ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1968 том IV, вып. 4

# О ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ, В. В. МАЛИННИКОВ, А. И. СОБОЛЕВ

(*Ленинград*)

В большинстве работ по линейному программированию изучались отдельные задачи линейного программирования (в парах с двойственными). Лишь небольшое число результатов типа теорем об общем равновесии (см., например, [1]) относится к одновременному рассмотрению нескольких взаимосвязанных задач линейного программирования.

В настоящей статье рассматривается совокупность связанных между собой задач линейного программирования, сопоставленных вершинам и подграфам ориентированного графа, их композиции и декомпозиции. Показываются возможности описания решения глобальной задачи, соответствующей графу в целом, посредством описания решений локальных задач, отвечающих его подграфам и даже отдельным вершинам.

Одновременно обнаруживаются новые связи линейного программирования, как математической теории, с вопросами теории игр. Оказывается, что в рамках линейного программирования воспроизводятся не только матричные игры, но и более широкие классы бескоалиционных игр.

1. Рассмотрим ориентированный граф без петель $(J, \Gamma)$, где $J$ — множество вершин графа, а $\Gamma$ — многозначное отображение $J$ в $J$. О терминологии и обозначениях теории графов говорится в работе [2]. Каждой вершине графа $j \in J$ поставим в соответствие фиксированную матрицу $A_j$ и фиксированные векторы $b_j$ и $c_j$. Кроме того, с каждой вершиной $j \in J$ свяжем переменные векторы $x_j$ и $u_j$, а с каждой другой $(j, k)$ (т. е. с парой индексов $j, k$, таких, что $k \in \Gamma_j$) переменный вектор $x_{jk}$.

Зафиксируем для некоторой вершины $j \in J$ все векторы $x_{ij}$, где $i \in \Gamma_j^{-1}$ (т. е. векторы, связанные со всеми дугами, входящими в $j$-ю вершину), и все векторы $u_k$, где $k \in \Gamma_j$ (т. е. векторы, связанные со всеми вершинами, в которые идут дуги из вершины $j$). Тогда для этой вершины можно сформулировать задачу линейного программирования

$$\left( x_j c_j + \sum_{k \in \Gamma_j} x_{jk} u_k \right) \to \max,$$

$$\left( x_j + \sum_{k \in \Gamma_j} x_{jk} \right) A_j \leqq \sum_{i \in \Gamma_j^{-1}} x_{ij} + b_j,$$

$$x_j \geqq 0, \quad x_{jk} \geqq 0, \quad k \in \Gamma_j.$$

Двойственной к этой задаче, очевидно будет следующая:

$$\left(b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1}} x_{ij}\right) u_j \to \min,$$

$$A_j u_j \geqq {}^{-}c_j, \quad A_j u_j \geqq u_k, \quad k \in \Gamma_j, \quad u_j \geqq 0.$$

Первую из этих задач («прямую») обозначим через $P(j)$, а вторую («двойственную») — через $D(j)$. Эти задачи будем называть локальными по отношению к графу $(J, \Gamma)$.

Кроме того, для всего графа можно рассматривать пару двойственных задач:

$$\sum_{j \in J} x_j c_j \to \max,$$

$$\left(x_j + \sum_{k \in \Gamma_j} x_{jk}\right) A_j \leqq \sum_{i \in \Gamma_j^{-1}} x_{ij} + b_j,$$

$$x_j \geqq 0, \quad x_{ij} \geqq 0, \quad j \in J, \quad i \in \Gamma_j^{-1},$$

$$\sum_{j \in J} b_j u_j \to \min,$$

$$A_j u_j \geqq c_j, \quad A_j u_j \geqq u_k, \quad u_j \geqq 0, \quad j \in J, \quad k \in \Gamma_j,$$

где уже все $x_{ij}$ и все $u_k$ являются переменными. Эти задачи будем называть глобальными по отношению к графу $(J, \Gamma)$ и обозначать их соответственно через $P(J)$ и $D(J)$.

Разумеется, мы считаем, что размеры соответствующих матриц и векторов согласованы. Далее будем предполагать, что задачи $P(J)$ и $D(J)$ имеют допустимые решения.

2. Приведем несколько примеров систем связанных между собой задач линейного программирования, укладывающихся в схему, описанную в п. 1.

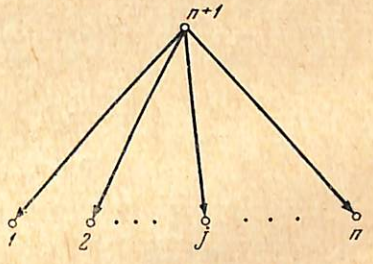

Рис 1

**Пример 1. Задача о распределении ресурсов.** Пусть имеются предприятия $1, 2, \ldots, n$. Пусть $c_j$ — вектор цен, в которых оценивается продукция $j$-го предприятия, $s$ — вектор ресурсов, общих для всех предприятий, $s_j$ — вектор собственных ресурсов $j$-го предприятия, $D_j$ и $B_j$ — матрицы расхода $j$-м предприятием соответственно общих и собственных ресурсов на единицу продукции каждого вида.

Тогда задача максимизации общей прибыли выглядит так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j D_j \leqq s, \tag{*}$$

$$x_j B_j \leqq s_j, \quad j = 1, \ldots, n; \quad x_j \geqq 0.$$

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1, вершины $1, \ldots, n$, которого соответствуют предприятиям, вершина $n+1$ соответствует центру, распределяющему общие ресурсы.

Сопоставим каждой вершине $j$ $(1, \ldots, n)$ графа матрицу $A_j = (D_j, B_j)$ (т. е. первые столбцы матрицы $A_j$ являются столбцами матрицы $D_j$,

а последние столбцы матрицы $A_j$ — столбцами матрицы $B_j$), векторы $c_j$ и $b_j = (0, s_j)$, где 0 — нулевой вектор размерности, равной числу столбцов матрицы $D_j$. Число столбцов во всех матрицах $D_j$ одно и то же и равно размерности вектора $s$. Число столбцов в матрицах $B_j$ равно размерностям векторов $s_j$ и, вообще говоря, может быть различным, но, добавляя нулевые столбцы к матрицам $B_j$ и нулевые компоненты к векторам $s_j$, можно сделать так, что во всех матрицах $B_j$ будет одинаковое число столбцов. Положим $A_{n+1} = E$, где $E$ — единичная матрица размерности, равной сумме числа столбцов в матрицах $D_j$ и $B_j$; $b_{n+1} = (s, 0)$, где 0 — нулевой вектор размерности, равной числу столбцов в матрице $B_j$; $c_{n+1} = 0$, где 0 — нулевой вектор той же размерности, что и матрица $A_{n+1}$. Тогда задача $P(J)$ для этого графа совпадает с задачей (*).

**Пример 2.** Задача $P(J)$ для графа, изображенного на рис. 2, соответствует одному из вариантов задачи долгосрочного планирования.

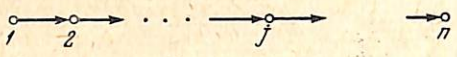


Рис 2

Здесь $A_j$ — технологическая матрица $j$-го периода, $b_j$ — вектор невоспроизводимых ресурсов, поступающих на $j$-м периоде, $c_j$ — вектор цен, оценивающий потребление на $j$-м периоде.

Такими системами взаимосвязанных задач можно представить также производственные связи между различными предприятиями.

3. Рассмотрим произвольный подграф $(M, \Gamma_M)$ графа $(J, \Gamma)$ и сформулируем для него пару двойственных глобальных задач $P(M)$ и $D(M)$:

$$\sum_{j\in M}(x_j c_j + \sum_{k\in\Gamma_j\setminus M} x_{jk}u_k \to \max,$$

$$\Big(x_j + \sum_{k\in\Gamma_j} x_{jk}\Big) A_j \leqq \sum_{i\in\Gamma_j^{-1}} x_{ij} + b_j,$$

$$x_j \geqq 0, \quad x_{jk} \geqq 0, \quad j \in M, \quad k \in \Gamma_j;$$

$$\sum_{j\in M}\Big(b_j + \sum_{i\in\Gamma_j^{-1}\setminus M} x_{ij}\Big)u_j \to \min,$$

$$A_j u_j \geqq c_j, \quad A_j u_j \geqq u_k, \quad u_j \geqq 0, \quad j \in M, \quad k \in \Gamma_j,$$

при этом векторы $x_{ij}$, $i \in \Gamma_j^{-1} \setminus M$; $u_k$, $k \in \Gamma_j \setminus M$ считаются в этих задачах фиксированными.

Рассмотрим следующую функцию, связанную с $(M, \Gamma_M)$:

$$Z^M = \sum_{j\in M}\Big[\Big(b_j + \sum_{i\in\Gamma_j^{-1}\setminus M} x_{ij}\Big)u_j - \sum_{k\in\Gamma_j\setminus M} x_{jk}u_k - x_j c_j\Big].$$

По теореме двойственности для любых допустимых решений задач $P(M), D(M)$

$$Z^M \geqq 0,$$

причем допустимые решения будут оптимальными тогда и только тогда, когда $Z^M = 0$.

4. **Лемма.** *Для двух произвольных подграфов* $(M_1, \Gamma_{M_1})$, $(M_2, \Gamma_{M_2})$

$$Z^{M_1} + Z^{M_2} = Z^{M_1\cup M_2} + Z^{M_1\cap M_2}. \tag{1}$$

Доказательство. Докажем сначала лемму для случая $M_1 \cap M_2 = \phi$.

$$Z^{M_1} + Z^{M_2} = \sum_{j \in M_1} \left[ \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus M_1} x_{ij} \right) u_j - \left( x_j c_j + \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_1} x_{jk} u_k \right) \right] +$$

$$+ \sum_{j \in M_2} \left[ \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus M_2} x_{ij} \right) u_j - \left( x_j c_j + \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_2} x_{jk} u_k \right) \right] =$$

$$= \sum_{j \in M_1 \cup M_2} \left[ \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus (M_1 \cup M_2)} x_{ij} \right) u_j - \left( x_j c_j + \sum_{k \in \Gamma_j \setminus (M_1 \cup M_2)} x_{jk} u_k \right) \right] +$$

$$+ \left( \sum_{j \in M_2} \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \cap M_1} x_{ij} u_j - \sum_{j \in M_1} \sum_{k \in \Gamma_j \cap M_2} x_{ij} u_k \right) +$$

$$+ \left( \sum_{j \in M_1} \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \cap M_2} x_{ij} u_j - \sum_{j \in M_2} \sum_{k \in \Gamma_j \cap M_1} x_{jk} u_k \right).$$

Так как

$$\{i, j \mid j \in M_2, \quad i \in \Gamma_j^{-1} \cap M_1\} = \{j, k \mid j \in M_1, \ k \in \Gamma_j \cap M_2\}$$

и

$$\{i, j \mid j \in M_1, \quad i \in \Gamma_j^{-1} \cap M_2\} = \{j, k \mid j \in M_2, \quad k \in \Gamma_j \cap M_1\},$$

каждая из стоящих в скобках разностей обращается в нуль, и мы имеем

$$Z^{M_1} + Z^{M_2} = \sum_{j \in M_1 \cup M_2} \left[ \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus (M_1 \cup M_2)} x_{ij} \right) u_j - \right.$$

$$\left. - \left( x_j c_j + \sum_{k \in \Gamma_j \setminus (M_1 \cup M_2)} x_{jk} u_k \right) \right],$$

а последняя сумма по определению есть $Z^{M_1 \cup M_2}$.

Если $M_1 \cap M_2 \neq \phi$, то воспользуемся тем, что $(M_2 \setminus M_1) \cap (M_1 \cap M_2) = \phi$, и поэтому согласно предыдущему

$$Z^{M_1} + Z^{M_2} = Z^{M_1} + Z^{M_2 \setminus M_1} + Z^{M_1 \cap M_2} = Z^{M_1 \cup M_2} + Z^{M_1 \cap M_2}.$$

Ограничениями допустимых решений задач $P(M)$, $D(M)$ на множестве $L \subset M$ будем называть части этих решений, являющихся допустимыми решениями задач $P(L)$, $D(L)$.

**Следствие 1.** *Для допустимых решений задач* $P(M)$, $D(M)$ *из* $L \subset M$ *следует* $Z^M \geqq Z^L$.

Доказательство. Очевидно, что ограничения на $L \subset M$ допустимых решений задач $P(M)$, $D(M)$ будут допустимы. Поэтому

$$Z^M = Z^L + Z^{M \setminus L} \geqslant Z^L.$$

**Следствие 2.** *Если заданы оптимальные решения задач* $P(M)$, $D(M)$, *то ограничения их на* $L \subset M$ *будут оптимальными.*

**Следствие 3.** *Пусть* $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. *Если ограничения допустимых решений задач* $P(M)$, $D(M)$ *оптимальны на каждом* $M_i$, *то эти решения оптимальны в* $P(M), D(M)$.

Доказательство. Используя (1) и следствие 1, получим неравенство

$$Z^M = Z^{M_1} + Z^{\bigcup_{i=2}^{n} M_i} - Z^{M_1 \cap \bigcup_{i=2}^{n} M_i} \leqslant Z^{M_1} + Z^{\bigcup_{i=2}^{n} M_i} \leqslant \ldots \leqslant \sum_{i=1}^{n} Z^{M_i},$$

из которого следует требуемое утверждение.

5. Рассмотрим следующую игру $n$ лиц. Пусть $J = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. В качестве множества стратегий $i$-го игрока возьмем множество всех допустимых решений задач $P(M_i)$, $D(M_i)$, а в качестве его функции выигрыша примем $-Z^{M_i}$. Эту игру будем обозначать через $G(M_1, \ldots, M_n)$.

**Теорема 1.** *Для того чтобы допустимые решения задач* $P(J)$, $D(J)$ *были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы ограничения этих решений на* $M_i$ *составляли ситуацию равновесия по Нэшу в игре* $G(M_1, \ldots, M_n)$.

Доказательство. Пусть даны оптимальные решения задач $P(J)$, $D(J)$. Тогда, согласно сказанному в п. 4, $Z^J = 0$ и, следовательно, по следствию 1 $Z^{M_i} = 0$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. А так как для любых допустимых стратегий $i$-го игрока $Z^{M_i} \geqslant 0$, данная ситуация является равновесной.

Обратно, пусть ограничения допустимых решений образуют ситуацию равновесия. Тогда каждый $i$-й игрок не должен иметь стратегических возможностей увеличить свой выигрыш. Но так как $i$-й игрок, выбрав в качестве своей стратегии оптимальные решения задач $P(M_i)$, $D(M_i)$, может получить $Z^{M_i} = 0$, в ситуации равновесия все $Z^{M_i} = 0$, тогда по следствию 3 $Z^J = 0$.

6. В предыдущей теореме мы рассматривали единственную игру $n$ лиц, ситуация равновесия в которой соответствовала решению задач $P(J)$, $D(J)$.

Перейдем теперь к одновременному рассмотрению $n$ антагонистических игр и получим сходный результат для этих игр. Пусть

$$J = \bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu, \qquad M_\nu \cap M_\mu = \phi, \qquad \nu \neq \mu$$

С каждым множеством $M_\nu$ свяжем следующую антагонистическую игру $G_\nu$. Первым игроком $G_\nu$ является множество $M_\nu$. Множеством его стратегий является множество допустимых решений в задаче $P(M_\nu)$. Вторым игроком является совокупность таких множеств $M_\mu$, что $M_\mu \cap \Gamma M_\nu \neq \phi$. Стратегиями его будут наборы допустимых решений задач $D(M_\mu)$.

Первый игрок максимизирует, а второй минимизирует функцию выигрыша

$$\varphi_\nu(X, U) = \sum_{j \in M_\nu} x_j c_j + \sum_{j \in M_\nu} \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_\nu} x_{jk} u_k + \sum_{\mu / M_\mu \cap \Gamma M_\nu \neq \phi} \sum_{j \in M_\mu} \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus M_\mu;\ i \in M_\nu} \bar{x}_{ij} \right) u_j,$$

где $\bar{x}_{ij}$ — векторы фиксированные и входят тем самым в условия игры $G_\nu$.

Если $\Gamma M_\nu = \phi$, то игра вырождается в задачу максимизации $\sum_{j \in M_\nu} x_j c_j$ по множеству стратегий первого игрока.

Если $\Gamma^{-1} M_\nu \neq \phi$, то, очевидно, найдется игра, в которой множество $M_\nu$ входит в состав второго игрока. Если $\Gamma^{-1} M_\nu = \phi$, то игра, в которую $M_\nu$ входит в состав второго игрока, вырождается в минимизацию $\sum_{j \in M_\nu} b_j u_j$ по соответствующему множеству стратегий.

**Теорема 2.** *Для того чтобы допустимые решения задач $P(J)$, $D(J)$ были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы ограничения этих решений на множествах $M_\nu$ были оптимальными стратегиями в играх $G_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, где все фиксированные векторы также взяты из данных допустимых решений.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть данные допустимые решения $\bar{X}$, $\bar{U}$ оптимальны. Тогда по следствию 2

$$\sum_{j \in M_\nu} \bar{x}_j c_j + \sum_{j \in M_\nu} \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_\nu} \bar{x}_{jk} \bar{u}_k \geqq \sum_{j \in M_\nu} x_j c_j + \sum_{j \in M_\nu} \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_\nu} x_{jk} \bar{u}_k \tag{2}$$

для $x_j$, $x_{jk}$, удовлетворяющих ограничениям задачи $P(M_\nu)$

$$\sum_{j \in M_\mu} \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus M_\mu} \bar{x}_{ij} \right) \bar{u}_j \leqq \sum_{j \in M_\mu} \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus M_\mu} \bar{x}_{ij} \right) u_j \tag{3}$$

для $u_j$, удовлетворяющих ограничениям задачи $D(M_\mu)$. Если к обеим частям неравенства (2) прибавить

$$\sum_{\mu \setminus M_\mu \cap \Gamma M_\nu \neq \phi} \sum_{j \in M_\mu} \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma^{-1} \setminus M_\mu,\ i \notin M_\nu} \bar{x}_{ij} \right) \bar{u}_j,$$

то мы получим неравенство

$$\varphi_\nu(\bar{X}, \bar{U}) \geqslant \varphi_\nu(X, \bar{U}).$$

Если просуммировать неравенство (3) по всем $\mu$, для которых

$$M_\mu \cap \Gamma M_\mu \neq \phi,$$

и прибавить к обеим частям $\sum_{j \in M_\nu} \bar{x}_j c_j$, то мы получим неравенство

$$\varphi_\nu(\bar{X}, \bar{U}) \leqslant \varphi_\nu(\bar{X}, U).$$

*Достаточность.* Пусть ограничения допустимых решений $\bar{X}$, $\bar{U}$ на всех множествах $M_\nu$ являются оптимальными стратегиями в соответствующих играх. В силу следствия 3, достаточно показать, что для любого $\nu$ $Z^{M_\nu} = 0$. Предположим, что для некоторого $\nu$ $Z^{M_\nu} > 0$, т. е. что

$$\sum_{j \in M_\nu} \left( b_j + \sum_{i \in \Gamma_j^{-1} \setminus M_\nu} \bar{x}_{ij} \right) \bar{u}_j > \sum_{j \in M_\nu} \bar{x}_j c_j + \sum_{j \in M_\nu} \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_\nu} \bar{x}_{jk} \bar{u}_k. \tag{4}$$

В силу оптимальности стратегий

$$\sum_{j \in M_\nu} \bar{x}_j c_j + \sum_{j \in M_\nu} \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_\nu} \bar{x}_{jk} \bar{u}_k = \max \left( \sum_{j \in M_\nu} x_j c_j + \sum_{j \in M_\nu} \sum_{k \in \Gamma_j \setminus M_\nu} x_{ij} \bar{u}_k \right) \tag{5}$$

при ограничениях задачи $P(M_\nu)$.

По теореме двойственности

$$\sum_{j\in M_v} \bar{x}_j c_j + \sum_{j\in M_v} \sum_{k\in \Gamma_j \setminus M_v} \bar{x}_{jk}\bar{u}_k = \min \sum_{j\in M_v} \Big( b_j + \sum_{i\in \Gamma_j^{-1}\setminus M_v} \bar{x}_{ij} \Big) u_j \qquad (6)$$

при ограничениях задачи $D(M_v)$.

Подставляя в (4), вместо левой части (6), правую, мы получаем

$$\sum_{j\in M_v} \Big( b_j + \sum_{i\in \Gamma_j^{-1}\setminus M_v} \bar{x}_{ij} \Big) \bar{u}_j > \min \sum_{j\in M_v} \Big( b_j + \sum_{i\in \Gamma_j^{-1}\setminus M_v} \bar{x}_{ij} \Big) u_j. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь любую игру, в которой $M_v$ входит в состав второго игрока. Ограничение $\bar{U}$ является оптимальной стратегией второго игрока в этой игре. При этом ограничение стратегии на множестве $M_v$ не зависит от ее ограничений на других множествах, входящих в состав второго игрока, и входит в функцию выигрыша аддитивно. Поэтому

$$\sum_{j\in M_v} \Big( b_j + \sum_{i\in \Gamma_j^{-1}\setminus M_v} \bar{x}_{ij} \Big) \bar{u}_j = \min \sum_{j\in M_v} \Big( b_j + \sum_{i\in \Gamma_j^{-1}\setminus M_v} \bar{x}_{ij} \Big) \bar{u}_j.$$

Полученное равенство противоречит (7), что завершает доказательство.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей, М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. К. Берж. Теория графов и ее применения, М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию
2 X 1966

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
1968
том IV, вып. 4

# ОРГАНИЗАЦИЯ БИБЛИОТЕКИ ПРОГРАММ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАМЯТИ КОМПИЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ

У. А. БОРМАН, О. К. ДАУГАВЕТ, Д. В. ИГОЛКИНА, И. В. КЛОКАЧЕВ, В. К. ЛИНИС, Л. А. РУХОВЕЦ, С. А. ХОЗИОСКИЙ

(*Ленинград, Рига*)

Метод автоматизации программирования, известный под названием метода библиотечных программ, заключается в следующем: по некоторой информации о схеме программы автоматическая система «собирает» рабочую программу из готовых частей — библиотечных программ, автоматически распределяя память, связывая библиотечные программы и устанавливая их в памяти машины путем соответствующей переработки адресов массивов программ. Исходя из этого, можно сформулировать следующую задачу: разработать систему формального описания программ, содержащую минимум информации, необходимой для автоматических систем, использующих библиотеку программ. Система (правила) формального описания программ, с одной стороны, определяет входной язык автоматических систем, использующих библиотеку программ, а с другой стороны, определяет сами библиотечные программы, т. е. формальные ограничения на структуру программ.

При разработке принципов организации библиотеки мы исходили из следующих основных положений:

библиотека должна накладывать минимальные ограничения на структуру библиотечной программы;

библиотека должна накладывать минимальные ограничения на структуру связей между библиотечными программами внутри рабочей программы;

библиотека должна допускать наличие в ней программ, использующих другие библиотечные программы, как угодно связанные между собой. При этом библиотека должна быть такова, чтобы при использовании библиотечной программы было не обязательно знать, из каких библиотечных программ состоит данная (рекурсивный принцип);

структура информации о библиотечной программе (о задаче) должна быть такова, чтобы для получения правильной рабочей программы необходимо было задавать лишь определенный минимум информации. Для получения более экономной (относительно использования памяти машины) программы нужно задавать дополнительную информацию;

принципы организации библиотеки должны допускать возможность совершенствования структуры библиотеки; это должно достигаться возможностью введения новых типов информации.

При разработке библиотеки мы предполагали, в основном, возможность использования ее автоматическими системами компилирующего типа.

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе описывается структура библиотечных программ, т. е. разрабатывается система формального описания программ, определяющая библиотеку; во втором — приводится