Оптимальное решение получено при наложении на задачу (9) — (12) дополнительных ограничений $x_{20,20} = 0$, $x_{15,15} \leqslant 2$, $x_{14,6} \leqslant 2$, $x_{12,18} \leqslant 2$. Искомый граф изображен на рис. 3. Длина эйлерова контура равна 4451.

На каждом шаге алгоритма из ограничений (13), которым не удовлетворяет полученное на предыдущем шаге решение, выбиралось ограничение с наименьшим числом отличных от нуля коэффициентов. Не исключена возможность иного принципа выбора соответствующего ограничения. Зависимость объема вычислений от принципа выбора ограничения на каждом шаге алгоритма требует дополнительного исследования.

Автор благодарен Л. А. Славиной и Д. Н. Кравчуку за участие в проведении машинного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. H. Land, A. G. Doig. An automatic method of solving discrete programming programming; Integer programming. Rev. frans. rech. operat., 1964, v. 8, N 31.
2. G. L. Thompson. The stopped simplex method; I. Basic theory for mixed integer programming; Integer programming. Rev. frans. rech. operat., 1964, v, 8, N 31.
3. M. E. Balas. Un algorithme additif pour la résolution des programmes linéaires en variables bivalentes. C. R. Acad. Sci. Paris, 1964, v. 258, N 15.
4. M. E. Balas. Extension de l'algorithme additif à la programmation en nobres entiers et à la programmation non linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris, 1964, v. 258, N 21.
5. Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 1.
6. В. С. Танаев. Некоторые оптимизируемые функции одностадийного производства. Докл. АН БССР, 1965, т. 9, № 1.
7. Z. A. Lomnicki. A «branch-and-bound» algorithm for exact solution of three-machine scheduling problem. Operat. Res. Quart., 1965, v. 16, N 1.
8. E. Ignall, L. Schrage. Application of the branch and bound technique to some flow-shop scheduling problems. Operat. Res., 1965, v. 13, N 3.
9. А. Дж. Гофман, Дж. Б. Краскал. Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
10. Л. В. Канторович, М. К. Гавурин. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. Сб. Проблемы повышения эффективности работы транспорта, М., Изд-во АН СССР, 1949.
11. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства, М., «Наука», 1964.
12. В. С. Танаев. Об одной задаче теории расписаний. Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1964, № 4.
13. А. Е. Залесский. Сведение некоторых комбинаторных задач к целочисленному линейному программированию. Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1965, № 3.

Поступила в редакцию
6 VI 1966

ЭКОНОМИКА 1968
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том IV, вып. 5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А. И. ВЕРЕСКОВ

(Москва)

1. Двухэтапная постановка стохастической задачи линейного программирования подробно рассматривается в книге [1]. Приведем здесь формулировку двухэтапной задачи, ограничиваясь случаем дискретного распределения случайных параметров.

Найти вектор $x \geqslant 0$, удовлетворяющий условиям

$$Ax = d \tag{1}$$

и требованию, чтобы при любом векторе b^t (из заданного множества значений случайного вектора b) задача

$$Bx + Cy^t = b^t,\ y^t \geqslant 0,\ (f,\ y^t) \longrightarrow \min \tag{2}$$

имела решение. Таким образом, векторы y^t вводятся для того, чтобы компенсировать невязку между Bx и b^t, а величина $(f,\ y^t)$ представляет собой штраф за перестройку y^t. Критерием для выбора вектора x является требование минимальности ожидаемых затрат

$$(c, x) + \sum_{t=1}^{N} p_t[\min_{y^t} (f, y^t)] \to \min.$$

Матрицы A, B, C и векторы c, d, f фиксированы; известны также значения случайного вектора b^t и соответствующие им вероятности p_t, $t = 1, \ldots, N$.

В работе [2] описан частный случай двухэтапной задачи, характеризующийся тем, что матрица $C = (E, -E)$. Условия (2) принимают вид

$$Bx + u^t - v^t = b^t,\ u^t \geqslant 0,\ v^t \geqslant 0. \tag{3}$$

Ясно, что такие условия не накладывают ограничений на выбор вектора x: всякий $x \geqslant 0$, удовлетворяющий (1), оказывается допустимым. В связи с этим задача с условиями (1) и (3) была названа «полной» задачей (*complete problem*); как отмечается в [2], существуют и другие двухэтапные задачи, которые естественно относить к классу «полных».

В настоящей работе рассматривается двухэтапная задача, у которой условия (2) имеют вид

$$B^t(x + u^t - v^t) = b^t,\ x + u^t - v^t \geqslant 0,\ u^t \geqslant 0,\ v^t \geqslant 0. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что задача с условиями (1) и (4) является полной в том случае, если каждое из множеств $\{z | B^t z = b^t,\ z \geqslant 0\}$, $t = 1, \ldots, N$ не пусто. В случае несовместности хотя бы одной из групп условий $B^t z = b^t$, $z \geqslant 0$ вся задача планами не обладает.

Ниже излагается возможный экономический смысл задачи и описывается метод ее решения, использующий специфику ограничений (4).

2. Пусть планируется строительство некоторого предприятия; его предполагают оснастить станками пяти типов в количествах $z_1, \ldots, z_5$ соответственно. Ресурсы, отпущенные предприятию, обозначим через b_i, $i = 1, \ldots, \overline{m}$, а технологические коэффициенты, связанные с потреблением этих ресурсов b_{ij}, $i = 1, \ldots, \overline{m}$; $j = 1, \ldots, 5$. Допустимыми являются только те наборы станков, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{5} b_{ij} z_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, \ldots, \overline{m}.$$

Предприятие должно выпускать продукцию трех видов: I, II, III; однако ассортиментный набор пока не известен и будет окончательно определен позднее. По предварительным оценкам, три вида продукции нужно будет производить в отношении $3:2:1$ — с вероятностью p_1; $4:1:1$ — с вероятностью p_2; понадобится только продукция вида I — с вероятностью p_3.

Станок каждого типа может производить лишь какой-то один вид продукции; производительности сведены в таблицу:

		Тип станка 1	2	3	4	5
	I	2	3			
Вид продукции	II			4	1	
	III					3

Если в качестве критерия принимается максимальный выход продукции, то ассортиментному набору $3:2:1$ будет соответствовать следующая задача линейного программирования *

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{5} b_{ij} z_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, \ldots, \overline{m}, \\ 4z_1 + 6z_2 - 12z_3 - 3z_4 = 0, \\ 2z_1 + 3z_2 \qquad\qquad - 9z_5 = 0, \\ z_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, 5, \\ 2z_1 + 3z_2 \to \max. \end{gathered} \tag{5}$$

Будем считать, что нужный максимум найден, и обозначим его через l_1. Тогда множество решений задачи (5) задается ее ограничениями с добавлением неравенства $2z_1 + 3z_2 \geqslant l_1$. Таким образом, многогранное множество решений описывается известными нам условиями, которые запишем в виде $B^1 z \leqslant b^1$, $z \geqslant 0$.

Каждому возможному ассортиментному набору соответствует свое множество оптимальных планов $\{z \mid B^t z \leqslant b^t,\ z \geqslant 0\}$, $t = 1, \ldots, N$. Понятно, что вообще говоря, пересечение этих множеств пусто и мы не можем, планируя предприятие, заказать набор станков $(z_1, \ldots, z_5)$, удовлетворяющий условиям оптимальности для всех случаев. Однако мы можем разбить наш заказ на две части — на вектор предварительного заказа x и на вектор последующей перестройки. Перестройка, т. е. уточнение заказа x, будет осу-

* Требование целочисленности решения мы опускаем.

ществлена, скажем, за год до пуска предприятия, когда требуемый ассортиментный набор станет известен окончательно.

Будем считать, что предварительный заказ оборудования связан с затратами (c, x), а вектор перестройки разобьем на две части — на вектор положительной перестройки $u \geqslant 0$ («дозаказывание» оборудования) и вектор отрицательной перестройки $v \geqslant 0$ (отказ от части заказа x). Естественно считать, что штрафы в этих случаях различны: (r^+, u) — в первом случае и (r^-, v) — во втором.

Каждой возможной ситуации (каждому ассортиментному набору) соответствует свой вектор перестройки $u^t - v^t$; при этом мы требуем, чтобы вектор $z^t = x + u^t - v^t$ удовлетворял условиям $B^t z^t \leqslant b^t$, $z^t \geqslant 0$.

Наша цель — выбрать такой вектор x, чтобы суммарные расходы на заказ оборудования (точнее — стоимость предварительного заказа плюс математическое ожидание стоимости перестройки) были минимальны:

$$B^t(x + u^t - v^t) \leqslant b^t,\ x + u^t - v^t \geqslant 0,$$
$$x \geqslant 0,\ u^t \geqslant 0,\ v^t \geqslant 0,\ t = 1, \ldots, N, \tag{6}$$
$$(c, x) + \sum_{t=1}^{N} p_t[(r^+, u^t) + (r^-, v^t)] \to \min.$$

Здесь x, u^t, v^t — неизвестные $\bar{n}$-мерные векторы-столбцы; остальные векторы и матрицы заданы: c, r^+ и r^- — $\bar{n}$-мерные векторы-строки, b^t — $\bar{m}_1$-мерные векторы-столбцы, B^t — матрицы $(\bar{m}_1 \times \bar{n})$, p_t — числа.

Будет считать, что задачи типа (5) разрешимы, иначе наша постановка теряет смысл. В частном случае, когда решение z^t, $t = 1, \ldots, N$ каждой такой задачи единственно, двухэтапная задача (6) принимает очень простой вид:

$$x + u^t - v^t = z^t, \quad x \geqslant 0, \quad u^t \geqslant 0, \quad v^t \geqslant 0, \quad t = 1, \ldots, N,$$
$$(c, x) + \sum_{t=1}^{N} p_t[(r^+, u^t) + (r^-, v^t)] \to \min. \tag{7}$$

Задача (7) распадается покомпонентно; для решения «маленьких» задач не нужны общие методы линейного программирования, их оптимальные планы находятся чрезвычайно просто [3]. В случае, когда вектор x фиксирован $(x = x^0)$, компоненты оптимальных векторов u^t, v^t определяются так:

$$u^t{}_j = z^t{}_j - x^0{}_j,\ v^t{}_j = 0, \text{ если } z^t{}_j - x^0{}_j \geqslant 0,$$
$$u^t{}_j = 0,\ v^t{}_j = x^0{}_j - z^t{}_j, \text{ если } z^t{}_j - x^0{}_j < 0.$$

Нетрудно видеть, что условия $c \geqslant 0$, $r^+ \geqslant 0$, $r^+ + r^- \geqslant 0$, $c + r^- \geqslant 0$ достаточны для разрешимости (7); ясно, что всякая реальная экономическая ситуация удовлетворяет этим условиям.

Задача (6) является полной — любой вектор $x \geqslant 0$ оказывается допустимым. Однако на выбор предварительного заказа x могут быть наложены какие-то дополнительные ограничения $Ax = d$. Окончательно мы будем рассматривать двухэтапную задачу (6) с учетом условий

$$Ax = d. \tag{8}$$

Здесь A — матрица $(\bar{m}_2 \times \bar{n})$, d — $\bar{m}_2$-мерный вектор-столбец.

Напомним, что в условиях $B^t(x + u^t - v^t) \leqslant b^t$ часть неравенств, возможно, должна быть заменена равенствами (это определяется структурой задачи (5) и аналогичных ей задач), однако это совершенно несущественно для того метода решения, который предлагается ниже.

Если случайные величины, входящие в условия двухэтапной задачи, имеют конечное распределение, то эта задача (точнее говоря, задача, двойственная к ней) может быть решена обычными методами блочного программирования. Способы решения, разработанные специально для некоторых частных случаев, изложены в работах [2] и [4]. В следующих пунктах описывается метод решения двухэтапной задачи (6), (8), имеющий, возможно, и другие, более широкие приложения.

Перепишем задачу (6), (8) в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} x + u^t - v^t = z^t, \quad t = 1, \ldots, N, \\ Ax = d, \quad B^t z^t \geqslant b^t, \\ x \geqslant 0, \quad z^t \geqslant 0, \quad u^t \geqslant 0, \quad v^t \geqslant 0, \\ (c, x) + \sum_{t=1}^{N} p_t [(r^+, u^t) + (r^-, v^t)] \to \min. \end{gathered} \tag{9}$$

Дальнейшее изложение целесообразно вести применительно к блочной задаче более общего вида

$$\begin{gathered} Hy + Tw = h, \; Py = p, \; Qh \leqslant q, \; w \geqslant 0, \; y \geqslant 0, \; h \geqslant 0, \\ (e, y) + (f, w) \longrightarrow \min. \end{gathered} \tag{10}$$

Матрицы T, H, P, Q имеют размеры $(m \times n)$, $(m \times n_1)$, $(m_1 \times n_1)$ и $(m_2 \times m)$ соответственно; w, y и h — неизвестные векторы-столбцы (n-мерный, n_1-мерный и m-мерный); векторы p, q, e и f заданы. Через T_j, $j = 1, \ldots, n$ будем обозначать столбцы матрицы T.

В задаче (9) роль вектора y играет вектор x, матрица T равна $(E, -E)$; в общем случае мы будем считать, что T имеет какой-то специальный вид, допускающий применение к задаче с условиями $Tw = \tau$, $w \geqslant 0$ метода, существенно более экономного, чем симплексный.

Ниже предлагается видоизменение метода разложения, позволяющее использовать выгодные для нас свойства матрицы T в ходе значительной части итераций.

3. Введем обозначения $\{y\} = \{y \mid Py = p, \, y \geqslant 0\}$, $\{h\} = \{h \mid Qh \leqslant q, \, h \geqslant 0\}$ и предположим, что нам известна пара векторов $y^{(0)} \in \{y\}$, $h^{(0)} \in \{h\}$, таких, что задача $[\min(f, w) \mid Tw = h^{(0)} - Hy^{(0)}, \; w \geqslant 0]$ имеет решение. Перепишем задачу (10) в таком виде, какой обычно используется при рассмотрении метода разложения

$$\begin{gathered} Tw + \alpha_0 H y^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\sigma} \alpha_\nu H y^\nu - \beta_0 h^{(0)} - \sum_{\xi=1}^{\gamma} \beta_\xi h^\xi = 0, \\ \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\sigma} \alpha_\nu = 1, \\ \beta_0 + \sum_{\xi=1}^{\gamma} \beta_\xi = 1, \\ w \geqslant 0, \; \alpha_0 \geqslant 0, \; \alpha_\nu \geqslant 0 \, (\nu = 1, \ldots, \sigma), \; \beta_0 \geqslant 0, \; \beta_\xi \geqslant 0 \, (\xi = 1, \ldots, \gamma), \\ (f, w) + (e, y^{(0)}) \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\sigma} (e, y^\nu) \alpha_\nu \to \min. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $y^1, \ldots, y^\sigma$ и $h^1, \ldots, h^\gamma$ — полные наборы вершин многогранников $\{y\}$ и $\{h\}$. Ради краткости изложения мы предполагаем ограниченность этих множеств; все рассуждения легко переносятся на общий случай.

Решив задачу $[\min(f, w) \,|\, Tw = h^{(0)} - Hy^{(0)},\ w \geqslant 0]$, мы получаем ее опорное решение $w^0 = (w_1{}^0, \ldots, w_n{}^0)$, которое пока будем считать невырожденным, базис $Б$ и вектор оптимальных оценок π^0. Вектор

$$(w_1{}^0, \ldots, w_n{}^0, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\sigma}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\gamma}) \tag{12}$$

является опорным планом задачи (11), а его базисом — система векторов $\widetilde{Б}$

$$\widetilde{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} T_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_j \in Б, \begin{pmatrix} Hy^{(0)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h^{(0)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Признаком оптимальности плана (12), как легко видеть, служит выполнение условий

$$(\pi^0 H - e, y^\nu) \leqslant (\pi^0 H - e, y^{(0)}) \text{ для всех } \nu,$$
$$(\pi^0, h^\xi) \geqslant (\pi^0, h^{(0)}) \text{ для всех } \xi.$$

Пусть эти условия не выполнены, т. е. $\max\limits_{y \in \{y\}} (\pi^0 H - e, y) = (\pi^0 H - e, y^1) > (\pi^0 H - e, y^{(0)})$ или $\min\limits_{h \in \{h\}} (\pi^0, h) = (\pi^0, h^1) < (\pi^0, h^{(0)})$. Тогда введение в базисе $\widetilde{Б}$ задачи (11) вектора $((Hy^1)', 1, 0)'$ или соответственно вектора $((-h^1)', 0, 1)'$ даст улучшение опорного плана (12).

Если вводится второй из этих векторов, то это значит, что мы решаем задачу

$$\begin{gathered} Tw + Hy^{(0)} - \beta_0 h^{(0)} - \beta_1 h^1 = 0, \\ \beta_0 + \beta_1 = 1, \\ w \geqslant 0, \quad \beta_0 \geqslant 0, \ \beta_1 \geqslant 0, \\ (f, w) \to \min, \end{gathered} \tag{13}$$

или, что то же самое

$$\begin{gathered} Tw = -Hy^{(0)} + h^{(0)} + \beta_1 (h^1 - h^{(0)}), \\ w \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant 1, \\ (f, w) \to \min, \end{gathered} \tag{13'}$$

т. е. параметрическую задачу с «простой» матрицей T.

При введении в базис $\widetilde{Б}$ вектора $((Hy^1)', 1, 0)'$ мы решаем другую задачу

$$\begin{gathered} Tw + \alpha_0 Hy^{(0)} + \alpha_1 Hy^1 = h^{(0)}, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \\ w \geqslant 0, \ \alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha_1 \geqslant 0, \\ (f, w) + (e, y^{(0)}) \alpha_0 + (e, y^1) \alpha_1 \to \min. \end{gathered} \tag{14}$$

Отбрасывая в целевой функции постоянное слагаемое $(e, y^{(0)})$, перепишем эту задачу

$$\begin{gathered} Tw + (Hy^1 - Hy^{(0)}) \alpha_1 = h^{(0)} - Hy^{(0)}, \\ w \geqslant 0, \ 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1, \\ (f, w) + (e, y^1 - y^{(0)}) \alpha_1 \to \min. \end{gathered} \tag{14'}$$

Известно, что задачу такого «почти частного» вида (с «простой» матрицей T и еще одним вектором условий общего вида) легко решить, если свести ее к параметрической задаче с левой частью Tw [1]. Значит, и в этом случае первый шаг решения задачи (11) оказывается относительно нетрудоемким.

До сих пор мы, по существу, следовали обычному алгоритму метода разложения. Посмотрим, однако, к чему это привело бы нас дальше.

Обозначим решение задачи (14) через $(w_1^1, \ldots, w_n^1, \alpha_0, \alpha_1)$ и предположим, что и $\overline{\alpha}_1$, и α_0 положительны. Когда, обратившись к задаче (11), мы обнаружим, что ее опорный план $(w_1^1, \ldots, w_n^1, \overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \ldots, 0)$ допускает улучшение и выберем в качестве улучшающего вектора $((Hy^\nu)', 1, 0)'$, мы придем к задаче:

$$Tw + \alpha_0 Hy^{(0)} + \alpha_1 Hy^1 + \alpha_\nu Hy^\nu = h^{(0)},$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\nu = 1,$$

$$w \geqslant 0,\ \alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_\nu \geqslant 0,$$

$$(f, w) + (e, y^{(0)})\alpha_0 + (e, y^1)\alpha_1 + (e, y^\nu)\alpha_\nu \to \min.$$

Эта задача принципиально отличается от задачи (14) тем, что ее нельзя привести к виду, подобному (14′); таким образом, наличие специальной структуры у матрицы T не дает нам больше никаких преимуществ, и единственное, что остается делать — это решать главную задачу (11) обычным симплексным методом.

Естественно попытаться организовать вычислительный процесс так, чтобы и в дальнейшем можно было использовать выгодные нам свойства задач типа (14). Для этого мы можем всюду в задаче (11) заменить вектор $y^{(0)}$ на новый вектор $y^{(1)} = \overline{\alpha}_0 y^{(0)} + \overline{\alpha}_1 y^1$, где $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1$ — последние компоненты оптимального плана задачи (14). Ясно, что если опорный план $(w_1^1, \ldots \ldots, w_n^1, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ измененной задачи (11) не оптимален, то можно продолжить его улучшение тем же простым способом, что и раньше. В то же время очевидно, что $(f, w^1) + (e, y^{(1)}) < (f, w^0) + (e, y^{(0)})$. Значит, первая итерация завершилась построением нового плана $(y^{(1)}, w^1, h^{(1)} = h^{(0)})$ задачи (10), дающего меньшее значение целевой функции, чем исходный план $(y^{(0)}, w^0, h^{(0)})$.

Легко проследить, что наличие в базисе задачи (11) вектора $((-h^1)', 0, 1)'$ также вынуждает нас перейти к симплексному методу, поэтому, решив задачу (13), мы должны «закрепить» найденную оптимальную комбинацию векторов $h^{(0)}$, h^1 и ввести в (11) вместо $h^{(0)}$ вектор $h^{(1)} = \overline{\beta}_0 h^{(0)} + \overline{\beta}_1 h^1$ ($\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1$ — компоненты оптимального плана задачи (13)).

4. До сих пор мы предполагали невырожденность вектора w^0 — решения задачи $[\min (f, w) \mid Tw = h^{(0)} - Hy^{(0)},\ w \geqslant 0]$. Наличие вырожденности вносит существенные осложнения в правила улучшения неоптимального плана $(y^{(0)}, w^0, h^{(0)})$ задачи (10).

Пусть $Б_1$ — один из базисов плана w^0, $\pi_1{}^0$ — вектор оптимальных оценок, и для вектора y^1 выполнено соотношение $(\pi_1{}^0 H - e, y^1) > (\pi_1{}^0 H - e, y^{(0)})$. Тогда введение в базис $Б_1$ задачи (11) вектора $((Hy^1)', 1, 0)'$ даст улучшение плана (12) в том и только том случае, если приращения нулевых базисных компонент $w_j{}^0$ будут неотрицательны. Значит, выбирая улучшающий вектор y, мы должны максимизировать функцию $(\pi_1{}^0 H - e, y)$ не на многограннике $\{y\}$, а на его подмножестве $\{y\}_1$, которое определяется дополнительными линейными ограничениями.

Можно показать, что в случае задачи (9) дополнительные ограничения накладываются только на те x_j, для которых $x_j^{(0)} = z_j^{t(0)}$ при некотором $t = 1, \ldots, N$, и что они имеют очень простой вид

$$x_j \geqslant x_j^{(0)}, \quad x_j \leqslant x_j^{(0)} \quad \text{или} \quad x_j = x_j^{(0)}. \tag{15}$$

Если условия $Ax = d$, $x \geqslant 0$ ($y \in \{y\}$ — в терминах задачи (10)) имеют какую-то удобную структуру, то возникающие двухсторонние ограничения не мешают использовать специальные методы для решения полученной задачи $\max\limits_{y \in \{y\}_1} (\pi_1{}^0 H - e, y)$.

Вернемся к общему случаю. Если соотношение $\max\limits_{y \in \{y\}_1} (\pi_1{}^0 H - e, y) > (\pi_1{}^0 H - e, y^{(0)})$ не выполнено, то это еще не значит, что невозможно улучшить план (12) за счет изменения вектора $y^{(0)}$ при $h = h^{(0)}$. Для того чтобы убедиться в невозможности такого улучшения, нам пришлось бы перебрать все базисы плана (12), среди которых, вообще говоря, есть и базисы «неспециального» вида, т. е. такие, которые включают в себя векторы $((Hy^\nu)', 1, 0)'$, $((-h^\xi)', 0, 1)'$. Больше того, можно построить пример задачи (10), обладающей неоптимальным планом $(y^{(0)}, w^0, h^{(0)})$, который может быть улучшен только при одновременном изменении векторов $y^{(0)}$ и $h^{(0)}$. Отсюда ясно, что в общем случае нам не удастся в ходе всего процесса решения ограничиваться рассмотрением базисов специального вида. По-видимому, целесообразно комбинировать на каждой итерации частичный перебор базисов $Б_1, \ldots, Б_r$ плана w^0 с переходом (после некоторого «неудачного» базиса $Б_s$) к обычному симплексному методу.

Переход к симплексному методу осуществляется следующим образом. Решив очередную задачу $\max\limits_{y \in \{y\}_s} (\pi_s{}^0 H - e, y)$ и не обнаружив вектора y, обеспечивающего улучшение плана (12), мы решаем аналогичную задачу максимизации при $y \in \{y\}$. Если $\max\limits_{y \in \{y\}} (\pi_s{}^0 H - e, y) = (\pi_s{}^0 H - e, y^{(0)})$, то изменение $y^{(0)}$ не улучшит плана $(y^{(0)}, w^0, h^{(0)})$; если же $\max\limits_{y \in \{y\}} (\pi_s{}^0 H - e, y) = (\pi_s{}^0 H - e, y^1) > (\pi_s{}^0 H - e, y^{(0)})$, то вводим в базис $\widetilde{Б}_s$ плана (12) вектор $((Hy^1)', 1, 0)'$. При этом план (12) не изменится, так как $y^1 \overline{\in} \{y\}_s$, но переход к симплексному методу анализа задачи (11) обеспечивает, в конечном счете, улучшение плана (12) или установление его оптимальности. Перейдя от (12) к улучшенному плану $(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n, \overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_\sigma, \overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_\gamma)$, мы можем сформировать новую задачу типа (11). Для этого заменим в (11) $y^{(0)}$ и $h^{(0)}$ векторами

$$y^{(1)} = \overline{\alpha}_0 y^{(0)} + \sum_{\nu=1} \overline{\alpha}_\nu y^\nu \qquad h^{(1)} = \overline{\beta}_0 h^{(0)} + \sum_{\xi=1} \overline{\beta}_\xi h^\xi,$$

после чего процесс решения можно продолжать по прежним правилам.

Разложение векторов $((Hy^\nu)', 1, 0)'$, $\nu = 1, \ldots, \sigma$, $((-h^\xi)', 0, 1)'$, $\xi = 1, \ldots, \gamma$ по базису $Б_s$, необходимое для начала симплексного счета, находится в случае задачи (9) очень просто. Заметим также, что при переборе базисов $Б_s$ структура задачи (9) обеспечивает значительные упрощения сравнительно с общим случаем (10): перебор можно организовать так, что, переходя от $Б_s$ к $Б_{s+1}$, мы изменяем лишь одно из дополнительных ограничений (15). Это позволяет легко проверить, остается ли план $y^{(0)}$ (в обозначениях задачи (10)), оптимальный для задачи $\max\limits_{y \in \{y\}_s} (\pi_s{}^0 H - e, y)$, оптимальным и для задачи $\max\limits_{y \in \{y\}_{s+1}} (\pi_{s+1}{}^0 H - e, y)$.

Хотя в общем случае (10) процесс перебора базисов $Б_s$ является, безусловно, очень громоздким, все же можно надеяться, что для каких-то частных случаев «простота» матрицы T позволит построить экономные правила, аналогичные правилам, найденным для задачи (9).

5. В этом пункте излагается прием, ускоряющий сходимость описанного выше метода и обеспечивающий получение решения за конечное число итераций (свойства сходимости предлагаемых методов кратко обсуждаются в конце работы).

Будем рассматривать оптимальное значение задачи линейного программирования с фиксированными f и T

$$[\min(f, w) \,|\, Tw = \tau, w \geqslant 0] \tag{16}$$

как функцию $F(\tau)$. Как показано в [4], $F(\tau)$ — кусочно-линейная выпуклая функция, определенная на выпуклом многогранном конусе $\{\tau\}$. Те векторы τ, при которых оптимальным базисом задачи (16) является некоторый фиксированный базис $Б_s$, также образуют многогранный выпуклый конус $\{\tau\}_s$. Функция $F(\tau)$ линейна на каждом из множеств $\{\tau\}_s$, $s = 1, \ldots, S$.

Ясно, что оптимальное значение задачи $[(e, y) + (f, w) \to \min | Tw = h - Hy, w \geqslant 0]$ может быть записано как $(e, y) + F(h - Hy) = G(y, h)$; при этом $\tau = h - Hy \in \{\tau\}$. Функция $G(y, h)$ определяет также оптимальное значение задачи (10), если $h - Hy \in \{\tau\}$, $h \in \{h\}$, $y \in \{y\}$. Наконец, $G(y, h)$ линейна по совокупности переменных (y, h) на каждом из многогранных множеств $\{y, h\}_s$ $(n_1 + m)$-мерного пространства переменных (y, h), где множества $\{y, h\}_s$, $s = 1, \ldots, S$ определены условиями $\tau = h - Hy \in \{\tau\}_s$, $h \in \{h\}$, $y \in \{y\}$.

Предположим, что, решая задачу (10) методом п.п. 3, 4 или любым другим методом, мы обнаружили, что для некоторого s $(y^{(k)}, h^{(k)}) \in \{y, h\}_s$, $(y^{(l)}, h^{(l)}) \in \{y, h\}_s$ и $G(y^{(l)}, h^{(l)}) < G(y^{(k)}, h^{(k)})$. Тогда, если отрезок $[(y^{(k)}, h^{(k)}), (y^{(l)}, h^{(l)})]$ при продолжении за точку $(y^{(l)}, h^{(l)})$ не сразу выходит из множества $\{y, h\}_s$, то, двигаясь в этом направлении, мы наверняка уменьшим значение функции $G(y, h)$. Возможно, улучшение будет продолжаться и дальше, когда мы покинем множество $\{y, h\}_s$.

Обозначим через w^k, w^l решения задачи (16) при $\tau = \tau^k = h^{(k)} - Hy^{(k)}$, $\tau = \tau^l = h^{(l)} - Hy^{(l)}$ и наметим одно из возможных правил сравнения $(y^{(k)}, w^k, h^{(k)})$ и $(y^{(l)}, w^l, h^{(l)})$, которое позволяет сделать заключение о применимости описанного способа улучшения плана $(y^{(l)}, w^l, h^{(l)})$.

Пусть оказалось, что:
если $w_j^k > 0$, то $w_j^l > 0$ и если $w_j^l = 0$, то $w_j^k = 0$, $j = 1, \ldots, n$; для $y^{(k)}, y^{(l)}$ и $h^{(k)}, h^{(l)}$ выполнены условия (примерно того же типа, что и для w^k, w^l), обеспечивающие включения $y^{(l)} + \lambda(y^{(l)} - y^{(k)}) \in \{y\}$, $h^{(l)} + \lambda(h^{(l)} - h^{(k)}) \in \{h\}$ при некоторых $\lambda > 0$.

Тогда, как легко видеть, планы w^k и w^l обладают общим базисом $Б_s$, и найдется $\bar{\lambda} > 0$, такое, что $\tau^l + \lambda(\tau^l - \tau^k) \in \{\tau\}_s$, $y^{(l)} + \lambda(y^{(l)} - y^{(k)}) \in \{y\}$, $h^{(l)} + \lambda(h^{(l)} - h^{(k)}) \in \{h\}$ при $0 < \lambda \leqslant \bar{\lambda}$.

Отсюда следует, что план $(y^{(l)}, w^l, h^{(l)})$ можно улучшить, решая параметрическую задачу $[\min(f, w) \,|\, Tw = \tau^l + \lambda(\tau^l - \tau^k),\ w \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0]$ с «простой» матрицей T. Полученный план $(y^{(l+1)}, w^{l+1}, h^{(l+1)})$ попытаемся вновь улучшить тем же способом; в случае неудачи переходим к правилам п.п. 3, 4.

Выполнение условий (17) обеспечивает принадлежность точек $(y^{(k)}, h^{(k)})$, $(y^{(l)}, h^{(l)})$ одной и той же грани множества $\{y, h\}_s$, а также возможность улучшения точки (y, h) за счет движения в этой грани. Это движение будет продолжаться, во всяком случае, до выхода на грань меньшей размерности того же множества $\{y, h\}_s$. Правило типа (17) нетрудно сформулировать таким образом, что возможность улучшения $(y^{(l)}, h^{(l)})$ в пределах $\{y, h\}_s$ будет всегда обнаружена. Общее число граней всех многогранников $\{y, h\}_s$, $s = 1, \ldots, S$ конечно, поэтому изложенный процесс можно рассматривать как процесс движения по вершинам различных многогранников $\{y, h\}_s$. (Переход от одной вершины к другой осуществляется через какие-то промежуточные точки, не являющиеся угловыми.) Целевая функция $G(y, h)$ задачи (10) линейна на каждом из множеств $\{y, h\}_s$, поэтому ее минимум на множестве $\bigcup\limits_s \{y, h\}_s$ достигается в одной из вершин многогранников $\{y, h\}_s$. Таким образом, решение задачи (10) будет получено за конечное число итераций.

Последнее замечание существенно, так как метод решения п.п. 3, 4 не обеспечивает достижения оптимума, если улучшение будет осуществляться только за счет движения по базисам $\bar{B}_s$ специального вида (или с «недостаточно интенсивным» привлечением симплексного метода). Может оказаться даже, что оптимальный план не является предельной точкой последовательности $(y^{(0)}, w^0, h^{(0)}), \ldots, (y^{(k)}, w^k, h^{(k)}), \ldots$. Причина этого заключается в том, что правила п.п. 3, 4 не исключают зигзагообразного движения с уменьшающимся шагом «по дну оврага» функции $G(y, h)$. В этом случае метод п. 5 «подталкивает» процесс в выгодном направлении, переводя точки некоторой подпоследовательности в овраг меньшей размерности.

Очевидным недостатком изложенного в п. 5 метода является необходимость хранить и обрабатывать значительную часть информации о «старых» планах $(y^{(k)}, w^k, h^{(k)})$. Представляется, однако, что основная масса планов $(y^{(k)}, w^k, h^{(k)})$ будет сосредоточена в сравнительно небольшом числе множеств $\{y, h\}_s$; это должно упростить сравнение точек $(y^{(k)}, h^{(k)})$ с очередной точкой $(y^{(l)}, h^{(l)})$.

В заключение автор приносит свою благодарность А. И. Гладышевскому и Б. Н. Михалевскому за помощь в постановке задачи и С. М. Мовшовичу — за постоянное внимание и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966.
2. R. Wets. Programming under Uncertainty: The Complete Problem. Zeitschrift für Wahr. und verw. Gebiete, 1966, v. 4, N 1.
3. А. И. Вересков. Линейная модель оптимального перспективного планирования со случайной критериальной функцией. Труды Всесоюзой конференции по экономической кибернетике. Батуми, 1966 (ротапринт).
4. R. Wets. Programming under Uncertainty: The Equivalent Convex Program. Journal SIAM, 1966, v. 14, N 1.

Поступила в редакцию
7 VI 1967