}(\Phi(x^{(h)})) \geq 0.$$

Следовательно, (22) может быть переписано в виде

$$\lambda^{(\delta)}(z) \leq 0 \quad (23)$$

для любого  $z \in E_1$ . Но из соотношения (23) вытекает, что  $\lambda^{(\delta)} = 0$ . Получили противоречие, поскольку функционал  $\hat{\lambda}^{(\delta)} = (\lambda_0^{(\delta)}, \lambda^{(\delta)})$  по построению

отличен от нулевого. Итак  $\lambda_0^{(\delta)} > 0$ .

Положим теперь  $\tilde{\lambda}^{(\delta)} = \lambda^{(\delta)} / \lambda_0^{(\delta)}$ .

В силу (20) функционал  $\tilde{\lambda}^{(\delta)} \geq 0(G_1^*)$ .

Из соотношения (18) при  $y_0 = f(x)$ ,  $y = \Phi(x)$ , где  $x$  — произвольный элемент  $G$ , получаем

$$f(x) + \tilde{\lambda}^{(\delta)}(\Phi(x)) \leq \bar{v} + \delta, \text{ т. е.}$$

$$\bar{v} \leq \psi(\tilde{\lambda}^{(\delta)}) = \sup_{x \in G} [f(x) + \tilde{\lambda}^{(\delta)}(\Phi(x))] \leq \bar{v} + \delta.$$

Учитывая далее, что  $\delta$  — произвольное положительное число, приходим к неравенству  $\tilde{v} \leq \bar{v}$ , которое совместно с (15) убеждает нас в справедливости равенства (16). Теорема доказана.

5. Схема составления двойственной задачи была описана нами в предположении, что  $G_1$  является выпуклым конусом. Как мы сейчас увидим, эта схема легко обобщается на случай произвольного множества  $G_1$ . Итак, пусть  $G_1$  — произвольное подмножество  $E_1$ . Ограничения (2), (3), очевидно, могут быть переписаны в виде

$$\Phi(x) - y = 0, \quad (2')$$

$$x \in G, \quad y \in G_1. \quad (3')$$

Если положить  $z = (x, y)$ , то (2'), (3') можно рассматривать как систему ограничения типа (2), (3) при  $G_1 = \{0\}$ . В соответствии с изложенной выше схемой задача, двойственная к (1), (2'), (3'), имеет вид

$$\psi(\lambda) = \sup_{x \in G, y \in G_1} [f(x) + \lambda(\Phi(x) - y)] \rightarrow \inf,$$

где нижняя грань берется по всевозможным элементам  $\lambda \in E_1^*$  (если  $G_1 = \{0\}$ , то  $G_1^* = E_1^*$ ).

Преобразуем функцию  $\psi(\lambda)$ . Имеем

$$\psi(\lambda) = \sup_{x \in G} [f(x) + \lambda(\Phi(x))] - \inf_{y \in G_1} \lambda(y).$$

Для любого множества  $S \subset E_1$  введем функцию

$$t_S(\lambda) = \inf_{y \in S} \lambda(y), \quad \lambda \in E_1^*.$$

Через  $S^*$  обозначим множество функционалов  $\lambda \in E_1^*$ , для которых

$$t_S(\lambda) > -\infty. \quad (24)$$

Очевидно,  $S^*$  — выпуклый конус. Если  $S$  — выпуклый конус, то  $S^*$  совпадает с множеством функционалов, неотрицательных на  $S$ , т. е. является конусом, сопряженным к  $S$ , причем  $t_S(\lambda) = 0$  для любого  $\lambda \in S^*$ . В связи с этим выпуклый конус  $S^*$ , определяемый соотношением (24), естественно и в общем случае называть сопряженным к множеству  $S$ . Если  $\lambda \notin S^*$ , т. е.  $t_S(\lambda) = -\infty$ , то, очевидно,  $\psi(\lambda) = \infty$ . Поэтому окончательная формулировка двойственной задачи имеет вид

$$\psi(\lambda) = \psi'(\lambda) - \psi''(\lambda) \rightarrow \inf, \quad (25)$$

$$\lambda \geq 0(G_1^*), \quad (26)$$

где

$$\psi'(\lambda) = \sup_{x \in G} F(x, \lambda), \quad \psi''(\lambda) = t_{G_1}(\lambda) = \inf_{y \in G_1} \lambda(y). \quad (27)$$

Если  $G_1$  — конус, то (25) — (27) совпадает с приведенной ранее формулировкой двойственной задачи (6) — (8).

Из теоремы 1 следует, что в предположении выпуклости введенного выше множества  $\bar{K}$  задачи (1) — (3) и (25) — (27) связаны обобщенным соотношением двойственности (16).

6. С обобщенной теоремой двойственности тесно связаны так называемые критерии оптимальности — необходимые и достаточные условия для того, чтобы некоторый обобщенный план задачи (1) — (3) был решением обобщенной задачи (1) — (3).

Приведем наиболее общую формулировку такого критерия. Пусть по-прежнему

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda(\Phi(x)), \quad t_{G_1}(\lambda) = \inf_{y \in G_1} \lambda(y).$$

Обозначим через  $X = \{x^{(k)}\}$  произвольный обобщенный план задачи (1) — (3), для которого  $f(X) < \infty$ .

**Теорема 2.** Для того чтобы  $X$  был решением обобщенной задачи (1) — (3), достаточно, а в случае соблюдения обобщенного соотношения двойственности (16) и необходимо существование последовательности функционалов  $\{\lambda^{(k)}\}$ ,  $\lambda^{(k)} \in G_1^*$ , такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) - \sup_{x \in G} F(x, \lambda^{(k)})] = 0, \quad (28)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda^{(k)}(\Phi(x^{(k)})) - t_{G_1}(\lambda^{(k)})] = 0. \quad (29)$$

**Доказательство.** 1) Достаточность. В силу (28) — (29)

$$F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \sup_{x \in G} F(x, \lambda^{(k)}) + \varepsilon_k' = \psi'(\lambda^{(k)}) + \varepsilon_k',$$

$$\lambda^{(k)}(\Phi(x^{(k)})) = t_{G_1}(\lambda^{(k)}) + \varepsilon_k'' = \psi''(\lambda^{(k)}) + \varepsilon_k'',$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k' = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k'' = 0.$$

Следовательно,

$$f(x^{(k)}) = F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) - \lambda^{(k)}(\Phi(x^{(k)})) = \psi'(\lambda^{(k)}) - \psi''(\lambda^{(k)}) + \varepsilon_k' - \varepsilon_k'' = \psi(\lambda^{(k)}) + \varepsilon_k,$$

где  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ , т. е.

$$f(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda^{(k)}). \quad (30)$$

Используя далее лемму 1, имеем

$$f(X) \leq \bar{v} \leq \tilde{v} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda^{(k)}). \quad (31)$$

Из (30) и (31), в частности, вытекает равенство

$$f(X) = \bar{v},$$

означающее, что  $X$  — решение обобщенной задачи (1) — (3).

2) Необходимость. Пусть  $X = \{x^{(k)}\}$  — решение обобщенной задачи (1) — (3),  $f(X) < \infty$ , причем задачи (1) — (3) и (25) — (27) связаны обобщенным соотношением двойственности. Поскольку  $X$  — обобщенный план задачи (1) — (3), имеет место соотношение

$$\Phi(x^{(k)}) = y_1^{(k)} + y_2^{(k)},$$

где  $y_1^{(k)} \in G_1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |y_2^{(k)}| = 0$ .

Пусть  $\{\bar{\lambda}^{(k)}\}$  — решение двойственной задачи (25) — (27). В таком случае

$$f(X) = \bar{v} = \tilde{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\bar{\lambda}^{(k)}). \quad (32)$$

Предварительно перейдем от последовательности  $\{\bar{\lambda}^{(k)}\}$  к новой последовательности  $\{\lambda^{(k)}\}$ , которая также будет являться решением двойствен-

ной задачи, но для которой, вместе с тем, соблюдается равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)}(y_2^{(k)}) = 0. \quad (33)$$

Для этого, задавшись произвольной последовательностью положительных чисел  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ , стремящихся к нулю, построим последовательность натуральных чисел  $k_1 < k_2 < \dots$ , руководствуясь следующим рекуррентным правилом.

а) Если число  $k_s$  уже определено, то в качестве  $k_{s+1}$  выбирается наименьшее из чисел  $k$ , удовлетворяющих условиям

$$k \geq k_s + 1, \quad |\bar{\lambda}_{s+1}(y_2^{(t)})| \leq \alpha_{s+1}, \quad t \geq k;$$

б)  $k_0 = 0$ .

Положим теперь для любого  $k \geq k_1$   $\lambda^{(k)} = \bar{\lambda}^{(s)}$ , если  $k_s \leq k \leq k_{s+1} - 1$ .

Поскольку при  $k \rightarrow \infty$  индекс  $s$ , определяемый условием:  $k_s \leq k \leq k_{s+1} - 1$ , также неограниченно возрастает, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \psi(\bar{\lambda}^{(s)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda^{(k)}) = \tilde{v},$$

т. е.  $\{\lambda^{(k)}\}$  является решением двойственной задачи.

Далее, при  $k_s \leq k \leq k_{s+1} - 1$

$$|\lambda^{(k)}(y_2^{(k)})| = |\bar{\lambda}^{(s)}(y_2^{(k)})| \leq \alpha_s, \quad s = 1, 2, \dots$$

Следовательно, имеет место равенство (33). Поскольку  $\tilde{v} < \infty$ , то  $\lambda^{(k)} \in G_1^*$  для  $k = 1, 2, \dots$ .

Имеем

$$f(x^{(k)}) = F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) - \lambda^{(k)}(\Phi(x^{(k)})) = F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) - \lambda^{(k)}(y_1^{(k)}) - \lambda^{(k)}(y_2^{(k)}).$$

Отсюда, используя (32) и (33), получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) - \lambda^{(k)}(y_1^{(k)})] = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\psi'(\lambda^{(k)}) - \psi''(\lambda^{(k)})]. \quad (34)$$

Заметим, что

$$F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) \leq \sup_{x \in G} F(x, \lambda^{(k)}) = \psi'(\lambda^{(k)}),$$

$$\lambda^{(k)}(y_1^{(k)}) \geq \inf_{y \in G_1} \lambda^{(k)}(y) = t_{G_1}(\lambda^{(k)}) = \psi''(\lambda^{(k)}).$$

Соотношение (34) с учетом последних двух неравенств приводит к искомым равенствам (28) и (29). Теорема доказана.

Предположим, что  $G_1$  — конус. Тогда  $t_{G_1}(\lambda) = 0$ , если  $\lambda \in G_1^*$ . Поэтому соотношения (28), (29) переходят, очевидно, соответственно в

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} F(x, \lambda^{(k)}), \quad (28')$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)}(\Phi(x^{(k)})) = 0. \quad (29')$$

7. Обобщенная теорема двойственности доказана нами в предположении выпуклости множества  $\bar{K}$ , являющегося замыканием множества

$$K = \{\hat{y} = (y_0, y) : y_0 = f(x) - y_0', y = \Phi(x) - y', x \in G, y_0' \geq 0, y' \in G_1\}. \quad (35)$$

В этом же предположении гарантируется необходимость условий критерия оптимальности, сформулированного в виде теоремы 2. Ниже рассматриваются два класса экстремальных задач, обладающих заведомо выпуклыми множествами  $\bar{K}$ .

Пусть  $G_1$  — выпуклый конус,  $G$  — выпуклое множество. Оператор  $\Phi(x)$ ,  $x \in G$ , будем называть *выпуклым вверх относительно  $G_1$* , если для любых  $x', x'' \in G$  и произвольного числа  $\alpha$ , принадлежащего  $[0, 1]$ ,

$$\Phi(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \geq \alpha \Phi(x') + (1 - \alpha)\Phi(x'') \quad (G_1).$$

Будем говорить, что (1) — (3) — *задача выпуклого программирования*, если помимо выпуклости множества  $G$  и конуса  $G_1$  максимизируемый функционал  $f$  и оператор ограничений  $\Phi$  являются соответственно выпуклым вверх функционалом и выпуклым вверх относительно  $G_1$  оператором.

Легко проверить, что множество  $\bar{K}$  задачи выпуклого программирования (1) — (3) всегда выпукло. Действительно, пусть  $\hat{y}' \in K$ ,  $\hat{y}'' \in K$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Имеем

$$y_0' \leq f(x'), y_0'' \leq f(x''), y' \leq \Phi(x') \quad (G_1), y'' \leq \Phi(x'') \quad (G_1),$$

где  $\hat{y}' = (y_0', y')$ ,  $\hat{y}'' = (y_0'', y'')$ ,  $x' \in G$ ,  $x'' \in G$ .

В силу предположений относительно  $f$ ,  $\Phi$  и  $G$

$$\begin{aligned} \alpha y_0' + (1 - \alpha)y_0'' &\leq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x'') \leq f(\alpha x' + (1 - \alpha)x''), \\ \alpha y' + (1 - \alpha)y'' &\leq \alpha \Phi(x') + (1 - \alpha)\Phi(x'') \leq \Phi(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \quad (G_1), \\ \alpha x' + (1 - \alpha)x'' &\in G, \text{ т. е. } \alpha \hat{y}' + (1 - \alpha)\hat{y}'' \in K. \end{aligned}$$

Следовательно,  $K$  — выпуклое множество, а значит, и его замыкание  $\bar{K}$  также является выпуклым множеством.

Таким образом, для задачи выпуклого программирования с непустым множеством обобщенных планов всегда выполняется обобщенное соотношение двойственности и поэтому условия (28), (29) критерия оптимальности являются не только достаточными, но и необходимыми (см. [2]).

8. Прежде чем ввести другой класс экстремальных задач типа (1) — (3), анализу которого посвящены последующие разделы работы, напомним одно из определений интеграла вектор-функции со значениями в банаховом пространстве. Пусть  $M$  — метрическое пространство,  $\alpha(\delta)$  — счетно-аддитивная неотрицательная функция (мера), определенная на  $\sigma$ -алгебре  $B_M$  борелевских подмножеств  $\delta \subset M$ .

Мера  $\alpha(\delta)$  и  $\sigma$ -алгебра  $B_M$  порождают совокупность  $B_M(\alpha) \supset B_M$  измеримых (в смысле  $\alpha$ ) подмножеств пространства  $M$ . Пусть  $T$  — измеримое подмножество  $M$ , причем  $\alpha(T) < \infty$ ,

$$B_T = \{\delta : \delta \in B_M, \delta \subset T\}, \quad B_T(\alpha) = \{\delta : \delta \in B_M(\alpha), \delta \subset T\}.$$

Пусть далее  $\varphi(t)$  — вектор-функция со значениями в банаховом пространстве  $E_1$ , определенная на  $T$ .

Условимся говорить, что функция  $\varphi(t)$  измерима по мере  $\alpha$ , если для любого шара  $C_\rho(y') = \{y : |y - y'| < \rho, y \in E_1\}$  пространства  $E_1$  множество

$$T(\rho, y') = \{t : \varphi(t) \in C_\rho(y'), t \in T\} \subset B_T(\alpha).$$

Предположим, что

$$\text{функция } \varphi(t) \text{ измерима по мере } \alpha, \quad (36)$$

$$\int_T |\varphi(t)| d\alpha < \infty. \quad (37)$$

Вектор-функцию  $\varphi(t)$ , удовлетворяющую условиям (36) и (37), будем называть суммируемой по мере  $\alpha$  на множестве  $T$ . Пусть  $E_1$  — сепарабельное пространство и  $y_1, y_2, \dots$  — счетное, всюду плотное множество элементов  $E_1$ . В таком случае при любом  $\varepsilon > 0$  объединение множеств  $T'(\varepsilon, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , совпадает с  $T$ . Определим рекуррентно множества  $T'(\varepsilon, y_i)$ :

$$T'(\varepsilon, y_i) = T(\varepsilon, y_i) - \bigcup_{h < i} T'(\varepsilon, y_h), \quad i = 2, 3, \dots$$

$$T'(\varepsilon, y_1) = T(\varepsilon, y_1).$$

Выбросив из системы множеств  $T'(\varepsilon, y_i)$  пустые множества и перенумеровав заново оставшиеся, приходим к последовательности множеств  $\{T_i(\varepsilon)\}$ , обладающей следующими свойствами:

$$T = \bigcup_i T_i(\varepsilon), \quad T_i(\varepsilon) \cap T_j(\varepsilon) = \emptyset, \quad i \neq j; \quad (38)$$

при любом  $i$  найдется элемент  $y_i' \in E_1$ , такой, что

$$|y_i' - \varphi(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in T_i(\varepsilon). \quad (39)$$

Пусть функция  $\varphi(t)$  со значениями в  $E_1$  суммируема по мере  $\alpha$  на  $T$ . В силу (36) множества  $T_i(\varepsilon)$  измеримы и согласно (38)

$$\alpha(T) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(T_h(\varepsilon)). \quad (40)$$

Из (40) и конечности  $\alpha(T)$  вытекает, что

$$\alpha(Q_i(\varepsilon)) = \alpha\left(\bigcup_{h > i} T_h(\varepsilon)\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty$$

Поэтому (37) гарантирует для любого  $\varepsilon > 0$  существование такого натурального числа  $N(\varepsilon)$ , что при  $Q(\varepsilon) = Q_i(\varepsilon)$ ,  $i = N(\varepsilon)$

$$\int_{Q(\varepsilon)} |\varphi(t)| d\alpha \leq \varepsilon. \quad (41)$$

Итак, при произвольном  $\varepsilon > 0$  множество  $T$  может быть разбито на непересекающиеся измеримые подмножества  $T_i(\varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ ,  $Q(\varepsilon)$ , удовлетворяющие условиям (39) и (41).

Пусть

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} y_i', & t \in T_i(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon); \\ 0, & t \in Q(\varepsilon). \end{cases}$$

По определению

$$\int_T \varphi_\varepsilon(t) d\alpha = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} y_i' \alpha(T_i(\varepsilon)); \quad \int_T \varphi(t) d\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_T \varphi_\varepsilon(t) d\alpha$$

(существование последнего предела вне зависимости от способа разбиения  $T$  вытекает из соотношений (39) и (41)).

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы сформулировать задачу.

Пусть  $T$  — измеримое ограниченное подмножество метрического пространства  $M$  с мерой  $\alpha$ ,  $\alpha(T) < \infty$ . Пусть далее для любого  $t \in T$  заданы множество  $G(t)$ , вещественный функционал  $f_t(x)$ , определенный на  $G(t)$ , оператор  $\Phi_t(x)$ , действующий из  $G(t)$  в сепарабельное банахово пространство  $E_1$ .

Рассмотрим задачу

$$\int_{t \in T} f_t(x_t) d\alpha \rightarrow \sup, \quad (42)$$

$$\int_{t \in T} \Phi_t(x_t) d\alpha \in G_1, \quad (43)$$

$$x_t \in G(t), \quad t \in T, \quad (44)$$

где  $G_1$  — выпуклое подмножество  $E_1$ .

Обозначим через  $E$  множество функций  $x_t, t \in T$ , таких, что функции  $f_t(x_t)$  и  $\Phi_t(x_t)$  суммируемы по мере  $\alpha$  на множестве  $T$ . Очевидно, (42) — (44) является задачей типа (1) — (3), в которой  $G$  — подмножество элементов  $E$ , удовлетворяющих условию (44) (оно предполагается непустым),

$$f(x) = \int_{t \in T} f_t(x_t) d\alpha, \quad \Phi(x) = \int_{t \in T} \Phi_t(x_t) d\alpha,$$

где  $x \in G \subset E$ .

В соответствии с общей схемой (25) — (27) задача, двойственная к задаче (44) — (46), состоит в минимизации функции  $\psi(\lambda) = \psi'(\lambda) - \psi''(\lambda)$  при условии (26), где

$$\psi'(\lambda) = \sup_{x \in G} \int_{t \in T} [f_t(x_t) + \lambda(\Phi_t(x_t))] d\alpha, \quad \psi''(\lambda) = \inf_{y \in G_1} \lambda(y).$$

Сохраним прежний смысл за обозначениями  $R, \bar{R}, v, \bar{v}$  и  $\tilde{v}$ . Нашей целью является установление выпуклости множества  $\bar{K}$  (замыкания множества  $K$ , определяемого соотношением (35)).

9. Конечномерный случай задачи (44) — (46), когда все  $G_t, t \in T$ , — подмножества  $n$ -мерного пространства, а  $E_1$  —  $m$ -мерное пространство, подробно изучен в работе В. И. Аркина [3]. В работе [3], в частности, получен результат, эквивалентный теореме двойственности для конечномерной задачи (42) — (44) ( $v = \tilde{v}$ ).

Основной момент доказательства этого факта, предложенного в [3], состоит в установлении выпуклости множества  $K$ , что в свою очередь является простым следствием одной теоремы А. А. Ляпунова [4]. Поскольку в дальнейшем нам понадобится некоторая модификация этой теоремы, приведем ее формулировку применительно к функции, заданной на  $[0, 1]$ .

Пусть  $\varphi(t)$  — точка  $m$ -мерного пространства при любом  $t \in [0, 1]$ .  $\varphi(t)$  — суммируемая на  $[0, 1]$  функция по мере, совпадающей с обычной длиной;  $B_1$  — полная система борелевских подмножеств отрезка  $[0, 1]$ . В таком случае множество

$$P = \left\{ p : p = \int_{t \in \delta} \varphi(t) dt, \quad \delta \in B_1 \right\}$$

является выпуклым и замкнутым.

Сформулированное утверждение, вообще говоря, перестает быть верным, если  $\varphi(t)$  — вектор-функция со значениями в банаховском пространстве. Тем не менее, как мы сейчас покажем, выпуклость замыкания  $P$  может быть гарантирована и в этом, более общем случае.

Будем говорить, что введенная выше мера  $\alpha$  обладает свойством (\*), если  $\gamma(\rho) = \alpha(c_\rho)$  — непрерывная функция  $\rho$ , где  $c_\rho = \{t : \rho(t, t_0) < \rho\}$ ,

$t \in M$ ,  $t_0$  — некоторая фиксированная точка  $M$ . Пусть по-прежнему  $T$  — ограниченное измеримое подмножество  $M$ ,  $\alpha(T) < \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi(t)$  — суммируемая по мере  $\alpha$  на множестве  $T$  вектор-функция со значениями в сепарабельном банаховом пространстве  $E_1$ , мера  $\alpha$  обладает свойством (\*). В таком случае замыкание  $\bar{P}$  множества

$$P = \left\{ p : p = \int_{\delta} \varphi(t) d\alpha, \quad \delta \in B_T \right\}$$

выпукло

**Доказательство.** 1) Предположим вначале, что  $\varphi(t)$  принимает конечное число значений, т. е. множество  $T$  с точностью до множества с нулевой мерой представимо в виде суммы таких непересекающихся множеств  $T_i \in B_T$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , что  $\varphi(t) = p_i$ , если  $t \in T_i$ .

Покажем, что в этом случае  $P$  — выпуклое множество. Имеем

$$P = \left\{ p : p = \sum_{i=1}^N \alpha(\delta \cap T_i) p_i, \quad \delta \in B_T \right\}.$$

Очевидно, при любом  $\delta \in B_T$

$$0 \leq \alpha(\delta \cap T_i) \leq \bar{\alpha}_i = \alpha(T_i). \quad (45)$$

Из свойства (\*) вытекает, что  $\alpha(c_p \cap T_i) = \gamma_i(\rho)$  — непрерывная функция  $\rho$ , причем  $\gamma_i(0) = 0$ ,  $\gamma_i(\rho) = \bar{\alpha}_i$ , если  $T_i \subset c_p$ . Поэтому для любого  $\alpha_i \in [0, \bar{\alpha}_i]$  найдется такое множество

$$T_i^{(\alpha)} = c_p(\alpha) \cap T_i \in B_T, \text{ что } \alpha(T_i^{(\alpha)}) = \alpha_i.$$

Положим  $S^{(\alpha)} = \bigcup_{i=1}^N T_i^{(\alpha)}$ . Итак, для любых  $\alpha_i \in [0, \bar{\alpha}_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

существует такое множество  $S^{(\alpha)} \in B_T$ , что

$$\alpha(S^{(\alpha)} \cap T_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (46)$$

Соотношения (45) и (46) позволяют представить  $P$  в следующем эквивалентном виде

$$P = \left\{ p : p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i, \quad 0 \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \right\},$$

из которого непосредственно следует выпуклость этого множества.

2) Обратимся теперь к общему случаю. Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Представим множество  $T$  в виде объединения непересекающихся борелевских множеств  $T_i(\varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ ,  $Q(\varepsilon)$ , удовлетворяющих условиям (39) и (41) и множества  $T_0(\varepsilon)$ ,  $\alpha(T_0(\varepsilon)) = 0$ .

Положим

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} y_i', & t \in T_i(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon), \\ 0, & t \in T_0(\varepsilon) \cup Q(\varepsilon). \end{cases}$$

Из (39) и (41) получаем при любом  $\delta \in B_T$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta} \varphi(t) d\alpha - \int_{\delta} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha \right| \leq \\ & \leq \int_{Q(\varepsilon) \cap \delta} |\varphi(t)| d\alpha + \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int_{T_i(\varepsilon) \cap \delta} |\varphi(t) - \varphi_\varepsilon(t)| d\alpha \leq \varepsilon(1 + \alpha(T)). \end{aligned} \quad (47)$$

Рассмотрим две произвольные точки  $p'$  и  $p''$ , принадлежащие  $\bar{P}$ . Зафиксировав  $\varepsilon > 0$ , выберем такие множества  $\delta'(\varepsilon)$  и  $\delta''(\varepsilon)$  из  $B_T$ , что

$$\left| p' - \int_{\delta'(\varepsilon)} \varphi(t) d\alpha \right| \leq \varepsilon, \quad \left| p'' - \int_{\delta''(\varepsilon)} \varphi(t) d\alpha \right| \leq \varepsilon. \quad (48)$$

Согласно первой части доказательства леммы для любого  $\mu, 0 < \mu < 1$ , существует множество  $\delta(\varepsilon, \mu) \in B_T$ , при котором

$$\mu \int_{\delta'(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha + (1 - \mu) \int_{\delta''(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha = \int_{\delta(\varepsilon, \mu)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha. \quad (49)$$

Учитывая (47), (48) и (49), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \mu p' + (1 - \mu) p'' - \int_{\delta(\varepsilon, \mu)} \varphi(t) d\alpha \right| \leq \left| \mu p' + (1 - \mu) p'' - \right. \\ & \quad \left. - \mu \int_{\delta'(\varepsilon)} \varphi(t) d\alpha - (1 - \mu) \int_{\delta''(\varepsilon)} \varphi(t) d\alpha \right| + \left| \mu \int_{\delta'(\varepsilon)} \varphi(t) d\alpha + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \mu) \int_{\delta''(\varepsilon)} \varphi(t) d\alpha - \mu \int_{\delta'(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha - (1 - \mu) \int_{\delta''(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha \right| + \\ & \quad \left| \mu \int_{\delta'(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha + (1 - \mu) \int_{\delta''(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha - \int_{\delta(\varepsilon, \mu)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha \right| + \\ & \quad \left| \int_{\delta(\varepsilon, \mu)} \varphi_\varepsilon(t) d\alpha - \int_{\delta(\varepsilon, \mu)} \varphi(t) d\alpha \right| \leq \\ & \leq \varepsilon + 2\varepsilon(1 + \alpha(T)) = \varepsilon(3 + 2\alpha(T)). \end{aligned} \quad (50)$$

Из (50) и произвольности  $\varepsilon > 0$  вытекает, что точка  $\mu p' + (1 - \mu) p'' \in \bar{P}$ . Следовательно,  $\bar{P}$  — выпуклое множество. Лемма доказана.

10. Лемма 2 позволяет установить выпуклость множества  $\bar{K}$  задачи (44) — (46), если мера  $\alpha$  обладает свойством (\*). Обозначим через  $\hat{\Phi}_t(x)$  оператор  $(f_t(x), \Phi_t(x))$  из  $G_t$  в  $\hat{E}_1 = L \times E_1$  и положим  $\hat{G}_1 = \{\hat{y} = (y_0, y) : y_0 \geq 0, y \in G_1\}$ .

В таком случае

$$K = \left\{ \hat{y} : \hat{y} = \hat{\Phi}(x) - \hat{y}' = \int_T \hat{\Phi}_t(x_t) d\alpha - \hat{y}', x \in G, \hat{y}' \in \hat{G}_1 \right\}.$$

Пусть  $\hat{y}_1$  и  $\hat{y}_2$  — произвольные точки  $\bar{K}$  и число  $\mu$  расположено в  $(0, 1)$ . Покажем, что

$$y_\mu = \mu y_1 + (1 - \mu) y_2 \in \bar{K}. \quad (51)$$

Задавшись  $\varepsilon > 0$ , выберем  $x^{(i)}(\varepsilon) \in G$  и  $\hat{y}_i'(\varepsilon) \in \hat{G}_1$  таким образом, чтобы элемент

$$\hat{y}_i(\varepsilon) = \int_T \Phi_t(x_t^{(i)}(\varepsilon)) d\alpha - \hat{y}_i'(\varepsilon) \in K$$

отличался по норме от  $\hat{y}_i$  не более чем на  $\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим множества

$$Y = \left\{ \hat{y} : \hat{y} = \int_{\delta} \Phi_t(x_t^{(1)}(\varepsilon)) d\alpha + \int_{T-\delta} \Phi_t(x_t^{(2)}(\varepsilon)) d\alpha, \quad \delta \in B_T \right\},$$

$$Y' = \left\{ \hat{y} : \hat{y} = \int_{\delta} [\Phi_t(x_t^{(1)}(\varepsilon)) - \Phi_t(x_t^{(2)}(\varepsilon))] d\alpha, \quad \delta \in B_T \right\}.$$

Очевидно,  $\hat{y}_1(\varepsilon) + \hat{y}_1'(\varepsilon) \in Y$ ,  $\hat{y}_2(\varepsilon) + \hat{y}_2'(\varepsilon) \in Y$ .

Далее, в силу леммы 2 замыкание  $\bar{Y}'$  множества  $Y'$  выпукло, и так как множество  $Y$  образуется из  $Y'$  сдвигом на фиксированный элемент  $y_2(\varepsilon) + y_2'(\varepsilon)$ , то замыкание  $\bar{Y}$  множества  $Y$  также выпукло. Следовательно, найдется такой элемент

$$\hat{y}_\mu(\varepsilon) = \int_{\delta(\mu)} \Phi_t(x_t^{(1)}(\varepsilon)) d\alpha + \int_{T-\delta(\mu)} \Phi_t(x_t^{(2)}(\varepsilon)) d\alpha \in Y,$$

что

$$|\mu(y_1(\varepsilon) + y_1'(\varepsilon)) + (1 - \mu)(y_2(\varepsilon) + y_2'(\varepsilon)) - \hat{y}_\mu(\varepsilon)| \leq \varepsilon. \quad (52)$$

Положив

$$\hat{y}_\mu'(\varepsilon) = \mu \hat{y}_1'(\varepsilon) + (1 - \mu) \hat{y}_2'(\varepsilon) \in \hat{G}_1,$$

из (52) получаем

$$|\hat{y}_\mu - (\hat{y}_\mu(\varepsilon) - \hat{y}_\mu'(\varepsilon))| \leq |\hat{y}_\mu - \mu \hat{y}_1(\varepsilon) - (1 - \mu) \hat{y}_2(\varepsilon)| + \\ + |\mu \hat{y}_1(\varepsilon) + (1 - \mu) \hat{y}_2(\varepsilon) - (\hat{y}_\mu(\varepsilon) - \hat{y}_\mu'(\varepsilon))| \leq 2\varepsilon. \quad (53)$$

Но согласно построению  $\hat{y}_\mu(\varepsilon) - \hat{y}_\mu'(\varepsilon) \in K$ .

Поэтому неравенство (53), в котором  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, убеждает нас в справедливости равенства (51). Таким образом, выпуклость множества  $\bar{K}$  установлена. Из полученного результата и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть для задачи (42) — (44) множество  $G_1$  выпукло, мера  $\alpha$  удовлетворяет условию (\*) и множество  $\bar{R}$  обобщенных планов непусто. В таком случае  $\bar{v} = \check{v}$ , т. е. верхняя грань в обобщенной задаче (42) — (44) совпадает с нижней гранью в соответствующей двойственной задаче.

Очевидно, при соблюдении предположений теоремы 3 для задачи (42) — (44) имеет место также критерий оптимальности обобщенного плана, сформулированный в общем виде в теореме 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого программирования, Экономика и математические методы, 1965, т. I, вып. 3.
2. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого и дробно-выпуклого программирования в функциональных пространствах. ДАН СССР, 1967, т. 172, вып. 5.
3. В. И. Аркин. О бесконечномерном аналоге задачи невыпуклого программирования. Кибернетика, 1967, вып. 2.
4. А. А. Ляпунов. О вполне аддитивных вектор-функциях. Известия АН СССР. Серия математическая, 1940, т. 4, вып. 6.

Поступила в редакцию  
15 III 1968

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. А. ВОТЯКОВ

(Москва)

### ВВЕДЕНИЕ

Метод отсеечения рассматривался рядом авторов (см. обзор [1]). В данной статье излагаются некоторые принципы, применимые как к линейному, так и к нелинейному случаям, позволяющие выделить класс конечных алгоритмов, основанных на групповом отсечении.

Одной из наиболее простых идей отыскания целочисленного решения задачи линейного программирования по известному непрерывному решению является идея округления непрерывного решения.

Округлением  $x_0$  естественно считать всякую точку с координатами  $[(x_0)_i]$  или  $[(x_0)_i] + 1$  (если  $\{(x_0)_i\} \neq 0$ ), где  $[a]$  и  $\{a\}$  соответственно целая и дробная части числа  $a$ . Будем называть округление  $y$  вектора  $x_0$  допустимым относительно  $M$ , если справедливо соотношение  $\{x \in M | x_i \geq y_i\} \neq \emptyset$ .

Из этого определения следует, что множество допустимых округлений вектора  $x_0 \in M$  непусто. Оно, в частности, содержит точку с координатами  $[(x_0)_i]$ .

Рассмотрим класс линейных задач, в которых допустимое округление непрерывного решения единственно. Этот случай имеет место в задачах вида

$$\max_{x \in M} (c, x), \quad M = \{x \in R^n | Ax \leq Ax_0, Bx \leq Bx_0 + \delta\},$$

причем оптимум достигается в точке  $x_0$ ;  $A$  — невырожденная матрица порядка  $n$ ,  $(A^{-1})_{ij} \geq 0$ ;  $B$  — произвольная матрица размера  $(m-n) \times n$ ,  $\delta \in R^{m-n}$ ,  $\delta \geq 0$ .

В силу  $(A^{-1})_{ij} \geq 0$  справедливы соотношения  $\max_{x \in M} x_i = (x_0)_i$  ( $i \in 1, 2, \dots, n$ ); отсюда следует, что округление вектора  $x_0$ , допустимое относительно  $M$ , единственно и совпадает с  $[(x_0)_1], \dots, [(x_0)_n] = [x_0]$ . Пусть  $M$  — множество решений некоторой системы линейных неравенств и  $\max_{x \in M} (c, x) = (c, x_1)$ ,  $x_1 \in M$ . Множество  $I_1 = \{i \in 1, 2, \dots, n | \max_{x \in M} (x)_i = (x_1)_i\}$  назовем множеством индексов округления. Положим

$$M_1 = \{x \in M | (x)_i \leq [(x_1)_i], i \in I_1\}.$$