ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1968 том IV, вып. 5

ПРАКТИЧЕСКИЙ ОПЫТ

ОПЫТ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Н. П. МАТРЯШИН

(Харьков)

В статье рассматривается задача о перевозках сахарной свеклы от свеклопунктов к заводам. При этом количество свеклы на каждом свеклопункте известно в виде случайных величин, принимающих конечное число значений с определенными вероятностями, т. е. в виде конечного набора возможных объемов свеклы. Потребности сахарных заводов определяются одинаковыми длительностями сезона производства и их средними суточными мощностями. Приводятся и обсуждаются результаты расчетов указанной задачи для 10 заводов Харьковского свекло-сахарного треста.

Рассмотрим транспортную модель перевозок сахарной свеклы от n поставщиков (свеклопунктов) к m потребителям (сахарным заводам). Считаем известными потребности A_j ($j = 1, \ldots, m$) заводов в сахарной свекле на планируемый период сокодобывания и объемы B_i, $i = 1, \ldots, n$ свеклы на каждом из свеклопунктов. Пусть C_{ij} — затраты на повагонную перевозку единицы объема сахарной свеклы от i-го свеклопункта на j-й завод, а X_{ij} — планируемый объем перевозок свеклы между i-м свеклопунктом и j-м заводом.

Необходимо, чтобы из каждого свеклопункта была вывезена вся свекла и чтобы каждый завод полностью удовлетворил свои потребности в сахарной свекле. Ищутся наиболее рациональное прикрепление свеклопунктов к заводам и объем перевозок между ними, при которых общая стоимость перевозок была бы минимальной. Перечисленные выше условия приводят к следующей модели линейного программирования

$$\sum_{i,j} C_{ij}X_{ij} \longrightarrow \min \tag{1}$$

$$\sum_{i} X_{ij} = A_j, \tag{2}$$

при условиях

$$\sum_{j} X_{ij} = B_i, \tag{3}$$

$$X_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

В обычных задачах линейного программирования предполагается, что все параметры, т. е. коэффициенты целевой функции, неравенств и равенств и вектор правых частей (вектор имеющихся в нашем распоряжении ресурсов), являются известными числами, о которых можно сказать с уверенностью, что они достоверны и свободны от ошибок. Очень часто такое требование в экономических моделях не является реальным. Ошибки могут быть различного рода: ошибки, связанные с определением оценок, ошибки, возникающие в результате агрегирования элементов исследуемой системы или процесса. Большое влияние на определение оптимальных действий оказывают колеблемость спроса населения, колеблемость рыночных цен, случайный характер урожайностей, колеблемость фактического выполнения различного рода нормативов и т. п. В повседневной практике экономические данные подвержены различного рода ошибкам.

В линейном стохастическом программировании все или часть параметров являются случайными величинами с известными или неизвестными законами распределения. Исследуем с этой точки зрения модель (1) — (4).

Отметим, что и в модели (1) — (4) величины A_j, C_{ij}, B_i обычно рассматриваются как известные, строго детерминированные. Количество свеклы B_i на i-м свеклопункте зависит от площади посева свеклы S_i и соответствующей ей средней урожайности b_i, т. е. $B_i = S_i b_i$ на планируемый период площади посевов свеклы можно считать известным. Но соответствующие этим площадям урожайности в силу колебаний природных и климатических условий не могут быть точно предсказаны, и расхождения между фактической и планируемой урожайностями могут быть значительными. Следовательно, считать известными величины B_i нельзя. Отсюда ясно, что транспортная модель (1) — (4) не отражает условия, связанные со случайной колебаемостью размеров урожайности.

Как показали исследования, распределения урожайности по годам на каждом свеклопункте хорошо подчиняются нормальному закону. Решение задач стохастического программирования связано с огромными вычислительными трудностями. Существующие методы их решения [1, 2] трудоемки и практически мало пригодны. Однако в рассматриваемом случае оказывается, что возможно поступить значительно проще. А именно, сделав ряд упрощающих предположений относительно величин b_i, укажем задачу линейного стохастического программирования, решением которой является интересующий нас оптимальный план перевозок сахарной свеклы с учетом колебаемости урожайности, а затем известным способом сведем ее к обычной задаче линейного программирования, эквивалентной построенной нами задаче стохастического программирования.

В результате обработки эмпирических данных о размерах урожайности b_i по годам мы получили для них непрерывные, а именно, нормальные распределения с определенными средними и дисперсиями. Затем каждую из случайных величин b_i с непрерывными распределениями аппроксимируем конечным набором b_{ik}, $k = 1, \ldots, k_i$ с известными вероятностями p_{ik}. Соответственно каждая величина B_i получит набор $B_{ik} = S_i b_{ik}$ с теми же вероятностями p_{ik}. Не уменьшая общности, можно считать, что B_{ik} по индексу k перенумерованы в порядке возрастания их величин. Обозначим вероятность того, что количество имеющейся свеклы на i-м свеклопункте превышает B_{ik}, через $q_{ik} = 1 - \sum\limits_{\mu=1}^{k} p_{i\mu}$. Из случайного характера величин B_i следует неизбежность нарушений равенств (3) в обе стороны. Если установить штраф за единицу объема невывезенной свеклы из i-го свеклопункта в размере h_i, то задаче о перевозках сахарной свеклы от имеющихся свеклопунктов к заводам можно поставить в соответствие следующую экономико-математическую модель стохастического программирования. Необходимо минимизировать математическое ожидание суммарных затрат, состоящих из расходов на перевозку свеклы и штрафа за неперевезенную на заводы свеклу из свеклопунктов.

$$E\left(\sum_{i,j} C_{ij}X_{ij} + \sum_i h_i y_i^+\right) \to \min \tag{5}$$

при условиях

$$\sum_i X_{ij} = A_j,$$

$$\sum_j X_{ij} + y_i^+ - y_i^- = B_i,$$

$$X_{ij} \geqslant 0;\ y_i^+, y_i^- \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m,$$

где

$$y_i^+ = B_i - \sum_j X_{ij},\ y_i^- = 0,\ \text{если}\ B_i \geqslant \sum_j X_{ij},$$

$$y_i^+ = 0,\ y_i^- = \sum_j X_{ij} - B_i,\ \text{если}\ B_i < \sum_j X_{ij}.$$

Переменная величина y_i^+ в приведенной выше модели обозначает количество свеклы, не перевезенное на заводы с i-го свеклопункта, а y_i^- — количество свеклы, на которое объем свеклы на i-м свеклопункте меньше планового объема $\sum\limits_j x_{ij}$. Следует отметить, что в настоящей задаче штраф устанавливается только за величину y_i^+, т. е. только за оставшуюся неперевезенную свеклу на заводы с i-го свеклопункта.

Математический прием, примененный в работе [3] для распределительной задачи со случайным дискретным спросом, в нашем случае позволяет указать специальную, эквивалентную задаче (5), задачу линейного программирования. Решение этой эквивалентной задачи состоит в нахождении таких чисел X_{ij} и y_{ik}, которые минимизируют линейную форму

$$\sum_{i,j} c_{ij}X_{ij} - \sum_i h_i \sum_{k=1}^{k_i} q_{ik}y_{ik} \to \min \tag{6}$$

и удовлетворяют ограничениям

$$\sum_i X_{ij} = A_j, \tag{7}$$

$$\sum_j X_{ij} = \sum_{k=1}^{k_i} y_{ik}, \tag{8}$$

$$0 \leqslant y_{ik} \leqslant \Delta_{ik}, \tag{9}$$

$$X_{ij} \geqslant 0;\ y_{ik} \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, k_i, \tag{10}$$

где $\Delta_{ik} = B_{ik} - B_{i,\,k-1}$, $(\Delta_{i0} = 0)$, обозначает приращения объемов свеклы на i-м свеклопункте.

Из вышеизложенного ясно, что задача стохастического программирования (5), учитывающая в некоторой степени такой экономический фактор, как естественные колебания урожайности на свеклопунктах, более глубоко отражает экономическую действительность, а возможность сведения ее решения к решению специальной детерминированной задачи линейного программирования позволяет производить полезные для практики расчеты.

Объектом практического приложения описанных выше рассуждений был избран Харьковский свекло-сахаротрест, в распоряжении которого в 1966 г. находилось 11 сахарных заводов и 55 свеклоприемочных пунктов, в том числе и призаводские пункты. В ходе анализа из модели был исключен Мурафский сахарный завод, который полностью обеспечивает себя свеклой призаводского свеклопункта и не имеет железнодорожной связи с другими заводами и свеклопунктами.

Было построено распределение урожайности по свеклопунктогодам. Это распределение оказалось достаточно близким к нормальному (были применены критерии χ^2 Пирсона и Колмогорова). Ввиду того, что по каждому свеклопункту урожайности были известны только за три года, оказалось невозможным построить распределение урожайности на каждом свеклопункте по годам. Было предложено, что интересующее нас распределение близко к нормальному. В пользу этого, кроме всех прочих соображений, говорят и результаты построения распределения урожайности по свеклопунктогодам. Каждая из величин B_i была аппроксимирована тремя значениями B_{ik}, $k = 1, 2, 3$. При этом b_{ik} — урожайность на i-м свеклопункте, которая может встретиться с известной вероятностью p_{ik}. Максимальное значение $k = 3$ было выбрано небольшим из желания ограничить размеры модели и сделать ее приемлемой для решения на ЭВМ.

Известно, что оптимальной длительностью сезона производства для всех сахарных заводов считается 110—120 рабочих дней. Исходя из имеющихся среднесуточных мощностей сахарных заводов a_j и оптимального срока сокодобывания n_j, одинакового для всех сахарных заводов, можно рассчитать потребности заводов в сахарной свекле следующим образом: $A_j' = a_j n_j$.

При решении задачи (6)—(10) было взято $n_j = 130$, т. е. срок работы всех заводов установлен в 130 суток. При этом руководствовались следующим. Общая потребность в свекле $\sum\limits_j A_j'$ всех сахарных заводов должна быть такой, чтобы за принятые n_j суток можно было переработать хотя бы минимально возможное количество свеклы на всех свеклопунктах $\sum\limits_i B_{i1}$. Оказалось, что 130 являются наименьшим возможным количеством суток, удовлетворяющим поставленному условию. Но размеры задачи (6) все еще не позволяют использовать имеющуюся стандартную подпрограмму симплекс-метода для ЭВМ М-20. Поэтому было решено, что имеющаяся свекла на 10 призаводских свеклопунктах не подлежит возможному перераспределению между сахарными заводами и ее общее количество на запланированный период известно и равно произведению площади посева свеклы на среднюю урожайность. Таким образом, на призаводские свеклопункты фактически не было распространено утверждение о случайном характере колеблемости урожайности. Это позволило сократить количество основных ограничений с 64 до 54. После этого из потребности каждого сахарного завода в свекле необходимо было исключить среднее количество свеклы, которое может дать соответствующий призаводской свеклопункт:

$$A_j = a_j n_j - S_j b_j.$$

По той же причине переменные y_{i1} были зафиксированы на своей верхней возможной границе $B_{i1} : y_{i1} = B_{i1}$, а ступени приращения объема свеклы на i-м свеклопункте рассчитаны по формуле $\Delta_{ik} = B_{ik} - B_{i,\,k-1}$, $k = 2, 3$. Была составлена сетка расстояний от каждого из 44 свеклопунктов до 10 заводов. При помощи этой сетки по железнодорожному тарифу на повагонные перевозки сахарной свеклы были найдены затраты C_{ij} на перевозку 1 *т* свеклы с i-го свеклопункта на j-й сахарный завод. Так как по действующим железнодорожным тарифам взимается одинаковая плата за 1 *т* груза при повагонной перевозке в каждом из условленных интервалов расстояний, то оказалось, что при прикреплении свеклопунктов к заводам равноценны ми при отборе оказываются свеклопункты с довольно разными расстояниями до одного и того же сахарного завода. Например, тариф за 1 *т* свеклы при повагонной перевозке до 50 *км* один и тот же равен 0,43 руб. Расстояния от Козеевского (5-го) свеклопункта до Пархомовского (2-го) и Первухинского (3-го) сахарных заводов соответственно равны 18 и 32 *км*. Стоимость перевозки 1 *т* свеклы, как указано выше, от этого свеклопункта до обоих заводов одна и та же (0,34 руб.).

С точки зрения минимизации транспортных расходов, при таком тарифе безразлично, к какому из указанных заводов будет прикреплен Козеевский свеклопункт. В общей экономико-математической модели это приводит к встречным перевозкам, а следовательно, и к неоптимальным действиям. Учитывая эти обстоятельства, мы построили дифференцированный тариф. Так, например, для приведенных выше расстояний 18 и 32 *км* тариф стал 0,398 и 0,412 руб. соответственно вместо 0,43 руб. за 1 *т*.

Штраф h_i за 1 *т* невывезенной свеклы из i-го свеклопункта был установлен в размере 27 руб. ($i = 1, \ldots, 44$). Такой штраф соответствует закупочной цене за 1 *т* сахарной свеклы. Возможны и другие соображения по поводу установления размеров штрафа. Например, можно положить h_i равным разности между закупочной ценой и стоимостью сахарной свеклы, использованной как корм для животных. Таким образом, результирующая экономико-математическая модель, по которой велся расчет оптимального плана перевозок свеклы, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{44}\sum_{j=1}^{10} C_{ij}X_{ij} - \sum_{i=1}^{44} h_i \sum_{k=2}^{3} q_{ik}y_{ik} \to \min \tag{11}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{44} X_{ij} = A_j,$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{ij} = B_{i1} + y_{i2} + y_{i3},$$

$$0 \leqslant y_{i2} \leqslant \Delta_{i2}, \quad 0 \leqslant y_{i3} \leqslant \Delta_{i3},$$

$$X_{ij} \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, 44; \; j = 1, \ldots, 10.$$

Эта задача имеет 54 основных и 88 двусторонних ограничений, а также 528 переменных.

Задача (11) была рассчитана на ЭВМ М-20 при помощи программы модифицированного симплекс-метода с использованием мультипликативного представления обратной матрицы (метод улучшения допустимого вектора), составленной М. М. Андреевой в Новосибирске. При этом вместо лентопротяжных механизмов, предусмотренных в программе Андреевой, применялись барабаны, что дало значительную экономию времени работы машины. Время работы ЭВМ М-20, необходимое для нахождения оптимального плана задачи (11), равно примерно 15 мин. Отметим, что

Таблица 1

Оптимальный план перевозок свеклы для стохастической задачи (тыс. Т)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	51,9									
2	48,8									
3	14									
4	27,2									
5		15,1								
6		14,5	5							
7			28,3							
8			8,7							
9			34,6							
10			5							
11				3						
12			72,2		5,1	5,4				
13					38,2					
14							21,6			
15							116,6	3,8		
16								35,7		
17								39,7		
18								60,6		
19								38,7		
20										9
21								8,4		54,7
22								24,4		
23										38,2
24									46	
25									19,3	
26	17,8									
27	15,2									
28	5,2								17,8	
29									62,3	
30									33,4	
31									19	
32									39,6	
33										37,6
34										38,2
35										25
36				13,3						
37	4,4			45,8						
38	1,5					23,9		7		
39									29,7	
40									17,4	
41									22,0	
42									18,2	
43									25,8	
44									14,4	

для решения задачи (11) имеется специальный алгоритм, разработанный и описанный в работе [14]. Но применение этого алгоритма связано с необходимостью реализации его на ЭВМ, что для одного раза нерационально. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

При построении табл. 1 заводы и свеклопункты были занумерованы в том порядке, в котором они фигурируют в отчетах Харьковского свеклосахарного треста. Заметим, что во всех таблицах, приведенных в этой работе, объемы перевозимой свеклы исчисляются в тысячах тонн. Индексам i соответствуют свеклопункты ($i = 1, \ldots, 44$), а индексам j — заводы ($j = 1, \ldots, 10$). Из полученного оптимального плана стохастического программирования ясно, что в отличие от существующего порядка прикрепления свеклопунктов к сахарным заводам, необходимо возить сахарную свеклу от восьми свеклопунктов на заводы 3, 5, 10, 10, 10, 1, 1 и 6 соответственно в размере 87,3; 100; 100; 86,7; 100; 100 и 73,8% (от общего количества имеющейся на каждом из них свеклы). Очевидно, что имеются значительные расхождения между существующим прикреплением свеклопунктов к сахарным заводам и оптимальным планом стохастической задачи. К сожалению, нельзя сравнить существующие транспортные издержки с полученными при помощи оптимального плана стохастической задачи по таким причинам:

а) транспортные издержки зависят от количества перевозимой свеклы, а они различны в стохастической задаче и в любом из трех известных автору сезонов сокодобывания;

б) транспортные издержки даже в случае одинакового общего объема перевозимой свеклы будут различны вследствие того, что в стохастической модели использовался дифференцированный тариф, который отличается от существующего.

Интересно сравнить оптимальные планы стохастической и соответствующей ей транспортной задач. Для этого была решена следующая экономико-математическая модель:

$$\sum_{i=1}^{44}\sum_{j=1}^{10} C_{ij}X_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{44} X_{ij} = A_j, \qquad j = 1, \ldots, 10, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{ij} = \bar{B}_i, \qquad i = 1, \ldots, 44,$$

$$X_{ij} \geqslant 0,$$

где $\bar{B}_i$ — ожидаемый объем свеклы на i-м свеклопункте. Результаты расчетов представлены в табл. 2. Транспортная задача (12) является открытой, причем $\sum\limits_i \bar{B}_i > \sum\limits_j A_j$. Для решения этой модели использовался обычный в таких случаях прием сведения к закрытой транспортной задаче путем введения фиктивного завода 11 с потребностью в свекле в объеме $\sum\limits_i \bar{B}_i - \sum\limits_j A_j$ тонн с нулевыми коэффициентами в целевой функции.

Сравнивая оптимальные планы стохастической (табл. 1) и транспортной (табл. 2) задач, видим, что в основном порядок прикрепления свеклопунктов к заводам один и тот же. В транспортной задаче два свеклопункта (38-й и 42-й) полностью прикреплены к фиктивному заводу, а 21-й бо́льшую половину свеклы отправляет на фиктивный завод, остальную — на 10-й сахарный завод. В оптимальном плане задачи, эквивалентной задаче (5) стохастического программирования, этот же свеклопункт 86,7% общего объема своей свеклы должен возить на 10-й сахарный завод, а остаток — на 8-й.

Известно, что целевая функция задачи (6) отличается от целевой функции задачи линейного стохастического программирования (5) на величину

$$\sum_i h_i \sum_{k=1}^{k_i} q_{ik}\Delta_{ik}.$$

Таким образом, нетрудно видеть, что оптимальное значение целевой функции в задаче (5) равно 3382556,781 руб.; причем часть, связанная с транспортными расходами, равна 679738,521 руб., а штраф — 2702818,26 руб. Оптимальное значение целевой функции транспортной задачи значительно меньше от оптимума целевой функции стохастической задачи и равно 663589,7 руб. Огромный размер штрафа в оптимальном значении целевой функции задачи (5) объясняется такими причинами:

а) бо́льшим (27 руб. за 1 т) штрафом, использованным при расчетах. Такой штраф является наибольшим из возможных штрафов, имеющих экономический смысл;

б) такой продолжительностью сезона производства $n_j = 130$, что можно гаран-

Таблица 2

Оптимальный план перевозок свеклы для транспортной задачи (тыс. т)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	51,9										
2	48,8										
3	14										
4	27,2										
5		17,6									
6		12,1	8,6								
7			30,2								
8			10								
9			37,9								
10			7,7								
11				4							
12			59,6		1,2	27,2					
13					42,1						
14							24,2				
15							113,9	10,8			
16								42,3			
17								43,1			
18								65,6			
19								43,7			
20										11,4	
21										33,1	35,1
22								12,9			13,8
23										43,9	
24									46		
25									19,3		
26	17,8										
27	15,2										
28	8,7								14,3		
29									63,8		
30									35,8		
31									19		
32									39,6		
33										43,3	
34										42,3	
35										28,6	
36				14							
37	2,4			44,1		2,2					5,2
38											36,7
39									34,6		
40									17,4		
41									26,1		
42											21,7
43									32		
44									16,9		

тировать переработку наименьшего возможного объема сахарной свеклы $\sum\limits_i B_{i1}$. Но в основном общее количество свеклы колеблется вокруг некоторой средней величины $\sum\limits_i \bar{B}_i$, которая значительно отличается от наименьшей. Это приводит к бóльшим размерам общего суммарного штрафа. Следовательно, планируя перевозки сахарной свеклы от свеклопунктов к заводам, необходимо устанавливать n_j такие, чтобы гарантировать переработку свеклы в объеме, большем при равном $\sum\limits_i B_i$. В нашем случае должны быть $n_j \geqslant 137$ суток.

Итак, можно сделать следующие выводы, которые помогут улучшить результаты расчетов и увеличить их практическую ценность.

1) Нужна точная информация в необходимом объеме. В данной задаче это относится к урожайностям b_i по каждому свеклопункту за достаточно большой отрезок времени.

2) После выполнения предыдущего условия необходима более точная аппроксимация величин B_i с непрерывным распределением при помощи конечного достаточно большого набора B_{ik}.

3) Экономически обоснованный выбор штрафов h_i позволит сделать еще один шаг в получении практически пригодного оптимального плана перевозок свеклы. Таковым является, например, второй из указанных в работе штрафов. Применение указанных выше штрафов позволит, в частности, уменьшить разрыв между величиной суммарного штрафа и той части значения целевой функции задачи (5), которая связана с транспортными расходами.

4) В суммарных расходах на перевозку сахарной свеклы можно учесть затраты на погрузку и разгрузку.

5) Не следует устанавливать в приведенной модели одну и ту же продолжительность сезона производства n_j для всех заводов. Этот срок целесообразнее для некоторых заводов увеличить, а для других — уменьшить. Критериями для увеличения срока сокодобывания на определенном заводе могут служить, например, повышенный по отношению к остальным заводам процент выхода сахара, объемы свеклы на свеклопунктах и их пропускные способности и т. п.

6) Увеличение продолжительности сезона производства до размеров, указанных в п. 5), позволит улучшить, т. е. приблизить к действительности, полученные решения обеих задач на перевозку сахарной свеклы от свеклопунктов к заводам. Ибо оптимальный план, например, транспортной задачи, содержащий перевозки на фиктивный завод, не может быть приемлем для практического использования вследствие того, что сахарная свекла — товар скоропортящийся, теряющий при длительном хранении процент сахаристости. А огромные размеры штрафа в целевой функции стохастической задачи еще раз указывают на необходимость увеличения длительности сезона производства до указанных выше размеров. В целом результаты расчетов показывают на полезность такого подхода к задаче планирования перевозок сахарной свеклы от свеклопунктов к заводам — подхода, учитывающего колеблемость урожайности свеклы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Dantrig, A. Madansky. On the solution on two-stage linear programs under uncertainty. Proc. fourth Berkeley symposium on Mathem. statistics and probability, v. 1, J. Neyman ed. Univ. of California, Berkeley, 1961.
2. A. Madansky. Methods of solution of linear programs under uncertainty. Opns. Res., 1962, v. 10, N 4.
3. A. R. Ferguson, G. B. Dantzig. The allocation of aircraft to routes an example of linear programming under uncertain demand. Management Science, 1956, v. 3, N 1.
4. G. B. Dantzig. Linear programming under uncertainly. Management Science, 1955, v. 1, N 3.

Поступила в редакцию
1 II 1968