

разработка машинного кода и принципов размещения ИЯС в запоминающем устройстве ЭВМ;

разработка алгоритмов перевода с существующего языка системы на ИЯС и обратно, а также установление переходов и соответствий между ИЯС и алгоритмическими и другими языками, используемыми для обработки информации;

опытная проверка и доработка ИЯС.

* *
*

Осуществление взаимосвязанного комплекса разработок, начиная от построения дерева задач системы, определения языка системы, выделения детерминированной информации и кончая расчетом и закреплением количественных оценок за высказываниями, словами и символами языка системы и построением информационного языка, должно стать необходимым этапом проектирования каждой информационной системы. Только проведением этих работ можно добиться, с одной стороны, высокого уровня автоматизации переработки экономической информации и, с другой стороны, точного расчета параметров информационных массивов, пропускной способности каналов связи и мощности узлов переработки информации в экономической системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ст. Бир. Кибернетика и управление производством. М., «Наука», 1965.
2. П. Н. Денисов. Принципы моделирования языка. М., Изд-во МГУ, 1965.
3. К. Черри. О логике связи. Инженерная психология. М., «Прогресс», 1964.
4. R. Carnap, Y. Bar Hillel. An outline of a theory of semantic information. M. I. T., Tech. Rept., 1953.
5. Ю. А. Шрейдер. О количественных характеристиках семантической информации. Научно-техническая информация, 1953, № 10.
6. А. А. Харкевич. О ценности информации. Проблемы кибернетики, 1960, вып. 4.
7. М. М. Бонгард. О понятии «полезная информация». Проблемы кибернетики, 1963, вып. 9.

Поступила в редакцию
27 II 1968

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСОВ В СИСТЕМЕ СКЛАДОВ

Ю. И. РЫЖИКОВ

(Ленинград)

В большинстве работ по математической теории запасов [1—3] рассматривается оптимальная организация снабжения для отдельного склада. При этом минимизируются операционные расходы данного склада, составленные из затрат на хранение, поставки и «штрафы» за неполное (или несвоевременное) удовлетворение заявок потребителей. Объединение нескольких складов в систему с общим управляющим центром позволяет организовать маневр запасами в интересах системы в целом. Это обстоятельство дает возможность ликвидировать угрозу дефицита на одних складах за счет избытков на других и тем самым добиться общего снижения штрафов без увеличения суммарного запаса.

В настоящей статье рассматривается только одна из возникающих при этом задач — оптимальное перераспределение наличного запаса между складами применительно к децентрализованной системе складов (с управляющим органом, обладающим полной информацией о текущих запасах в низовых складах, но не имеющим собственных запасов). Решение приводится как для однородного предмета снабжения, так и для многономенклатурного случая.

1. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ЗАПАСА

При постановке задач о распределении запасов, ввиду приблизительно одинаковых условий хранения в системе, сумма затрат на хранение считается независимой от принятого решения и исключается из рассмотрения, так что минимизации подлежит сумма затрат на штрафы и распределение (перераспределение).

Обозначим: c_{ij} — цена единичной перевозки между складами i и j , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; q_{ij} — объем перевозок между этими складами; p_j — цена штрафа на складе j ; M^- — множество складов, получающих запас при перераспределении; M^+ — множество складов, отдающих запас при перераспределении; $f_j(x)$ — плотность распределения случайного спроса x на складе j ; z_j — начальный запас на складе j .

Тогда ожидаемые затраты за время t до очередной поставки составят

$$L = \sum_{j \in M^-} p_j \int_{z_j + \sum_{i \in M^+} q_{ij}}^{\infty} \left(x - z_j - \sum_{i \in M^+} q_{ij} \right) f_j(x) dx +$$

$$+ \sum_{i \in M^+} p_i \int_{z_i - \sum_{j \in M^-} q_{ij}}^{\infty} \left(x - z_i + \sum_{j \in M^-} q_{ij} \right) f_i(x) dx + \sum_{j \in M^-} \sum_{i \in M^+} c_{ij} q_{ij}$$

(плотности $f_j(x)$ заданы за время t).

В работе С. Аллена [4] показано, что для выпуклых функций затрат, к которым относится и (1), в оптимальном плане перераспределения либо

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = 0, \quad \text{либо} \quad \frac{\partial L}{\partial q_{ij}} > 0 \quad \text{и} \quad q_{ij} = 0.$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = -p_j \int_{z_j + \sum_{i \in M^+} q_{ij}}^{\infty} f_i(x) dx + p_i \int_{z_j - \sum_{i \in M^-} q_{ij}}^{\infty} f_i(x) dx + c_{ij}.$$

Нижние пределы интегрирования в последнем уравнении представляют собой оптимальные запасы после перераспределения $\{y_j^*\}$, так что условие оптимальности положительной перевозки q_{ij} может быть записано в форме

$$p_i \int_{y_i^*}^{\infty} f_i(x) dx - p_j \int_{y_j}^{\infty} f_j(x) dx + c_{ij} = 0 \quad (2)$$

(i — поставщик, j — получатель).

Для разделения складов на множества M^+ и M^- поставщиков и получателей будем, временно отвлекаясь от транспортных расходов, минимизировать сумму штрафов в системе

$$L_p = \sum_{i=1}^n p_i \int_{y_i}^{\infty} (x - y_i) f_i(x) dx \quad (3)$$

при условии, что суммарный запас в системе остается неизменным.

С помощью (2) нетрудно получить систему уравнений для условно оптимальных запасов $\{\tilde{y}_i^*\}$ вида

$$p_i \int_{\tilde{y}_i^*}^{\infty} f_i(x) dx = p_1 \int_{y_1^*}^{\infty} f_1(x) dx, \\ \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^* = \sum_{i=1}^n z_i, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

Очевидно, что

$$i \in M^+, \quad \text{если} \quad \tilde{y}_i^* < z_i, \quad i \in M^-, \quad \text{если} \quad \tilde{y}_i^* > z_i. \quad (5)$$

При $\tilde{y}_i^* = z_i$ склад i в перераспределении не участвует.

Рассмотрим динамику изменения левой части (2) в процессе перераспределения. Поскольку запас у поставщика падает, а у получателя растет, то эта функция будет возрастать до q_{ij} . Но ее значение в оптимальной точке равно нулю; следовательно, при исходном состоянии запасов должно выполняться условие

$$p_i \int_{z_i}^{\infty} f_i(x) dx - p_j \int_{z_j}^{\infty} f_j(x) dx + c_{ij} < 0 \quad (6)$$

для всех пар складов, участвующих в перераспределении. Проверка соотношений (6) позволяет сформировать множества $\{U_i\}$ получателей склада i и $\{V_j\}$ — поставщиков склада j и уточнить состав получателей и поставщиков в направлении их сокращения.

Выпишем уравнения (2) для всех пар перевозок, целесообразных при исходном состоянии запаса, и просуммируем их по каждому поставщику и получателю. В результате имеем систему уравнений

$$u_i p_i \int_{v_i}^{\infty} f_i(x) dx - \sum_{j \in U_i} \left(p_j \int_{v_j}^{\infty} f_j(x) dx - c_{ij} \right) = 0, \quad i \in M^+,$$

$$v_j p_j \int_{v_j}^{\infty} f_j(x) dx - \sum_{i \in V_j} \left(p_i \int_{v_i}^{\infty} f_i(x) dx + c_{ij} \right) = 0, \quad j \in M^-. \quad (7)$$

Здесь через u_i и v_j обозначена численность множеств U_i и V_j соответственно.

Решение системы (7) относительно оптимальных запасов должно проводиться численно с учетом ограничений по неотрицательности $\{y_i\}$.

Сопоставляя объем запасов $\{y_i^*\}$ на каждом складе после перераспределения с начальными значениями, можно определить суммарный объем поставок, полученных (отправленных) данным складом, и решением транспортной задачи любым из известных методов [5] найти наиболее экономичный план перевозок, реализующий окончательное распределение $\{y_i^*\}$.

Расчетный алгоритм принимает следующий вид:

I. Решением системы (4) получить условно оптимальные запасы $\{\tilde{y}_i^*\}$.

II. Сформировать исходные множества поставщиков и получателей согласно (5).

III. Рассчитать произведения $p_i \int_{z_i}^{\infty} f_i(x) dx$ для $i \in M^+ \cup M^-$.

IV. Для всех $j \in M^-$ положить V_j пустым, $v_j = 0$.

V. Для всех $i \in M^+$ выполнить следующие операции: 1) положить U_i пустым, $u_i = 0$, 2) для всех $j \in M^-$ выполнить: если (6) справедливо, то а) занести j в множество U_i ; б) заменить u_i на $u_i + 1$, в) занести i в множество V_j ; г) заменить v_j на $v_j + 1$.

VI. Для всех $i \in M^+$ выполнить: если $u_i = 0$, то вычеркнуть склад i из числа поставщиков.

VII. Для всех $j \in M^-$ выполнить: если $v_j = 0$, то вычеркнуть склад j из состава получателей.

VIII. Решением системы уравнений (7) найти оптимальные запасы $\{y_i^*\}$.

IX. Сформировать окончательные множества поставщиков и получателей, для чего для всех i выполнить: 1) вычислить $Q_i = y_i^* - z_i$, 2) если $Q_i > 0$, то отнести этот склад к получателям с общей потребностью Q_i , 3) если $Q_i < 0$, то отнести склад i к поставщикам с наличием Q_i .

X. Решить транспортную задачу по наиболее экономичной перевозке

$\sum_{i \in M^-} Q_i$ от поставщиков к получателям.

XI. Выдать в качестве результата объемы перевозок $\{q_{ij}\}$.

XII. Прекратить вычисления.

2. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНЫХ ЗАПАСОВ НА ОТДЕЛЬНОМ СКЛАДЕ

Как и в задаче с однородным продуктом, в многономенклатурной задаче общий штраф в системе определяется как сумма штрафов на отдельных складах.

Если на каждом складе штрафы по отдельным номенклатурам суммируются, то решение общей задачи может быть получено независимым N -кратным (по числу номенклатур) применением алгоритма п. 1.

Более типичным, с точки зрения приложений, представляется начисление штрафов по степени удовлетворения *векторного* спроса. В этом случае общий штраф на складе естественно определить как максимум взвешенного дефицита по всем номенклатурам, а его среднее значение — как математическое ожидание упомянутого максимума или максимум взвешенных математических ожиданий дефицита.

Итак, в многономенклатурной ситуации штраф на отдельном складе определяется согласно

$$L_p = \max_r p_r \int_{y_r}^{\infty} (x - y_r) f_r(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Очевидно, запасы по всем номенклатурам могут быть уменьшены до значений y_r^* , отвечающих системе уравнений

$$p_r \int_{y_r^*}^{\infty} (x - y_r^*) f_r(x) dx = \max_{y_r} p_r \int_{y_r}^{\infty} (x - y_r) f_r(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

а избыточные запасы могут быть переданы для погашения дефицита на других складах без какого-либо увеличения штрафа на данном.

3. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНЫХ ЗАПАСОВ

При выплате штрафов на каждом складе по максимуму взвешенного дефицита необходимо свести к минимуму эти максимумы, причем необходимость перераспределения будет определяться состоянием запаса на данном складе по всем номенклатурам. В таких случаях в системе всегда оказывается одна наиболее дефицитная («ключевая») номенклатура, наличный запас по которой *полностью* определяет минимальную сумму штрафов. В результате задача расчленивается на три звена: а) выделить «ключевую» номенклатуру, б) оптимальным образом распределить запас по ней, в) распределить ресурсы по остальным номенклатурам таким образом, чтобы штрафы по ним на всех складах не превышали штрафов по ключевой номенклатуре, а транспортные расходы были минимальны.

Наиболее вероятным кандидатом в «ключевые» следует считать ту номенклатуру, для которой максимальна взвешенная вероятность недоста-

чи по системе в целом, т. е. достигается $\max_r \bar{p}_r \int_{y_{r,z}}^{\infty} f_{r,z}(x) dx$, где $\bar{p}_r$ —

среднее значение цен штрафа $P_{r,j}$ по всем складам, а $f_{r,z}(x)$ — плотность распределения суммарного спроса в системе по номенклатуре r .

Схема вычислительного процесса выглядит следующим образом:

1. Рассчитать суммарные запасы $y_{r,z}$ по всем номенклатурам.

2. Вычислить взвешенные вероятности $\bar{p}_r \int_{y_{r,z}}^{\infty} f_{r,z}(x) dx$ и выбрать но-

менклатуру r_0 , для которой это произведение максимально.

3. Для номенклатуры r_0 упорядочить все склады по убыванию взвешенных вероятностей недостачи и решить систему уравнений типа (7) с дополнительным индексом r_0 (см. алгоритм п. 1).

4. Решить уравнения

$$p_{r,j} \int_{\tilde{y}_{r,j}}^{\infty} (x - y_{r,j}) f_{r,j}(x) dx = p_{r_0,j} \int_{\tilde{y}_{r_0,j}}^{\infty} (x - y_{r_0,j}) f_{r_0,j}(x) dx \quad (10)$$

относительно запасов $\tilde{y}_{r,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$; $r = 1, 2, \dots, N$.

5. Вычислить разности $S_r = \sum_{j=1}^n \tilde{y}_{r,j} - \sum_{j=1}^n z_{r,j}$ (т. е. разности между

суммарным запасом, необходимым для выравнивания штрафов под r_0 по всем складам системы, и фактически имеемым) для всех номенклатур r .

6. Если между этими разностями нет положительных, перейти к этапу 8, если есть — к этапу 7.

7. Выбрать номенклатуру r_1 , для которой S_r максимально. Заменить r_0 на r_1 . Перейти к этапу 3.

8. Рассчитать разности $Q_{r,j} = z_{r,j} - \tilde{y}_{r,j}$ по всем складам и номенклатурам.

9. Сформировать значения избытков по всем j и r

$$\delta_{r,j}^+ = \begin{cases} Q_{r,j}, & \text{если } Q_{r,j} > 0, \\ 0, & \text{если } Q_{r,j} \leq 0. \end{cases}$$

10. Сформировать значения дефицита по всем j и r

$$\delta_{r,j}^- = \begin{cases} -Q_{r,j}, & \text{если } Q_{r,j} < 0, \\ 0, & \text{если } Q_{r,j} \geq 0. \end{cases}$$

11. Независимым решением транспортных задач с объемами потребности $\{\delta_{r,j}^-\}$ и избытков $\{\delta_{r,j}^+\}$ по всем номенклатурам r найти оптимальные перевозки.

Заметим, что в п. 11 избытки и дефицит оказываются сбалансированными только по номенклатуре r_0 ; для остальных необходимо лишь покрыть дефициты $\delta_{r,j}^-$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Хэнсменн. Применение математических методов в управлении производством и запасами. М., «Прогресс», 1966.
2. Дж. Букан, Э. Кенигсберг. Научное управление запасами. М., «Наука», 1967.
3. Ю. И. Рыжиков. Оптимальное управление запасами. Морской сборник, 1964, № 10.
4. S. G. Allen. Redistribution of total stock over several user locations. Naval Research Logistics Quart., 1958, v. 5, № 4.
5. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1961.

Поступила в редакцию
6 IV 1967