

Рассмотрим множества

$$Y = \left\{ \hat{y} : \hat{y} = \int_{\delta} \Phi_l(x_l^{(1)}(\varepsilon)) d\alpha + \int_{T-\delta} \Phi_l(x_l^{(2)}(\varepsilon)) d\alpha, \quad \delta \in B_T \right\},$$

$$Y' = \left\{ \hat{y} : \hat{y} = \int_{\delta} [\Phi_l(x_l^{(1)}(\varepsilon)) - \Phi_l(x_l^{(2)}(\varepsilon))] d\alpha, \quad \delta \in B_T \right\}.$$

Очевидно, $\hat{y}_1(\varepsilon) + \hat{y}_1'(\varepsilon) \in Y$, $\hat{y}_2(\varepsilon) + \hat{y}_2'(\varepsilon) \in Y$.

Далее, в силу леммы 2 замыкание $\bar{Y}'$ множества Y' выпукло, и так как множество Y образуется из Y' сдвигом на фиксированный элемент $y_2(\varepsilon) + y_2'(\varepsilon)$, то замыкание $\bar{Y}$ множества Y также выпукло. Следовательно, найдется такой элемент

$$\hat{y}_\mu(\varepsilon) = \int_{\delta(\mu)} \Phi_l(x_l^{(1)}(\varepsilon)) d\alpha + \int_{T-\delta(\mu)} \Phi_l(x_l^{(2)}(\varepsilon)) d\alpha \in Y,$$

что

$$|\mu(y_1(\varepsilon) + y_1'(\varepsilon)) + (1 - \mu)(y_2(\varepsilon) + y_2'(\varepsilon)) - \hat{y}_\mu(\varepsilon)| \leq \varepsilon. \quad (52)$$

Положив

$$\hat{y}_\mu'(\varepsilon) = \mu \hat{y}_1'(\varepsilon) + (1 - \mu) \hat{y}_2'(\varepsilon) \in \hat{G}_1,$$

из (52) получаем

$$\begin{aligned} |\hat{y}_\mu - (\hat{y}_\mu(\varepsilon) - \hat{y}_\mu'(\varepsilon))| &\leq |\hat{y}_\mu - \mu \hat{y}_1(\varepsilon) - (1 - \mu) \hat{y}_2(\varepsilon)| + \\ &+ |\mu \hat{y}_1(\varepsilon) + (1 - \mu) \hat{y}_2(\varepsilon) - (\hat{y}_\mu(\varepsilon) - \hat{y}_\mu'(\varepsilon))| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (53)$$

Но согласно построению $\hat{y}_\mu(\varepsilon) - \hat{y}_\mu'(\varepsilon) \in K$.

Поэтому неравенство (53), в котором ε — произвольное положительное число, убеждает нас в справедливости равенства (51). Таким образом, выпуклость множества $\bar{K}$ установлена. Из полученного результата и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть для задачи (42) — (44) множество G_1 выпукло, мера α удовлетворяет условию (*) и множество $\bar{R}$ обобщенных планов непусто. В таком случае $\bar{v} = \tilde{v}$, т. е. верхняя грань в обобщенной задаче (42) — (44) совпадает с нижней гранью в соответствующей двойственной задаче.

Очевидно, при соблюдении предположений теоремы 3 для задачи (42) — (44) имеет место также критерий оптимальности обобщенного плана, сформулированный в общем виде в теореме 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого программирования, Экономика и математические методы, 1965, т. I, вып. 3.
2. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого и дробно-выпуклого программирования в функциональных пространствах. ДАН СССР, 1967, т. 172, вып. 5.
3. В. И. Аркин. О бесконечномерном аналоге задачи невыпуклого программирования. Кибернетика, 1967, вып. 2.
4. А. А. Ляпунов. О вполне аддитивных вектор-функциях. Известия АН СССР. Серия математическая, 1940, т. 4, вып. 6.

Поступила в редакцию
15 III 1968

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. А. ВОТЯКОВ

(Москва)

ВВЕДЕНИЕ

Метод отсечения рассматривался рядом авторов (см. обзор [1]). В данной статье излагаются некоторые принципы, применимые как к линейному, так и к нелинейному случаям, позволяющие выделить класс конечных алгоритмов, основанных на групповом отсечении.

Одной из наиболее простых идей отыскания целочисленного решения задачи линейного программирования по известному непрерывному решению является идея округления непрерывного решения.

Округлением x_0 естественно считать всякую точку с координатами $[(x_0)_i]$ или $[(x_0)_i] + 1$ (если $\{(x_0)_i\} \neq 0$), где $[a]$ и $\{a\}$ соответственно целая и дробная части числа a . Будем называть округление y вектора x_0 допустимым относительно M , если справедливо соотношение $\{x \in M | x_i \geq y_i\} \neq \emptyset$.

Из этого определения следует, что множество допустимых округлений вектора $x_0 \in M$ непусто. Оно, в частности, содержит точку с координатами $[(x_0)_i]$.

Рассмотрим класс линейных задач, в которых допустимое округление непрерывного решения единственно. Этот случай имеет место в задачах вида

$$\max_{x \in M} (c, x), \quad M = \{x \in R^n | Ax \leq Ax_0, Bx \leq Bx_0 + \delta\},$$

причем оптимум достигается в точке x_0 ; A — невырожденная матрица порядка n , $(A^{-1})_{ij} \geq 0$; B — произвольная матрица размера $(m-n) \times n$, $\delta \in R^{m-n}$, $\delta \geq 0$.

В силу $(A^{-1})_{ij} \geq 0$ справедливы соотношения $\max_{x \in M} x_i = (x_0)_i$ ($i \in 1, 2, \dots, n$); отсюда следует, что округление вектора x_0 , допустимое относительно M , единственно и совпадает с $([(x_0)_1], \dots, [(x_0)_n]) = [x_0]$. Пусть M — множество решений некоторой системы линейных неравенств и $\max_{x \in M} (c, x) = (c, x_1)$, $x_1 \in M$. Множество $I_1 = \{i \in 1, 2, \dots, n | \max_{x \in M} (x)_i = (x_1)_i\}$ назовем множеством индексов округления. Положим

$$M_1 = \{x \in M | (x)_i \leq [(x_1)_i], i \in I_1\}.$$

Пусть уже построено непустое множество $M_t \neq M_{t-1}$, $x_{t+1} \in M_t$. Положим

$$I_{t+1} = \{i \in \overline{1, n} \mid \max_{x \in M_t} (x)_i = (x_{t+1})_i\},$$

$$M_{t+1} = \{x \in M_t \mid x_i \leq [(x_{t+1})_i], i \in I_{t+1}\},$$

x_{t+2} определяется из соотношения $\max_{x \in M_{t+1}} (c, x) = (c, x_{t+2})$. Переход от M_t

к M_{t+1} назовем итерацией усеживания множества M , если $M_t \neq M_{t+1}$. Если на некоторой итерации $t = T$ множество $M_T = \emptyset$, то исходная задача целочисленных решений не имеет. Если $M_T = M_{T+1} \neq \emptyset$, то процедура усеживания завершена. $x_{T+1} \in M_T$ будет частично округленным решением непрерывного решения x_0 .

В некоторых задачах все компоненты вектора x_T могут оказаться целочисленными, в этом случае x_T — целочисленное решение задачи.

1. УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторый фиксированный базис R^n . Обозначим через $[x]$, $x \in R^n$, вектор, удовлетворяющий соотношениям $(e_i, [x]) = [(e_i, x)]$, $i \in \overline{1, 2, \dots, n}$, т. е. $[x] = \sum [(x, e_i)] \mu_i$ ($(e_j, \mu_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера). Если $M \in R^n$, то положим

$$[M] = \{x \in M \mid x = [x]\}.$$

Рассмотрим L_z^l — множество матриц линейных преобразований пространства R^l , связанных с базисом $\{e_i\}$ и переводящих $[R^l]$ на $[R^l]$.

Лемма 1. Матрица $A = (a_{ij})$ порядка l в том и только том случае принадлежит L_z^l , когда $a_{ij} = [a_{ij}]$, $|A| = \pm 1$.

Доказательство. Пусть $A \in L_z^l$ и $\tilde{A}$ соответствующее матрице A преобразование. Так как, очевидно, $\mu_i \in [R^l]$, то $\mu_i \tilde{A} \in [R^l]$; поэтому

$$[(\mu_i \tilde{A}, e_j)] = (\mu_i \tilde{A}, e_j) = (\mu_i, \tilde{A}^* e_j) = \left(\mu_i, \sum_k a_{kj} e_k \right) = a_{ij};$$

следовательно, $|A|$ — целое число. Из того, что $[R^l]$ содержит базис μ_i ($i \in \overline{1, 2, \dots, l}$), вытекает невырожденность преобразования $\tilde{A}$ и, следовательно, $|A| \neq 0$. Очевидно, $A^{-1} \in L_z^l$, поэтому $|A^{-1}|$ — целое число. Требуемое соотношение $|A| = \pm 1$ вытекает из равенства $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Необходимость доказана. Достаточность очевидна.

Следствие 1. Если $A \in L_z^l$, то $A^T \in L_z^l$; если $\{A, B\} \subset L_z^l$, то $AB \in L_z^l$; здесь A^T — транспонированная матрица.

Доказательство очевидно.

В литературе целочисленные линейные преобразования с определителем, равным ± 1 , называются унимодулярными. Для дальнейшего полезно отметить простое свойство унимодулярных преобразований.

Лемма 2. Если $B \in L_z^l$, A — целочисленная матрица размера $p \times l$ ранга p , $p \leq l$, то общий наибольший делитель максимальных миноров матрицы A равен общему наибольшему делителю максимальных миноров матрицы AB .

Доказательство. Если B — произвольная невырожденная целочисленная матрица, то общий наибольший делитель максимальных миноров матрицы AB не меньше ОНД максимальных миноров матрицы A (каждый максимальный минор матрицы AB равен алгебраической сумме некоторого

числа максимальных миноров матрицы A). Если $B \in L_z^l$, то B^{-1} — целочисленна. Следовательно, в этом случае ОНД максимальных миноров матрицы $A = (AB)B^{-1}$ не меньше ОНД максимальных миноров матрицы AB . Следовательно, лемма верна.

Теорема 1*. Целочисленная матрица A размера $m \times l$, $m \leq l$ является подматрицей некоторой унимодулярной матрицы размера $l \times l$ тогда и только тогда, когда общий наибольший делитель максимальных миноров матрицы A равен 1.

Частным случаем этой теоремы является следующая лемма.

Лемма 3. Если общий наибольший делитель последовательности целых чисел p_j ($j \in 1, 2, \dots, l$) равен 1, то существует унимодулярная матрица C , что $c_{1j} = p_j$ ($j \in 1, 2, \dots, l$).

Доказательство. Среди чисел $|p_j|$ существует наименьшее отличное от нуля $|p_k|$; тогда для $j \in 1, 2, \dots, l$ $p_j = g_j p_k + p_j^1$, причем $|p_j^1| \leq |p_k|/2$. Обозначим через n — вектор с компонентами p_j , через n^1 — вектор с компонентами p_j^1 ($j \neq k$) и $p_k^1 = p_k$; через B_1 матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E_{k-1} & & 0 \\ q_1 \dots q_{k-1} & q_k & q_{k+1} \dots q_l \\ 0 & & E_{l-k} \end{array} \right)$$

(повсюду в дальнейшем под E_s понимается единичная матрица порядка s). Матрица B_1 унимодулярна, так как $q_k = 1$. Как легко проверить, справедливо соотношение $n = n^1 B_1$. Кроме того, ОНД $\{n_1^1, \dots, n_l^1\} = 1$. Дальнейшие аналогичные рассуждения приводят к $n = n^2 B_2 B_1 = n^3 B_3 B_2 B_1$, где B_i — унимодулярная матрица. Процесс завершится на некотором шаге s , причем n_s — некоторый единичный координатный вектор, $B_s B_{s-1} \dots B_1$ — искомая матрица. Лемма доказана.

Доказательство теоремы проведем индукцией по числу строк матрицы A . Согласно предыдущей лемме, теорема справедлива при $m = 1$. Предположив ее справедливость при $m < p$, докажем для $m = p$. Общий наибольший делитель элементов первой строки равен 1, поэтому существует унимодулярная матрица, переводящая $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l})$ в $(1, 0, \dots, 0)$. Матрица AB_1 имеет в качестве первой строки $(1, 0, \dots, 0)$. Согласно лемме 2 общие наибольшие делители максимальных миноров матриц AB_1 и A равны, но для матрицы AB_1 общий наибольший делитель максимальных миноров равен общему наибольшему делителю максимальных миноров подматрицы, образованной последними $m - 1$ -ми строками и последними $l - 1$ -ми столбцами. Согласно индуктивному предположению, эта подматрица матрицы AB_1 является подматрицей некоторой унимодулярной матрицы C_1 порядка $l - 1$.

Матрица

$$B_2 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ (AB_1)_{21} \\ \vdots \\ (AB_1)_{m1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ C_1 \end{matrix} \end{array} \right)$$

* Аналогичный результат см. в работе [2].

унимодулярна, причем AB_1 является подматрицей матрицы B_2 . Следовательно, A является подматрицей матрицы $B_2B_1^{-1}$. Достаточность доказана. Необходимость следует из леммы 2.

Основой дальнейших построений является следующая теорема.

Теорема 2. Для любой невырожденной матрицы A существует матрица C с неотрицательными элементами $c_{ij} \geq 0$, что CA — унимодулярна.

Доказательство. Так как A невырождена, то достаточно доказать существование унимодулярной матрицы B такой, что $(BA^{-1})_{ij} \geq 0$. Докажем это. Во-первых, рассмотрим случай, когда матрица A^{-1} содержит строку со строго положительными элементами. Не теряя общности, можно считать ее первой. В этом случае существуют достаточно большие целые n_i , для которых $A_i^{-1} + n_i A_i^{-1} \geq 0$ ($i \in 2, 3, \dots, l$) и матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_2 & \\ \vdots & E_{l-1} \\ n_l & \end{pmatrix}$$

— одна из искомым.

Общий случай легко сводится к этому. Действительно, ввиду невырожденности A^{-1} существуют такие рациональные p_i , что вектор

$\sum_{i=1}^l p_i (A^{-1})_{i\cdot} > 0$ и, следовательно, существуют целые n_i с ОНД

$\{n_1, \dots, n_l\} = 1$, что $\sum_{i=1}^l n_i (A^{-1})_{i\cdot} > 0$. Согласно лемме 3 существует унимодулярная матрица B_1 , первая строка которой состоит из чисел n_i .

Легко проверить, что первая строка матрицы $B_1 A^{-1}$ равна $\sum_{i=1}^l n_i (A^{-1})_{i\cdot}$.

Теорема доказана полностью.

Следствие 2. Задача линейного целочисленного программирования $\max (c, x)$, $M = \{x \in R^n | Ax \leq b, r(A) = n\}$, приводима к виду, допускающему единственное округление непрерывного решения.

Доказательство. Пусть x_0 — одна из вершин, в которой достигается максимум. Исходная задача может быть записана в виде $\max (c, x)$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} A_1 x &\leq A_1 x_0, \\ B_1 x &\leq B_1 x_0 + \delta, \\ x &= [x], \end{aligned}$$

где $\delta \geq 0$, $c = \sum_{i=1}^n \lambda_i (A_1)_{i\cdot}$, $\lambda \geq 0$. Матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_1 x_0 \\ B_1 & B_1 x_0 + \delta \end{pmatrix}$$

отличается от матрицы $(A|b)$ только порядком строк. По теореме 2 существует унимодулярная матрица B такая, что $(BA_1^{-1}) \geq 0$. Легко проверить

эквивалентность следующих задач:

$$I \max (c, x) \quad \text{при} \quad A_1 x \leq A_1 x_0,$$

$$B_1 x \leq B_1 x_0 + \delta,$$

$$x = [x],$$

$$\delta_i \geq 0.$$

$$II \max (cB^*, y) \quad \text{при}$$

$$(A_1 B^{-1}) y \leq (A_1 B^{-1}) y_0, \quad (B_1 B^{-1}) y \leq (B_1 B^{-1}) y_0 + \delta,$$

$$y = [y], \quad \delta_i \geq 0, \quad \text{где } y = Bx, \quad B^* = (B^{-1})^T.$$

Задача II имеет вид, допускающий единственное округление в y_0 , так как $y_0 = Bx_0$ — непрерывное решение задачи II и $((A_1 B^{-1})^{-1})_{ij} = (BA_1^{-1})_{ij} \geq 0$. Следствие доказано.

2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ (ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ)

Рассмотрим задачу III:

$$\max (c, x)$$

при условиях

$$Ax \leq b,$$

вектор Bx — целочисленный; здесь A — матрица размера $m \times n$; B — матрица размера $p \times n$, $x \in R^n$. Такая постановка обобщает обычную задачу целочисленного линейного программирования. Как обычно, обозначим через M множество решений системы $Ax \leq b$ и пусть $\max (c, x) = (c, x_0)$; $x_0 \in M$. Будем говорить, что задача имеет вид, удобный для полного округления, если при всех $i \in 1, 2, \dots, p$ выполняются соотношения

$$\max_{x \in M} (B_{i.}, x) = (B_{i.}, x_0).$$

Будем говорить, что задача неприводима в x_0 к виду, удобному для полного округления, если

$$\{V \in L_2^p \mid \max_{x \in M} ((VB)_{i.}, x) = ((VB)_{i.}, x_0); i \in 1, 2, \dots, p\} = \emptyset.$$

Представим M в виде

$$A_1 x \leq A_1 x_0, \quad B_1 x \leq B_1 x_0 + \delta, \quad \delta > 0 \quad (1)$$

(так что $c = \sum_{i=1}^n \lambda_i (A_1)_{i.}$, $\lambda_i \geq 0$ и матрица

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_1 x_0 \\ \hline B_1 & B_1 x_0 + \delta \end{array} \right)$$

отличается от $(A|b)$ только порядком строк). Будем предполагать матрицу A_1 невырожденной. Необходимым и достаточным условием приводимости задачи к виду, удобному для полного округления в x_0 , является существование матриц $C \geq 0$ и $V \in L_2^p$ таких, что $CA_1 = VB$, что равносильно соотношению $C = V(BA_1^{-1}) \geq 0$, так как A_1 — невырожденная.

Определение. Матрица A размера $p \times n$ называется приводимой к положительному виду, если существует невырожденная матрица D порядка p , что

$$(DA)_{ij} \geq 0, \quad i \in 1, 2, \dots, p; \quad j \in 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3. Матрица A неприводима к положительному виду тогда и только тогда, когда существуют $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^n$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \leq 0$ ($i \in 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющие соотношению

$$\sum_1^n \alpha_i A_{.i} = \sum_1^n \beta_i A_{.i} \neq 0. \quad (*)$$

Достаточность. В силу (*) $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Допустим, что соотношение $DA \geq 0$ выполняется для некоторой невырожденной матрицы D . Тогда $DA \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \geq 0$, с другой стороны $\left(DA \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)_{n+1} \leq 0$; кроме того, $\left(DA \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right)_{n+1} \neq 0$ в силу невырожденности матрицы D и соотношения (*). Полученное противоречие доказывает достаточность.

Необходимость. Матрица A неприводима*, если неприводима ее подматрица A_0 , состоящая из ненулевых столбцов. Покажем, что если матрица A_0 неприводима, то система $xA_0 > 0$ несовместна. Действительно, если последняя совместна и x_0 — ее решение, то $x_0 A_0 \geq \delta$ при некотором $\delta > 0$. Тогда для любой невырожденной матрицы D_1 , содержащей x_0 в качестве первой строки, выполняется соотношение $(D_1 A_0)_{.1} \geq \delta$. Так как $D_1 A_0$ приводима (см. доказательство теоремы 2), то приводима и A_0 . Итак, система $xA_0 > 0$ несовместна. Если фиксировать некоторую ее максимальную совместную подсистему, то пусть неравенство $x(A_0)_{.i} > 0$ в нее не

входит. Тогда существует $\beta \neq 0$ ($\beta_i \leq 0$), что
$$\sum_1^n \beta_i (A)_{.i} = (A_0)_{.i}.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 4. Задача III приводима в x_0 к виду, удобному для полного округления, тогда и только тогда, когда матрица BA_1^{-1} приводима к положительному виду.

Достаточность. Обозначим через D подматрицу матрицы BA_1^{-1} , состоящую из ненулевых столбцов. Если матрица BA_1^{-1} приводима к положительному виду, то система $yD > 0$ совместна. Множество решений ее образуют конус, имеющий внутренние точки. Следовательно, система $yD \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ допускает целочисленное решение y , ОНД $\{y_i\} = 1$. По лемме 3 существует матрица $V_1 \in L_2^p$, что $(V_1 D)_{.1} \geq \delta$ и, следовательно (см. доказательство теоремы 2), существует $V_2 \in L_2^p$, что $V_2 V_1 D > 0$. Таким образом, задача III приводима к виду, удобному доказана. Необходимость очевидна.

* На протяжении этого доказательства неприводимость означает неприводимость к положительному виду.

В общем случае множество M имеет вид

$$A_2x \leq A_2x_0, \quad B_2x \leq B_2x_0 + \delta, \quad (2)$$

где $\delta > 0$, A_1 — некоторая подматрица матрицы A_2 ; матрица

$$\begin{pmatrix} A_2 & | & A_2x_0 \\ B_2 & | & B_2x_0 + \delta \end{pmatrix}$$

отличается от $(A|b)$ только порядком строк.

Для приводимости задачи III к виду, удобному для полного округления, в x_0 должна существовать матрица $V \in L_z^p$, удовлетворяющая соотношениям

$$CA_2 = VB, \text{ где } C_{ij} \geq 0.$$

Обозначим через M_1 множество решений системы

$$yA_2 = xB, \quad 0 \leq y_i \leq 1.$$

Легко видеть, что она эквивалентна системе

$$yA_2 = xB, \quad 1 \geq y_i \geq 0, \quad i \in I_1, \quad y_i = 0 (i \notin I_1),$$

где

$$I_1 = \{i | \max_{(y; x) \in M_1} y_i > 0\}.$$

Обозначим через A_3 подматрицу матрицы A_2 , удовлетворяющей соотношению $(A_2)_i \in A_3 \Leftrightarrow i \in I_1$.

Теорема 4. Задача III приводима к виду, удобному для полного округления, в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$r(A_3) = r\left(\frac{A_3}{B}\right).$$

Необходимость. Рассмотрим соотношение $CA_3 = DB$, где $|D| \neq 0$. Чтобы оно могло иметь место, необходимо, чтобы система $yA_3 = xB$ была разрешима при любом x , а для этого необходима справедливость равенства $r(A_3) = r(A_3|B)$. Необходимость доказана, так как

$$|V| \neq 0 \quad (V \in L_z^p).$$

Достаточность. Пусть z_i решение задачи линейного программирования

$$\max y_i, \quad yA_3 = xB, \quad 0 \leq y_i \leq 1,$$

Тогда $\Sigma z_i = (y_0; x_0)$ — решение системы

$$yA_3 = xB, \quad y_i \geq (y_0)_i > \delta_i > 0.$$

Обозначим через x_0' вектор с рациональными компонентами. Система $yA_3 = (x_0 - x_0')B$ имеет решение y' , так как $r(A_3) = r(A_3/B)$. Далее $(y_0 - y')A_3 = (x_0 - (x_0 - x_0'))B = x_0'B$. Следовательно, для x_0' , достаточно близкого к x_0 , существует такое y' , что $(y_0 - y')_i \geq \delta_i > 0$ для $i \in I_1$. Тем самым вследствие однородности системы $yA_3 = xB$ доказано существование целочисленного вектора n , при котором выполняются соотношения $\bar{y}_1 A_3 = nB$, где $(\bar{y}_1)_i > 0$ для $i \in I_1$, ОНД $\{n_i\} = 1$. По лемме 3 существует $V_1 \in L_z^p$ такое, что $(V_1)_1 = n$.

Пусть $\bar{y}_j$ решения систем

$$yA_3 = (V_1)_j B, \quad j \in 1, 2, \dots, p.$$

Обозначим через C_1 матрицу, удовлетворяющую соотношениям $(C_1)_j = \bar{y}_j$ ($j \in 1, 2, \dots, p$), т. е. $C_1 A_3 = V_1 B$. Элементы первой строки матрицы C_1 строго положительны, следовательно, существует $V_2 \in L_2^p$, что $(V_2 C_1)_{ij} \geq 0$, поэтому матрица $V_2 V_1$ — одна из искоемых матриц. Достаточность доказана.

Следствие 3. Если $r(B) = r(A_2)$, то задача II приводима в x_0 к виду, удобному для полного округления.

Доказательство. Действительно, $r(A_2) = r(A_2/B) = n$, где n — размерность пространства. По условию, $r(B) = n$, поэтому для любого i существует решение системы $(A_2)_i = xB$, т. е. $A_2 = A_3$. Следствие доказано.

3. ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ

Пусть $\check{\psi}$ — отображение R^n в R^p , тогда

$$[x_0]_{\check{\psi}} = \{x \in R^n \mid \check{\psi}(x) = [\check{\psi}(x_0)]\},$$

$$[M]_{\check{\psi}} = \{x \in M \mid \check{\psi}(x) = [\check{\psi}(x)]\}.$$

Задача целочисленного математического программирования в общем виде состоит в нахождении $\max \varphi(x)$ при $x \in [M]_{\check{\psi}}$, где ψ — отображение, непрерывное на M ; φ — вещественная функция, непрерывная на M . Будем считать, что отыскание непрерывного решения рассматриваемой задачи значительно легче, чем целочисленного.

Пусть $x_0 \in M$, $\max_{x \in [M]_{\check{\psi}}} \varphi(x) \leq \varphi(x_0)$. Будем говорить, что задача неприводима в x_0 к виду, удобному для полного округления, если

$$\{V \in L_2^p \mid \max_{x \in [M]_{\check{\psi}}} ((V\check{\psi}(x)), e_i) \leq [((V\check{\psi}(x_0)), e_i)], i \in 1, 2, \dots, p\} = \emptyset.$$

В этом разделе будет описан один важный класс целочисленных задач математического программирования, приводимых к виду, удобному для полного округления, а именно — задач вида

$$\max (\check{\psi}(x), e_1) \text{ при } x \in [M]_{\check{\psi}}, \quad (3)$$

где ψ — непрерывное на M отображение R^n в R^p .

Теорема 5. Если M — компактно, ψ — непрерывно на M , то задача 3 приводима к виду, удобному для полного округления.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что существуют $V_{k+1} \in L_2^p$, $x_{k+1} \in M$, для которых

$$\max_{x \in [M]_{\check{\psi}}} ((V_{k+1}\check{\psi}(x)), e_i) \leq [((V_{k+1}\check{\psi}(x_{k+1})), e_i)], i \in 1, 2, \dots, k+1,$$

причем $((V_{k+1}\check{\psi}(x)), e_1) = (\check{\psi}(x), e_1)$, если существуют $V_k \in L_2^p$, $x_k \in M$, для которых

$$\max_{x \in [M]_{\check{\psi}}} ((V_k\check{\psi}(x)), e_i) \leq [((V_k\check{\psi}(x_k)), e_i)], i \in 1, 2, \dots, k,$$

причем $((V_k\check{\psi}(x)), e_1) = (\check{\psi}(x), e_1)$.

Обозначим $V_k\psi(x) = \varphi(x)$,

$$M_k = \{x \in M \mid (\varphi(x), e_i) \leq (\varphi(x_k), e_i), i \in 1, 2, \dots, k\},$$

$$S = \{x \in M_k \mid (\varphi(x), e_i) = (\varphi(x_k), e_i), i \in 1, 2, \dots, k\}.$$

S — непусто, так как содержит, в частности, x_k . Легко видеть, что при любых $\alpha_i > 0$ выполняется равенство

$$\left\{ x \in M_k \mid \sum_1^k \alpha_i \check{\varphi}(x, e_i) = \max_{y \in M} \sum_1^k \alpha_i \check{\varphi}(y, e_i) \right\} = S.$$

Пусть $f(x, \alpha) = \alpha \check{\varphi}(x, e_{k+1}) + \sum_1^k \alpha_i \check{\varphi}(x, e_i)$ и $S_\alpha = \{x \in M_k \mid f(x, \alpha) = \max_{y \in M_k} f(y, \alpha)\}$.

Если $x_\alpha \in S_\alpha$ и $x_\alpha \rightarrow x'$ при $\alpha \rightarrow 0$, то $x' \in S$. Действительно, функция $\max f(x, \alpha)$ непрерывна на $[0, 1]$ вследствие непрерывности $f(x, \alpha)$ на компакте $M_k \times [0, 1]$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \max_{x \in M_k} \sum_0^k \alpha_i \check{\varphi}(x, e_i) &= \max_{x \in M_k} f(x, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \max_{x \in M_k} f(x, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x_\alpha, \alpha) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha \check{\varphi}(x_\alpha, e_{k+1}) + \sum_0^k \alpha_i \check{\varphi}(x_\alpha, e_i)) = \sum_0^k \alpha_i \check{\varphi}(x', e_i). \end{aligned}$$

Следовательно, $x' \in S$. Пусть $\alpha_i = m_i (i \in 0, 1, \dots, k)$, где m_i — некоторые целые числа, большие единицы, и

$$\max_{x \in S} \check{\varphi}(x, e_{k+1}) = (\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1}).$$

Докажем, что существует бесконечная подпоследовательность $\{n_j f(\bar{x}, 1/n_j)\}$ ($n_j < n_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$) последовательности $\{nf(\bar{x}, 1/n)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) (здесь символ $\{ \}$ означает дробную часть числа) такая, что

$$\{n_j f(\bar{x}, 1/n_j)\} \leq \{(\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1})\}, \text{ если } \{\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1}\} > 0.$$

$$\text{Действительно, } \{nf(\bar{x}, 1/n)\} = \{(\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1})\} + n \left\{ \sum_1^k m_i \check{\varphi}(\bar{x}, e_i) \right\}.$$

Если $\left\{ \sum_1^k m_i \check{\varphi}(\bar{x}, e_i) \right\}$ — рационально, то существует бесконечная подпоследовательность $\{n_j f(\bar{x}, 1/n_j)\}$, $j = 1, 2, \dots$, что $\{n_j f(\bar{x}, 1/n_j)\} = \{(\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1})\}$. Если $\left\{ \sum_1^k m_i \check{\varphi}(\bar{x}, e_i) \right\}$ — иррационально, то множеством предельных точек последовательности $n \left\{ \sum_0^k m_i \check{\varphi}(\bar{x}, e_i) \right\}$ является отрезок $[0, 1]$, откуда легко следует справедливость утверждения и в этом случае.

Рассмотрим последовательность x_{α_j} ($\alpha_j = 1/n_j$). Ввиду того, что она сходится к точке из S , для некоторого достаточно большого $j = N$ будет выполняться соотношение

$$(\check{\varphi}(x_{\alpha_N}), e_{k+1}) < [(\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1})] + 1. \quad *$$

* Далее рассматривается случай $\{(\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1})\} > 0$; в случае $\{(\check{\varphi}(\bar{x}), e_{k+1})\} = 0$ все соотношения также выполняются, если заменить 1 на $1/2$ и взять бесконечную последовательность n_j , для которой $\{n_j f(\bar{x}, 1/n_j)\} \leq 1/2$.

Далее

$$\begin{aligned}
 [n_N f(\bar{x}, 1/n_N)] &\leq \max_{x \in M_k} n_N f(x, 1/n_N) = n_N f(x_{a_N}, 1/n_N) \leq \\
 &\leq (\check{\Psi}(x_{a_N}), e_{k+1}) + n_N \sum_1^k m_i (\check{\Psi}(\bar{x}), e_i) < [(\check{\Psi}(\bar{x}), e_{k+1})] + \\
 &+ 1 + n_N \sum_1^k m_i (\check{\Psi}(\bar{x}), e_i) = (\check{\Psi}(\bar{x}), e_{k+1}) + n_N \sum_1^k m_i (\check{\Psi}(\bar{x}), e_i) - \\
 &- \{(\check{\Psi}(\bar{x}), e_{k+1})\} + 1 = [n_N f(\bar{x}, 1/n_N)] + 1 + \{n_N f(\bar{x}, 1/n_N)\} - \\
 &- \{(\check{\Psi}(\bar{x}), e_{k+1})\} \leq [n_N f(\bar{x}, 1/n_N)] + 1.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[\max_{x \in M_k} n_N f(x, 1/n_N)] = [n_N f(\bar{x}, 1/n_N)].$$

Рассмотрим матрицу

$$B_k = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ a_1, \dots, a_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_{p-1-k} \end{pmatrix},$$

где $a_i = n_N m_i$.

Легко видеть, что $B_k \in L_z^p$,

$$\begin{aligned}
 ((B_k \check{\Psi}(x), e_i) &= (\hat{\Phi}(x), e_i) \quad (i \in 0, 1, \dots, k, k+2, \dots, p), \\
 ((B_k \check{\Psi}(x), e_{k+1}) &= n_N f(x, 1/n_N).
 \end{aligned}$$

Следовательно, роль матрицы V_{k+1} может выполнять $B_k V_k$, $\bar{x}$ — роль x_{k+1} . Теорема доказана полностью. Из доказательства теоремы легко видеть, что справедливо следующее следствие.

Следствие 4. Задача III целочисленного математического программирования приводится к виду, удобному для полного округления, матрицей $B \in L_z^p$ треугольного вида, $B_{ii} = 1$.

4. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ПРИВОДИМОЙ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ ПОЛНОГО ОКРУГЛЕНИЯ

Назовем z — алгоритмом на M итерационный процесс, каждая итерация t которого состоит из двух этапов: первый — приведение задачи к виду, удобному для полного округления на M_{t-1} в x_t ; второй — групповое отсеивание, осуществляемое путем введения дополнительных неравенств

$$V_t \check{\Psi}(x) \leq [V_t \check{\Psi}(x_t)]; \quad M_t = \{x \in M \mid V_t \check{\Psi}(x) \leq [V_t \check{\Psi}(x_t)]\}.$$

Легко видеть, что $[M]_{\check{\Psi}} = [M_t]_{\check{\Psi}}$, следовательно, алгоритм завершен, если для некоторого $t = T$ $M_T = \emptyset$ или $x_T \in [M]$. В первом случае задача III не имеет целочисленных решений, во втором x_T — одно из решений задачи.

Теорема 6. Если M — компактно, $\check{\Psi}(x)$ — непрерывно на M , $(V_t)_{ii} = 1$, $V_t \in L_z^p$ — треугольного вида, то z — алгоритм конечен.

Доказательство. Предположим, что последовательность x_t бесконечна, тогда $M_t \neq \emptyset$ для любого натурального t . Определим b_t из соотношения $V_t b_t = [V_t \check{\psi}(x_t)]$. По условию V_t — треугольна, $(V_t)_{ii} = 1$, следовательно:

$$(b_t)_1 = [(V_t \check{\psi}(x_t), e_1)] = [(\check{\psi}(x_t), e_1)], \quad b_t \geq (b_{t+1})_1.$$

Поэтому в силу компактности M и непрерывности $(\check{\psi}(x), e_1)$ на M существует $t = t_1$ такое, что $(b_t)_1 = (b_{t_1})_1$ при любом $t \geq t_1$.

Предположим теперь существование t_k , для которого

$$(b_t)_i = (b_{t_k})_i = (\check{\psi}(x_t), e_i), \quad i \in 1, 2, \dots, k \text{ при } t \geq t_k.$$

Используя треугольность V_t , запишем

$$(V_t b_t, e_i) = ([V_t \check{\psi}(x_t)], e_i) = (V_t [\check{\psi}(x_t)], e_i), \quad i \in 1, 2, \dots, k+1.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} ((V_{t+1} \check{\psi}(x_{t+1})), e_{k+1}) - ((V_{t+1} \check{\psi}(x_t)), e_{k+1}) = \\ (\check{\psi}(x_{t+1}), e_{k+1}) - (\check{\psi}(x_t), e_{k+1}) \leq 0 \end{aligned}$$

при $t \geq t_k$, так как $(V_{t+1})_{k+1, k+1} = 1$.

Из бесконечности последовательности x_t компактности M , непрерывности $(\check{\psi}(x), e_{k+1})$ на M вытекает существование такого t_{k+1} , что

$$(\check{\psi}(x_t), e_{k+1}) = (\check{\psi}(x_{t_{k+1}}), e_{k+1}) = [(\check{\psi}(x_{t_{k+1}}), e_{k+1})]$$

при $t \geq t_{k+1}$. Таким образом, из предположения о бесконечности последовательности x_t , компактности M , непрерывности $\psi(x)$ на M , треугольности V_t , $(V_t)_{ii} = 1$ следует существование $x_{t_p} \in M$, что

$$(b_t, e_i) = (\check{\psi}(x_{t_p}), e_i) = [(\check{\psi}(x_{t_p}), e_i)], \quad i \in 1, 2, \dots, p, \quad t \geq t_p.$$

Следовательно, $x_{t_p} \in [M]_{\check{\psi}}$ является решением задачи, что противоречит допущению о бесконечности числа точек x_t . Теорема доказана.

Треугольность матриц V_t играет основную роль в процессе доказательства теоремы 6. Вследствие треугольности матриц V_t и условия $(V_t)_{ii} = 1$ ограничения $V_t \check{\psi}(x) \leq [V_t \check{\psi}(x_t)]$ мажорируют ограничения $V_{t-1} \check{\psi}(x) \leq [V_{t-1} \check{\psi}(x_{t-1})]$. Отбрасывание ограничений $V_{t-1} \check{\psi}(x) \leq [V_{t-1} \check{\psi}(x_{t-1})]$ после введения ограничений $V_t \check{\psi}(x) \leq [V_t \check{\psi}(x_t)]$ препятствует накоплению ограничений. Исследование эффективности предлагаемого метода не проводилось, представляется целесообразной статистическая проверка эффективности метода путем проведения машинного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Корбут. Целочисленные задачи линейного программирования. В сб. Экономико-математические методы. М., «Наука», 1965, вып. 2.
2. Дж. Кассела. Введение в геометрию чисел. М., «Мир», 1965.

Поступила в редакцию
12 IV 1967