ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю. Ю. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

(*Москва*)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [1] рассматривалась следующая задача дискретного программирования с сепарабельной целевой функцией:

Задача Z.

$$F(X) \equiv \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max. \tag{1}$$

$$\varphi_i(x_{j_{i1}}, \ldots, x_{j_{ip_i}}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \in B_j \equiv \{b_{j1}, \ldots, b_{jq_j}\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

На функции f_j и φ_i не накладывается никаких ограничений.

Будем рассматривать матрицу инциденций $\| h_{ij} \|$ уравнений и переменных задачи Z ((1) — (3)):

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in \{j_{i1}, \ldots, j_{ip_i}\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

Алгоритм, предложенный в [1], предназначен для решения квазиблочных задач, т. е. задач, в которых множества $M \equiv \{i | i = 1, \ldots, m\}$ и $N \equiv \{j | j = 1, \ldots, n\}$ могут быть разбиты на непересекающиеся множества, обладающие выписанными ниже свойствами:

$$M = \bigcup_{r=1}^{k} U_r, \tag{5}$$

$$N = S_1 \cup S_{12} \cup S_2 \cup S_{23} \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup S_{k-1,k} \cup S_k. \tag{6}$$

Здесь S_r — множество переменных, могущих входить только в уравнения из U_r, $r = 1, \ldots, k$. $S_{r,r+1}$ — множество переменных, могущих входить только в уравнения из U_r и U_{r+1}, $r = 1, \ldots, k-1$.

Введем обозначение

$$\bar{S}_r = \begin{cases} S_1 \cup S_{12} & r = 1, \\ S_{r-1,r} \cup S_r \cup S_{r,r+1} & 1 < r < k, \\ S_{k-1,k} \cup S_k & r = k. \end{cases} \tag{7}$$

Через $|S|$ будем обозначать количество элементов, входящих в конечное множество S.

Алгоритм, предложенный в [1], эффективен для квазиблочных задач с не слишком большими блоками, т. е. для таких задач, в которых полный перебор $\prod_{j=1}^{n} q_j$ проделать невозможно, но можно произвести перебор объемом $\sum_{r=1}^{k} \left(\prod_{j \in \bar{S}_r} q_j \right)$ при объеме одновременно запоминаемой информации, не превышающем

$$\max_{2 \leqslant r \leqslant k-1} \left[\left(\prod_{j \in S_{r-1,r}} q_j \right) + \left(\prod_{j \in S_{r,r+1}} q_j \right) \right].$$

В данной заметке мы предположим, что к ограничениям (1) — (3) добавлены еще следующие ограничения:

$$\varphi_{m+l}(X) \equiv \sum_{j=1}^{n} \overset{j}{\varphi}_{m+l}(x_j) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, d, \tag{8}$$

и будем рассматривать задачу Z' ((1) — (3), (8)).

2. АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ $Z'((1)-(3),\ (8))$

При изложении алгоритма нам понадобятся некоторые обозначения:

$$S_1 \cup S_{12} \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{r-2,\, r-1} \cup S_{r-1} = S_{r-1}{}^{\sigma}, \tag{9}$$

$$X = (x_1, \ldots, x_n). \tag{10}$$

Если $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ и $S = \{j_1, \ldots, j_q\} \subseteq N \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$X_S = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}). \tag{11}$$

Фиксированное значение вектора X_S будем обозначать через:

$$\overline{X}_S, \tag{12}$$

а вектор-функцию — через

$$X_S(X_{S'}). \tag{13}$$

$$F(X_S) \equiv \sum_{j \in S} f_j(x_j). \tag{14}$$

Будем писать

$$X_S \in B, \tag{15}$$

если $x_j \in B_j$ для всех $j \in S$.

Поясним идею алгоритма для решения задачи Z'.

Допустим, что множество уравнений M разбито на два подмножества U_1' и U_2' и пусть S_1' — множество переменных, входящих только в уравнения из U_1'; S_2' — множество переменных, входящих только в уравнения из U_2'; S_{12}' — множество переменных, входящих как в уравнение из U_1' так и в уравнения из U_2'. $S' = S_1' \cup S_{12}'$.

Рассмотрим два вектора: вектор $X_{S'}{}^1 \in B$ и вектор $X_{S'}{}^2 \in B$. Предположим, что

$$x_j{}^1 = x_j{}^2 \qquad \text{для всех } j \in S_{12}', \tag{a}$$

$$\sum_{j \in S_1'} \varphi_{m+l}^{j}(x_j{}^1) = \sum_{j \in S_1'} \varphi_{m+l}^{j}(x_j{}^2), \qquad l = 1, \ldots, d, \tag{b}$$

векторы

$$X_{S'}{}^k, \qquad k = 1,\ 2 \tag{c}$$

удовлетворяют всем уравнениям из U_1',

$$\sum_{j \in S_1'} f_j(x_j{}^2) < \sum_{j \in S_1'} f_j(x_j{}^1). \tag{d}$$

Допустим теперь, что для некоторого вектора $\overline{X}_N$ имеет место соотношение

$$\bar{x}_j = x_j{}^2 \qquad \text{для всех } j \in S'. \tag{e}$$

Правило I. Если выполнены условия (a) — (e), то вектор $\overline{X}_N$ не может быть оптимальным планом задачи Z'.

Если же допустить, что вместо соотношения (d) имеет место

$$\sum_{j \in S_1'} f_j(x_j{}^2) = \sum_{j \in S_1'} f_j(x_j{}^1), \tag{d'}$$

то получаем следующее утверждение.

Правило II. Если выполнены условия (a) — (e) и $\overline{X}_N$ — оптимальный план задачи Z', то оптимальным планом задачи Z' является и вектор $\overline{\overline{X}}_N$, компоненты которого определяются по формуле

$$\bar{\bar{x}}_j = \begin{cases} x_j{}^1, & \text{если } j \in S', \\ \bar{x}_j & \text{если } j \in S_2'. \end{cases} \tag{f}$$

Алгоритм, излагаемый ниже, является непосредственным обобщением алгоритма для задачи Z (см. [1]) и отличается от него лишь структурой правил I и II, позволяющих сузить множество рассматриваемых вариантов. В правилах I, II учтено наличие условий (8), добавление которых превращает задачу Z в задачу Z'.

Переходим непосредственно к изложению алгоритма.

1-й этап. Рассмотрим следующую задачу.

Задача Z^1 $(\overline{X}_{S_{12}}, \overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1)$.

Найти вектор $X_{S_1} = X_{S_1^\sigma}$, удовлетворяющий условиям (16) — (20):

$$F(X_{S_1^\sigma}) \to \max \tag{16}$$

$$\varphi_i(x_{j_{i1}}, \ldots, x_{j_{ip_i}}) = 0 \qquad \text{для всех } i \in U_1, \tag{17}$$

$$X_{S_1^\sigma} \in B, \tag{18}$$

$$X_{S_{12}} = \overline{X}_{S_{12}} \in B, \tag{19}$$

$$\sum_{j \in S_1{}^\sigma} \overset{j}{\varphi}_{m+l}(x_j) = \overline{\theta}_l{}^1, \qquad l = 1, 2, \ldots, d. \tag{20}$$

Задачу $Z^1(\overline{X}_{S_{12}}, \overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1)$ решаем для всевозможных $\overline{X}_{S_{12}} \in B$ и всевозможных $\overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1$.

Если для данных $\overline{X}_{S_{12}}, \overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1$ задача $Z'(\overline{X}_{S_{12}}\overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1)$ разрешима и один из ее оптимальных планов равен $X_{S_1^\sigma}(\overline{X}_{S_{12}}, \overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1)$, то относим вектор $(\overline{X}_{S_{12}}, \overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1)$* в множество N_{12} и запоминаем для него вектор $X_{S_1^\sigma}$, $(\overline{X}_{S_{12}}, \overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1)$.

r-й этап $(1 < r < k)$. На предыдущем этапе построено множество $N_{r-1,r}$, состоящее из некоторых векторов $(\overline{X}_{S_{r-1,r}}, \overline{\theta}_1^{\,r-1}, \ldots, \overline{\theta}_d^{\,r-1})$, причем для каждого вектора $(\overline{X}_{S_{r-1,r}}, \overline{\theta}_1^{\,r-1}, \ldots, \overline{\theta}_d^{\,r-1})$ мы помним вектор $X_{S_{r-1}^\sigma}$ $(\overline{X}_{S_{r-1,r}}, \overline{\theta}_1^{\,r-1}, \ldots, \overline{\theta}_d^{\,r-1})$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача $Z^r(\overline{X}_{S_{r,r+1}}\, \overline{\theta}_1{}^r, \ldots, \overline{\theta}_d{}^r)$. Найти вектор $X_{S_r^\sigma}$, удовлетворяющий следующим условиям (21) — (28)

$$F(X_{S_r}) + F(X_{S_{r-1,r}}) + F(X_{S_{r-1}^\sigma}(X_{S_{r-1,r}}, \theta_1^{r-1}, \ldots, \theta_d^{r-1})) \to \max, \tag{21}$$

$$\varphi_i(x_{j_{i1}}, \ldots, x_{j_{ip_i}}) = 0 \qquad \text{для всех } i \in U_r, \tag{22}$$

$$X_{S_r} \in B, \tag{23}$$

$$X_{S_{r,r+1}} = \overline{X}_{S_{r,r+1}} \in B, \tag{24}$$

$$\sum_{j \in S_r{}^\sigma} \overset{j}{\varphi}_{m+l}(x_j) = \overline{\theta}_l{}^r, \qquad l = 1, 2, \ldots, d, \tag{25}$$

$$(X_{S_{r-1,r}}, \theta_1^{r-1}, \ldots, \theta_d^{r-1}) \in N_{r-1,r}, \tag{26}$$

$$\theta_l^{r-1} = \sum_{j \in S_{r-1}^\sigma} \overset{j}{\varphi}_{m+l}(x_j), \qquad i = 1, 2, \ldots, d, \tag{27}$$

$$X_{S_{r-1}^\sigma} = X_{S_{r-1}^\sigma}(X_{S_{r-1,r}}\theta_1^{r-1}, \ldots, \theta_d^{r-1}). \tag{28}$$

Задачу $Z^r(\overline{X}_{S_{r,r+1}}, \overline{\theta}_1{}^r, \ldots, \overline{\theta}_d{}^r)$ решаем для всевозможных $\overline{X}_{S_{r,r+1}} \in B$ и всевозможных $\overline{\theta}_1{}^r \ldots, \overline{\theta}_d{}^r$.

---

* Т. е. вектор, в котором к компонентам вектора $\overline{X}_{S_{12}}$ последовательно приписаны компоненты $\overline{\theta}_1{}^1, \ldots, \overline{\theta}_d{}^1$.

Если для данных $(\bar{X}s_{r,r+1}, \bar{\theta}_1^r, \ldots, \bar{\theta}_d^r)$ задача $Z^r(\bar{X}s_{r,r+1}\bar{\theta}_1^r, \ldots, \bar{\theta}_d^r)$ разрешима и один из ее оптимальных планов равен $X_{s_r^\sigma}(\bar{X}s_{r,r+1}\bar{\theta}_1^r, \ldots, \bar{\theta}_d^r)$, то относим вектор $(\bar{X}s_{r,r+1}, \bar{\theta}_1^r, \ldots, \bar{\theta}_d^r)$ в множество $N_{r,r+1}$ и запоминаем для него вектор $X_{s_r^\sigma}(\bar{X}s_{r,r+1}, \bar{\theta}_1^r, \ldots, \bar{\theta}_d^r)$.

После того как задача $Z^r(\bar{X}s_{r,r+1}, \bar{\theta}_1^r, \ldots, \bar{\theta}_d^r)$ решена для всех $(\bar{X}s_{r,r+1}, \bar{\theta}_1^r, \ldots, \bar{\theta}_d^r)$, вычеркиваем из памяти множество $N_{r-1,r}$ и векторы $X_{s_{r-1}^\sigma}(\bar{X}s_{r-1,r}, \bar{\theta}_1^{r-1}, \ldots, \bar{\theta}_d^{r-1})$.

k-й этап. На предыдущем этапе построено множество $N_{k-1,k}$, состоящее из некоторых векторов $(\bar{X}s_{k-1,k}, \bar{\theta}_1^{k-1}, \ldots, \bar{\theta}_d^{k-1})$, причем для каждого вектора $(\bar{X}s_{k-1,k}, \bar{\theta}_1^{k-1}, \ldots, \bar{\theta}_d^{k-1}) \in N_{k-1,k}$ мы помним вектор $X_{s_{k-1}^\sigma}(\bar{X}s_{k-1,k}, \bar{\theta}_1^{k-1}, \ldots, \bar{\theta}_d^{k-1})$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача Z^k. Найти вектор X, удовлетворяющий условиям

$$F(X) \longrightarrow \max, \tag{29}$$

$$\varphi_i(x_{j_{i1}}, \ldots, x_{j_{ip_i}}) = 0 \quad \text{для всех } i \in U_k, \tag{30}$$

$$\varphi_{m+l}(X) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, d, \tag{31}$$

$$X_{s_k} \in B, \tag{32}$$

$$(X_{s_{k-1,k}}, \theta_1^{k-1}, \ldots, \theta_d^{k-1}) \in N_{k-1,k}, \tag{33}$$

$$\theta_l^{k-1} = \sum_{j \in s_{k-1}^\sigma} \varphi_{m+l}^j(x_j), \qquad l = 1, 2, \ldots, d, \tag{34}$$

$$X_{s_{k-1}^\sigma} = X_{s_{k-1}^\sigma}(X_{s_{k-1,k}}\theta_1^{k-1}, \ldots, \theta_d^{k-1}). \tag{35}$$

Оптимальный план задачи Z^k является оптимальным планом задачи Z' ((1) — (3), (8)).

3. ОБЪЕМ ПЕРЕБОРА И ПАМЯТИ

Для объема перебора P и потребного объема памяти Q имеют место оценки

$$P \leqslant \prod_{j \in \bar{s}_1} q_j + \sum_{r=2}^{k} \left[\left(\prod_{j \in \bar{s}_r} q_j \right) \left(\prod_{l=1}^{d} C_l^{r-1} \right) \right], \tag{36}$$

$$Q \leqslant \begin{cases} 2, & k = 1 \\ \left(\prod\limits_{j \in s_{12}} q_j \right) \left(\prod\limits_{l=1}^{d} C_l^1 \right) & k = 2 \\ \max\limits_{2 \leqslant r \leqslant k-1} \left[\left(\prod\limits_{j \in s_{r-1,r}} q_j \right) \left(\prod\limits_{l=1}^{d} C_l^{r-1} \right) + \left(\prod\limits_{j \in s_{r,r+1}} q_j \right) \left(\prod\limits_{l=1}^{d} C_l^r \right) \right], & k \geqslant 3. \end{cases} \tag{37}$$

Здесь C_l^r — количество значений, которое может принимать функция $\sum\limits_{j \in s_r^\sigma} \varphi_{m+l}^j(x_j)$ при соблюдении условий (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ю. Финкельштейн. О решении задач дискретного программирования специального вида. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 2.

Поступила в редакцию
6 IV 1966