

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Э. М. ЛИВШИЦ

(Харьков)

1. ВВЕДЕНИЕ

В системах сетевого планирования и управления возникает ряд оптимизационных задач. Многие из них описаны в [1]. В настоящей статье рассматривается задача нахождения календарного графика $\bar{K}$, минимизирующего длительность разработки $T(K)$ при заданном числе исполнителей некоторого подмножества работ (называемых ресурсными). Приводится общая схема алгоритмов сдвига A с постоянным параметром приоритета. Эти алгоритмы, именуемые обычно эвристическими процедурами, приводят за конечное число шагов к некоторому календарному графику $\bar{K} = K(A)$, который, вообще говоря, не совпадает с оптимальным графиком $\bar{K}$. В некоторых специальных предположениях относительно подмножества ресурсных работ дается оценка погрешности, возникающей при замене $T(\bar{K})$ на $T(K)$. При этом устанавливается, что для алгоритмов сдвига с параметром приоритета «полный резерв» и «раннее начало работы в обратной сети» оценка разности $T(K) - T(\bar{K})$ не зависит от размеров сети. При выборе второго из указанных параметров приоритета эта оценка приводит непосредственно к результатам [2, стр. 78; 3] относительно точности алгоритма сдвига в двух частных случаях. При изложении мы пользуемся «языком работ» и терминологией работы [2].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть для выполнения некоторого подмножества B работ разработки P выделено k исполнителей*, причем для выполнения каждой из работ $b \in B$ требуется точно один (безразлично, какой именно) из этих k исполнителей. Если число работ $b \in B$ превосходит k , то календарный график, составленный по ранним началам работ сети $S(P)$, может оказаться неосуществимым. Это произойдет, если в какой-то момент времени по этому графику должно будет выполняться более k работ из B . В этой ситуации возникает задача минимизации длительности $T(K)$ разработки P по всем календарным графикам K , совместным с ограничением на число исполнителей работ множества B . Очевидно, каждый календарный график K из множества M конкурирующих календарных графиков задается некоторым порядком на множестве работ P (который должен быть согласован с порядком в сети $S(P)$). Таким образом, сформулированная задача является задачей минимизации функционала на конечном множестве M .

Введем обозначения для числовых характеристик сети $S(P)$ и календарного графика $K \in M$.

* Например, k станков или k неделимых бригад и т. д.

Начальную и конечную работу сети $S(P)$ обозначим через α и ω . Длительность этих работ считаем равной нулю. Длительность любой работы $a \in P$ обозначим через $d(a)$, ранний срок ее начала — через $t'(a)$, ее полный резерв — через $\rho(a)$ и, наконец, ранний срок ее начала в обратной сети — через $\tau(a)$. Календарный график, составленный по ранним срокам $t'(a)$, обозначим через K' . Если в сети $S(P)$ существует путь, ведущий из работы a' в a'' , то будем писать $a' < a''$. При этом через $T(a', a'')$ обозначим максимальную из длин путей, ведущих из a' в a'' . При этом сами работы a', a'' в путь не включаются. Таким образом, длина критического пути сети $S(P)$ есть $T(\alpha, \omega)$.

Календарный график $K \in M$, построенный для разработки P при помощи алгоритма A , обозначим через $K(A)$. Этот график определяется сроками начала $t(a)$ работ $a \in P$. При этом $t(\alpha) = 0$, и длительность $T(K)$ разработки P , проводимой по графику K , равна $t(\omega)$.

Максимальная из длительностей ресурсных работ $b \in B$ обозначается через d .

3. ПРИВЕДЕНИЕ СЕТИ

Назовем путь, соединяющий работы a', a'' сети S , свободным, если он не содержит работ множества B . Приведенная сеть $S(P, B)$ строится следующим образом.

1. Присоединим к B работы α, ω и обозначим полученное множество через $\tilde{B}$.

2. Для каждой пары работ $a', a'' \in \tilde{B}$ рассмотрим все пути длины $T(a', a'')$. Если все эти пути свободны, то присоединим к сети S работу $c = c(a', a'')$ длительности $T(a', a'')$, проведя стрелки из a' в c и из c в a'' . Сеть, полученную после присоединения всех таких работ, обозначим через $\tilde{S}(P)$.

3. Удаляем из сети $\tilde{S}(P)$ все работы (вместе со всеми стрелками, входящими в них и выходящими из них), кроме работ из $\tilde{B}$ и работ, введенных в предыдущем разделе. Полученная сеть есть $S(P, B)$. Множество работ сети $S(P, B)$ назовем приведенной разработкой.

Если календарный график K выполнения работ разработки P согласован с сетью $S(P)$, то, очевидно, его часть, относящаяся к работам из $\tilde{B}$, допускает расширение на приведенную разработку, согласованное с сетью $S(P, B)$ и сохраняющее срок начала работы ω . Если, наоборот, задан календарный график K выполнения работ из $\tilde{B}$, согласованный с сетью $S(P, B)$, то его можно расширить до календарного графика всей разработки P , согласованного с сетью $S(P)$ и сохраняющего срок начала работы ω . Поэтому сформулированная в разделе 2 задача минимизации длительности разработки $S(P)$ при ресурсных ограничениях на работы из $B \in P$ равносильна задаче минимизации длительности приведенной разработки при тех же ресурсных ограничениях.

4. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ СДВИГА

Для приближенного построения оптимального календарного графика применяются алгоритмы сдвига (см., например, [4, гл. II]). Каждый алгоритм сдвига характеризуется выбором определенного числового параметра p , называемого параметром приоритета. Будем предполагать, что параметр приоритета определен как функция на множестве ресурсных работ

$$p = p(b), \quad b \in B.$$

При «переполнении ресурса» откладываются (сдвигаются) начала ресурсных работ b с меньшим значением $p(b)$. Дадим точное описание алгоритма сдвига A .

1) Строим календарный график $K_0 = K'$ разработки P по ранним срокам начала работ без учета ресурсных ограничений. Минимальный из ранних сроков начала ресурсных работ обозначаем через t_1 .

2) На j -м шаге алгоритма ($j \geq 1$) рассмотрим объединение $\bar{B}_j$ множества B_j ресурсных работ, которые должны начаться по календарному графику K_j в момент времени t_j , и множества ресурсных работ b , которые имеют по этому графику срок начала $t(b) < t_j$ и срок окончания $t(b) + d(b) > t_j$. Сравниваем число $k(t_j)$ работ множества $\bar{B}_j$ с k . Если $k(t_j) > k$, то переходим к п. 3, а если $k(t_j) \leq k$, то переходим к п. 4.

3) Упорядочиваем множество $\bar{B}_j$ по возрастанию параметра p и сдвигаем сроки начала первых $k(t_j) - k$ работ на момент времени

$$t_{j+1} = \min_{b \in \bar{B}_j} (t(b) + d(b)).$$

4) Если не существует ресурсных работ со сроком начала $t > t_j$ в календарном графике K_j , то полагаем $K_j = K(A)$. В противном случае обозначаем через $t_{j+1} > t_j$ ближайший к t_j срок начала ресурсной работы.

Ниже вместе с описанным общим алгоритмом A будут также рассматриваться алгоритмы сдвигов A_1 и A_2 , соответствующие специальному выбору параметра приоритета.

Алгоритм A_1 соответствует параметру приоритета

$$p_1(b) = T(b, \omega), \quad b \in B.$$

Очевидно,

$$p_2(b) = \tau(b), \quad b \in B.$$

Алгоритм A_2 соответствует параметру приоритета

$$p_2(b) = \tau(b) + d(b), \quad b \in B.$$

Отметим, что алгоритм A_2 совпадает с известным алгоритмом сдвигов по критерию «полный резерв» (см. [1]). Это следует из соотношения

$$\rho_j(b) = T_j - (\tau(b) + d(b) + t_j(b)),$$

где $\rho_j(b)$, T_j и $t_j(b)$ — полный резерв времени работы b , длительность разработки P и ранний срок начала работы b в календарном графике K_j .

5. СЕТИ С НЕЗАВИСИМЫМИ РЕСУРСНЫМИ РАБОТАМИ

Класс сетей, в которых не существует пути между двумя любыми работами из B , обозначим через R_1 . В этом разделе устанавливаются оценки точности приближенных решений рассматриваемой задачи оптимизации, получаемых с помощью алгоритмов сдвига, для сетей $S(P) \in R_1$. При этом вместо сети $S(P)$ мы можем анализировать приведенную сеть $S(P, \bar{B})$, которая в данном случае имеет следующую простую структуру: каждой ресурсной работе b предшествует единственная работа $c_1 = c_1(a, b)$ длительности $d(c_1) = t'(b)$, и за b следует единственная работа $c_2 = c_2(b, \omega)$ длительности $d(c_2) = \tau(b)$.

Очевидно, имеет место следующее предложение.

Лемма 1. Пусть в календарном графике $K(A)$ для сети $S \in R_1$ в некоторый момент времени t^* для какой-нибудь работы $b \in B$ выполняется со-

отношение $t(b) > t^*$. Если в момент времени t^* заняты не все исполнители ресурсных работ* или начинается работа $b^* \in B$, для которой $p(b^*) < p(b)$, то $t'(b) > t^*$.

Работу $a \in P$ назовем критической в K , если

$$t(a) + d(a) + \tau(a) = T(K).$$

Обозначим множество критических ресурсных работ графика $K(A)$ через $B(K)$. Ясно, что если $B(K)$ пусто, то $K(A) = \bar{K}$.

Теорема 1. В календарном графике $K = K(A)$ сети $S \in R_1$ для любой критической работы $\tilde{b} \in B(K)$ существует множество $\tilde{B} \subset B$ такое, что

$$T(K) - T(\bar{K}) < d + \left(1 - \frac{1}{k}\right) d(\tilde{b}) + \tau(\tilde{b}) - \min_{\tilde{b} \in \tilde{B}} \tau(b) \quad (1)$$

$$p(b) \geq p(\tilde{b}), \quad b \in \tilde{B}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать сеть S приведенной относительно множества B . Если $t(\tilde{b}) = t'(\tilde{b})$, то $K(A) = \bar{K}$, и теорема очевидна.

Для $\tilde{b} \in B(K)$

$$t(\tilde{b}) + d(\tilde{b}) + \tau(\tilde{b}) = T(K). \quad (2)$$

Пусть теперь $t(\tilde{b}) > t'(\tilde{b})$ и $t^* < t(\tilde{b})$ — наибольшее значение t , при котором в графике $K(A)$ имеет место хотя бы одно из двух: в момент времени t заняты не все исполнители ресурсных работ или начинается некоторая работа $b^* \in B$ с параметром приоритета $p(b^*) < p(\tilde{b})$. Если не существует значений $t < t(\tilde{b})$, обладающих хотя бы одним из указанных свойств, то положим $t^* = 0$.

Рассмотрим отдельно два случая: 1) $t(\tilde{b}) - t^* \leq d$, 2) $t(\tilde{b}) - t^* > d$.

1) В силу леммы 1 имеем $t'(\tilde{b}) > t^*$, т. е. $t'(b) > t(b) - d$ или

$$t(\tilde{b}) - t'(\tilde{b}) < d. \quad (3)$$

С другой стороны, очевидно

$$T(\bar{K}) \geq t'(\tilde{b}) + d(\tilde{b}) + \tau(\tilde{b}). \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) следует неравенство

$$T(K) - T(\bar{K}) < d,$$

и, тем более, неравенство (1), если в качестве $\tilde{B}$ взять одну работу $\tilde{b}$.

2) Рассмотрим календарный график $K(A)$ в интервале $L = (t^* + d, t(\tilde{b}))$ и положим $l = t(\tilde{b}) - (t^* + d)$. Отнесем к $\tilde{B}$ вместе с $\tilde{b}$ все ресурсные работы, которые выполняются (хотя бы частично) в интервале L . Для всех работ $b \in \tilde{B}$ имеем $l(b) > t^*$ и в силу леммы $t'(b) > t^*$.

Очевидно, имеет место неравенство

$$T(\bar{K}) \geq \min_{b \in \tilde{B}} t'(b) + l + \frac{d(\tilde{b})}{k} + \min_{b \in \tilde{B}} \tau(b) \quad (5)$$

* Т. е. хотя бы один из этих исполнителей не занят выполнением работ из B в течение некоторого промежутка времени, следующего за t^* .

С другой стороны,

$$T(K) = t^* + d + l + d(\tilde{b}) + \tau(\tilde{b}). \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует

$$\begin{aligned} T(K) - T(\bar{K}) &\leq (t^* - \min_{b \in \tilde{B}} t'(b)) + d + d(\tilde{b}) \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \\ &+ \tau(\tilde{b}) - \min_{b \in \tilde{B}} \tau(b) < d + d(b) \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \tau(\tilde{b}) - \min_{b \in \tilde{B}} \tau(b). \end{aligned}$$

Так как, кроме того, $p(b) \geq p(\tilde{b})$ при $b \in \tilde{B}$ по построению $\tilde{B}$, то теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, в частности, следующее предложение.

Теорема 2. Для календарного графика $K = K(A)$, построенного с помощью произвольного алгоритма сдвигов A , имеет место оценка

$$T(K) - T(\check{K}) < \left(2 - \frac{1}{k}\right) d + \max_{b \in B} \tau(b) - \min_{b \in B} \tau(b).$$

Из теоремы 1 можно получить точные оценки для календарных графиков, построенных с помощью специальных алгоритмов сдвига A_1 и A_2 .

Теорема 3. Для $K = K(A_1)$ имеет место оценка

$$T(K) - T(\bar{K}) < \left(2 - \frac{1}{k}\right) d.$$

Доказательство следует из неравенства (1) при помощи соотношений

$$\min_{b \in \tilde{B}} \tau(b) = \min_{b \in \tilde{B}} p(b) \geq p(\tilde{b}) = \tau(\tilde{b}).$$

Теорема 4. Для $K = K(A_2)$ имеет место оценка

$$T(K) - T(\bar{K}) < 2d.$$

Доказательство. При $b \in \tilde{B}$ из неравенства $p(b) \geq p(\tilde{b})$ следует

$$\tau(b) \geq \tau(\tilde{b}) + d(\tilde{b}) - d(b) \geq \tau(\tilde{b}) + d(\tilde{b}) - d,$$

так что

$$\min_{b \in \tilde{B}} \tau(b) \geq \tau(\tilde{b}) + d(\tilde{b}) - d.$$

Отсюда и из неравенства (1) вытекает теорема 4.

6. СЕТИ ТИПА ЛИНИИ СБОРКИ

Сеть $S(P)$ принадлежит классу R_2 , если в приведенной сети $S(P, B)$, во-первых, работе из B предшествуют только работы из B или начальная работа a , во-вторых, за работой из B непосредственно следует не более одной работы из B . Класс сетей R_2 включает в себя деревья (линии сборки), рассмотренные в [3].

Для сетей из класса R_2 имеет место следующее предложение, в справедливости которого легко убедиться, обратившись к определению алгоритма A .

Лемма 2. Если в календарном графике $K(A)$ сети $S \in R_2$ для какой-нибудь работы $\tilde{b} \in B$

$$t(\tilde{b}) > \max_{a < b} (t(a) + d(a)), \quad (7)$$

то в интервале $L = (0, t(\tilde{b}))$ все исполнители ресурсных работ заняты и все работы b , у которых $t(b) < t(\tilde{b})$, имеют $p(b) \geq p(\tilde{b})$.

Теорема 5. В календарном графике $K = K(A)$ сети $S \in R_2$ существуют критическая работа $\tilde{b} \in B(K)$ ($B(K) \neq \emptyset$) и множество $\tilde{B} \subset B$ такие, что

$$T(K) - T(\bar{K}) \leq d(\tilde{b}) \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \tau(\tilde{b}) - \min_{b \in \tilde{B}} \tau(b), \quad (8)$$

$$p(b) \geq p(\tilde{b}), \quad b \in \tilde{B}. \quad (9)$$

Доказательство. Рассмотрим для $b_0 \in B(K)$ цепочку работ $b_0 > b_1 > b_2 > \dots b_k = \tilde{b}$, такую, что

$$t(b_i) = t(b_{i+1}) + d(b_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (10)$$

и либо $t(\tilde{b}) = 0$, либо

$$t(\tilde{b}) > \max_{a < \tilde{b}} (t(a) + d(a)). \quad (11)$$

Ввиду (10) все работы цепочки являются критическими.

В случае $t(\tilde{b}) = 0$ имеем $K(A) = \bar{K}$ и теорема очевидна.

В случае $t(b) > \max_{a < \tilde{b}} (t(a) + d(a))$ отнесем к $\tilde{B}$ вместе с $\tilde{b}$ все ресурсные работы, у которых $t(b) < t(\tilde{b})$. В силу леммы 2 в интервале $L = (0, t(\tilde{b}))$ все исполнители ресурсных работ заняты. Это дает для $T(\bar{K})$ оценку

$$T(\bar{K}) \leq t(\tilde{b}) + \frac{d(\tilde{b})}{k} + \min_{b \in \tilde{B}} \tau(b). \quad (12)$$

Так как $\tilde{b} \in B(K)$, то

$$T(K) = t(\tilde{b}) + d(\tilde{b}) + \tau(\tilde{b}). \quad (13)$$

Из (12) и (13) получаем требуемую оценку (8)

$$T(K) - T(\bar{K}) \leq d(\tilde{b}) \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \tau(\tilde{b}) - \min_{b \in \tilde{B}} \tau(b).$$

Так как в силу леммы 2 $p(b) \geq p(\tilde{b})$ для $b \in \tilde{B}$, то теорема полностью доказана.

Сформулируем предложения, аналогичные теоремам 2—4, являющиеся следствием теоремы 5.

Теорема 6. Для календарного графика $K = K(A)$, построенного с помощью произвольного алгоритма сдвигов A , имеет место оценка

$$T(K) - T(\bar{K}) \leq d \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \max_{b \in B} \tau(b) - \min_{b \in B} \tau(b).$$

Теорема 7. Для $K = K(A_1)$ имеет место оценка

$$T(K) - T(\bar{K}) \leq d \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Следствие 1. Если $d(b) = 1$ для $b \in B$ и $B = P$, то алгоритм A_1 дает оптимальное решение.

Этот результат получен в [3].

Следствие 2. Если $k = 1$, то A_1 дает оптимальное решение.

В [2] в другой формулировке это утверждение приведено в упр. 40 (стр. 78).

Теорема 8. Для $K = K(A_1)$ имеет место оценка

$$T(K) - T(\bar{K}) < d.$$

7. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНОК

Оценки, полученные в разделах 5 и 6 для алгоритмов A_1 и A_2 , асимптотически точны. Докажем соответствующие утверждения для сетей из R_1 .

Теорема 9. Существует последовательность $S_n \in R_1$, для которой календарные графики $K_n(A_1) = K_n$ таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(K_n) - T(\bar{K}_n)}{\left(2 - \frac{1}{k}\right) d_n} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим сети S_n с одной и той же топологией, изображенной схематически на рисунке.

Работы из B_1 , B_2 и b_0 — ресурсные, на рисунке они заштрихованы. Параметры сети S_n — целые числа: $d(b) = d_n$, если $b \in B_1$, $d_n > 1$; $d(b) = 1$, если $b \in B_2$; $d(b_0) = d_n$; $d(\varphi_1) = \tau_n$, $d(\varphi_2) = \tau_n + 1$, $\tau_n > 3d_n$, $d(\psi) = 1$. Число элементов в B_1 равно k , в B_2 равно $d_n \cdot k$. Для $K_n(A_1) = K_n$ легко получить

$$\begin{aligned} T(K_n) &= d_n + d_n + d_n + \tau_n = \\ &= 3d_n + \tau_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Построим теперь календарный график $\bar{K}_n$, в котором от 0 до 1 все k исполнителей не заняты, выполняются только нересурсная работа ψ , от 1 до $d_n + 1$ один из исполнителей выполняет работу b_0 , остальные исполнители выполняют работы из B_2 ; после завершения работ из B_2 выполняются работы из B_1 . Имеем

$$T(\bar{K}_n) \leq 1 + d_n + \left(\frac{d_n}{k} + 1\right) + \tau_n + 1^*. \quad (15)$$

Из (14) и (15)

$$T(K_n) - T(\bar{K}_n) \geq d_n \left(2 - \frac{1}{k}\right) - 3. \quad (16)$$

Из теоремы 3 и (16) получаем, устремляя d_n к бесконечности вместе с n , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(K_n) - T(\bar{K}_n)}{d_n \left(2 - \frac{1}{k}\right)} = 1.$$

* Напоминаем, что τ_n больше d_n .

Теорема 10. Для любого k существует последовательность $S_n \in R_1$, для которой календарные графики $K_n(A_2) = K_n$ таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(K_n) - T(\bar{K}_n)}{2d_n} = 1.$$

Доказательство. Структура сетей S_n сохраняется прежней (см. рисунок), изменятся лишь параметры. Именно $d(b) = d_n$, если $b \in B_1 \cup B_2$, $d_n > 1$; $d(b_0) = 1$; $d(\varphi_1) = d_n + \tau_n - 1$, $d(\varphi_2) = \tau_n + 1$, $\tau_n > 3d_n$; кроме того, $|B_1| = |B_2| = k$.

Для $K_n(A_2) = K_n$

$$T(K_n) = d_n + d_n + 1 + (d_n + \tau_n - 1) = 3d_n + \tau_n. \quad (17)$$

В календарном графике $\bar{K}_n$ от 0 до 1 все исполнители не заняты; от 1 до 2 один из исполнителей выполняет b_0 , после окончания которой выполняет работу из B_2 , остальные исполнители выполняют работы из B_2 ; затем выполняются работы из B_1 .

$$T(\bar{K}_n) = 1 + 1 + d_n + 1 + \tau_n = 3 + d_n + \tau_n. \quad (18)$$

Из (17) и (18)

$$T(K_n) - T(\bar{K}_n) \geq 2d_n - 3. \quad (19)$$

Вместе с оценкой из теоремы 4 это дает, если устремить d_n к бесконечности вместе с n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(K_n) - T(\bar{K}_n)}{2d_n} = 1.$$

Утверждения, аналогичные теоремам 9 и 10, для сетей из класса R_2 получаются таким же способом; для построения последовательности S_n следует удалить на рисунке работы B_1 и φ_1 , дальнейшие построения повторяются почти дословно.

В заключение автор благодарит И. М. Глазмана за помощь, оказанную при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Зуховицкий, И. А. Радчик. Математические методы сетевого планирования. М., «Наука», 1965.
2. И. М. Глазман, В. Г. Новиков. Основы сетевого планирования и управления. Харьков, Изд-во Харьковского ун-та, 1966.
3. Т. С. Нил. Parallel sequencing and assembly line problems, Operat. Res., 1961, v. 9, № 6; русск. пер. в кн. Кибернетический сборн., № 4 (новая серия). М., «Мир», 1967.

Поступила в редакцию
23 II 1968