ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1971
том VII, вып. 1

ПРАКТИЧЕСКИЙ ОПЫТ

ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАБОТЫ предприятий лесозаготовительной промышленности

М. Л. ЛУКАЦКАЯ

(Новосибирск)

При построении динамических моделей развития одного или нескольких предприятий возникают трудности, связанные с методикой анализа и учета динамики изменения основных показателей их работы, особенно в том случае, когда динамика задается результатами небольшого числа наблюдений во времени. (Это может быть обусловлено как отсутствием необходимой информации, так и нецелесообразностью учета более длительного времени.)

В данной статье рассматривается возможность применения вероятностно-статистических методов анализа эмпирических функций распределения (плотности) при решении задач динамического характера. Анализ динамики основных экономических показателей с помощью исследования их эмпирических распределений в изучаемой совокупности предприятий проводится для группы 132 леспромхозов Сибири (по информации об их работе за четырехлетний период).

Возьмем следующие группы показателей работы леспромхоза:

показатели эффективности использования труда — выработка товарной продукции на одного работающего промышленно-производственного персонала, выработка товарной продукции на рубль заработной платы промышленно-производственного персонала, вывоз древесины на одного рабочего лесозаготовок;

показатели эффективности использования производственных фондов — прибыль от реализации на рубль производственных фондов, выпуск товарной продукции на рубль производственных фондов, прибыль по балансу на рубль основных фондов;

показатели эффективности использования суммарных производственных затрат — себестоимость 1 $м^3$ древесины, прибыль от реализации на рубль затрат.

Анализ парных коэффициентов корреляции, вычисленных для каждого года отдельно, указывает на наличие существенной взаимосвязи внутри каждой группы показателей. Например, коэффициенты корреляции товарной продукции на одного работающего и товарной продукции на рубль заработной платы для четырех лет равны 0,86; 0,83; 0,85; 0,84; коэффициенты корреляции прибыли от реализации на рубль производственных фондов и прибыли по балансу на рубль основных фондов равны 0,96; 0,93; 0,98 и 0,97 соответственно. Это свидетельствует о «взаимозаменяемости» (в пределах поставленной задачи) рассматриваемых показателей внутри указанных групп. Поэтому для дальнейшего анализа оставим три показателя: выработка товарной продукции на одного работающего — Y_1 (тыс. руб./чел.), прибыль от реализации на рубль производственных фондов — Y_2 (коп.), себестоимость древесины — Y_3 (руб./м^3).

ВЫРАБОТКА ТОВАРНОЙ ПРОДУКЦИИ НА ОДНОГО РАБОТАЮЩЕГО

Динамика некоторых статистических характеристик совокупности 132 леспромхозов по исследуемому показателю приведена в табл. 1.

Можно ли считать, что математическое ожидание распределения выработки товарной продукции на одного работающего увеличивается? Какие выводы можно сделать относительно динамики других параметров распределения: дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса?

Проанализируем функции распределения показателя Y_1 для каждого года. Стандартные ошибки коэффициентов асимметрии (γ_1) и эксцесса (γ_2) для нормального распределения равны $\sqrt{6/n}$ и $\sqrt{96/n}$ соответственно [1]. Для количества наблюдений $n = 132$ значения $\sigma_{\gamma_1} \approx 0{,}213$, $\sigma_{\gamma_2} \approx 0{,}853$. Только одна величина (коэффициент асимметрии в 1961 г., табл. 1) отклоняется от своего среднего значения (нуля) более чем на 1,645 своей стандартной ошибки.

Таблица 1

Динамика статистических характеристик выработки товарной продукции на одного работающего (тыс. руб./чел.)

Год	Среднее значение	Среднеквадратическое отклонение	Коэффициенты		
			вариации	асимметрии	эксцесса
1961	3,17	0,88	27,8%	0,50	—0,19
1962	3,28	1,03	31,5%	—0,23	1,22
1963	3,56	0,96	27,0%	0,20	—0,80
1964	3,73	1,01	27,1%	0,16	—0,60
Среднее	3,43	0,97	—	—	—

Таблица 2

Проверка гипотез о согласии эмпирических функций распределения товарной продукции с нормальным распределением

Критерий	Статистики		1961	1962	1963	1964
Пирсона		χ_0^2	6,7	23,6	12,2	6,7
		ν	9	9	9	9
		P	$\sim 0,67$	$\sim 0,01$	$\sim 0,20$	$\sim 0,67$
Дифференциальный	$\alpha = 0,10$	m'	0	4	1	0
		P_α	1,00	0,03	0,72	1,00
	$\alpha = 0,05$	m'	0	2	0	0
		P_α	1,00	0,12	1,00	1,00
	$\alpha = 0,01$	m'	0	0	0	0
		P_α	1,00	1,00	1,00	1,00

Примечание. $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{12} (n_i - \widetilde{n}_i)^2 / \widetilde{n}_i$, где n_i, $\widetilde{n}_i$ — эмпирические и теоретические частоты; ν — число степеней свободы; $P = P(\chi_\nu^2 > \chi_0^2)$; m' — количество значений n_i, попавших в критическую область $\overline{D}_\alpha$ для различных уровней значимости α; $P_\alpha = P(m \geqslant m')$. Если оно превосходит α, то с данным уровнем значимости нет оснований отвергать проверяемую гипотезу [2, стр, 20].

Проверим гипотезы о нормальном распределении с параметрами, найденными по имеющейся исходной информации. Результаты такой проверки по критериям Пирсона и дифференциальному [2] при делении действительной оси на 12 равновероятных (в предположении нормального распределения) интервалов приведены в табл. 2. Они показывают, что распределение выработки товарной продукции на одного работающего в изучаемой группе леспромхозов очень близко к нормальному для 1961, 1963 и 1964 гг. В 1962 г. согласие с нормальным распределением по критерию Пирсона плохое ($P \approx 0{,}01$), но в результате проверки по дифференциальному критерию видно, что с доверительным уровнем $\alpha = 0{,}05$ нет оснований отбрасывать проверяемую гипотезу ($P_{0,05} = 0{,}12 > 0{,}05$). Принимаем гипотезу о нормальном (с соответствующими каждому году параметрами) распределения показателя Y_1.

Сравнение эмпирических функций распределения и нормальной (3,43; 0,97) * дали следующие значения $P(\chi^2 > \chi_0^2)$ для исследуемого периода: 0,03; 0,02; 0,60; 0,03. Хорошее согласие наблюдается только для третьего года. Неприемлемость этой гипотезы подтверждает также проверка существенности различия двух выборочных средних.

* Взяты средние арифметические соответствующих параметров за исследуемый период (табл. 1).

Результаты сравнения эмпирической функции распределения в t-м году с теоретической $N(a_t;\ 0{,}97)$ (a_t — среднее значение показателя в t-м году, $t = 1, 2, 3, 4$) по критерию согласия Пирсона при делении на равновероятные интервалы следующие: при $P\ (\chi^2 > \chi_0^2)$ равны соответственно 0,56; 0,02; 0,45; 0,35. Плохое согласие только для одного 1962 г.

Проверим гипотезу о равенстве дисперсий с помощью критерия Фишера [3, 4]. Для первых двух лет (выборочные дисперсии для них отличаются больше, чем для другой пары лет) отношение дисперсий $F_0 = 1{,}37$ и не превосходит $F_{0,975}\,(131{,}131) = 1{,}4$, т. е. с уровнем значимости 0,05 гипотеза о равенстве первых двух дисперсий принимается. Для других пар дисперсий аналогичная гипотеза может быть принята с еще бо́льшим уровнем значимости. Следовательно, распределение выработки товарной продукции на одного работающего можно считать нормальным с постоянным среднеквадратическим отклонением 0,97.

Определение закона изменения математического ожидания только на основании нахождения аппроксимирующей функции четырех его выборочных значений необоснованно. При такой малой протяженности временно́го ряда аппроксимация средних значений может служить единственно вспомогательным средством для выдвижения определенных гипотез о динамике распределения показателя в исследуемый период. Ряд выборочных средних значений товарной продукции на одного работающего можно аппроксимировать уравнением*.

$$\hat{a}_t = 2{,}97 + 0{,}184\ t,$$

где в качестве начала отсчета $t = 0$ принимается 1960 г. Наибольшее отклонение эмпирического значения a_t от гипотетического $\hat{a}_t$ достигается при $t = 2$ и равно 0,06. Это отклонение незначительно, так как величина $\dfrac{\{a_t - M\,[Y_1(t)]\}}{\sigma\sqrt{n}}$, имеющая распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы, для $t = 2$ (1962 г.) равна 0,83 и не превосходит $t_{0,80} = 1{,}289$.

Таким образом, анализ динамики распределения показал, что выработку товарной продукции на одного работающего в исследуемый период (1961—1964 гг.) можно считать распределенной нормально с параметрами

$$M\,[Y_1(t)] = 2{,}97 + 0{,}184t, \qquad \sqrt{D\,[Y_1(t)]} = 0{,}97.$$

Если динамика изучаемого распределения не изменится и в некоторый период, следующий за 1964 г., то правомерно делать выводы такого рода: 80% леспромхозов данной совокупности в 1965 г. будут иметь выработку товарной продукции на одного работающего от 2,65 до 5,13 тыс. руб.; 50% — от 3,24 до 4,54 тыс. руб.; только четверть всех леспромхозов может иметь выработку товарной продукции на одного работающего, меньшую 3,24 тыс. руб. и столько же леспромхозов — большую 4,54 тыс. руб.

ПРИБЫЛЬ ОТ РЕАЛИЗАЦИИ НА РУБЛЬ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФОНДОВ

Статистические характеристики исследуемой совокупности леспромхозов по выбранному показателю эффективности использования производственных фондов даны в табл. 3, откуда видно, что коэффициенты вариации велики: минимальный равен

Таблица 3

Динамика статистических характеристик прибыли от реализации на 1 руб. производственных фондов (коп.)

Год	Среднее значение	Среднеквадратическое отклонение	Коэффициенты		
			вариации	асимметрии	эксцесса
1961	13,8	21,1	153,7%	0,78	1,55
1962	17,6	20,7	117,7%	0,83	1,12
1963	12,9	21,0	162,5%	0,57	1,23
1964	13,6	20,0	147,1%	0,22	−0,05
Среднее	14,5	20,7	—	—	—

* Уравнение прямой найдено методом наименьших квадратов.

117,7% (для выработки товарной продукции на одного работающего коэффициент вариации не превышал 31,5%). Возможно, анализируемые леспромхозы по данному показателю не являются однородной совокупностью, т. е. существуют такие значимые различия в условиях и организации работы отдельных групп предприятий, что законы распределения прибыли на рубль фондов различны для этих групп. В этом случае нет смысла исследовать распределение данного показателя для всех 132 леспромхозов и, естественно, его динамику. Построенные для показателя прибыли полигоны

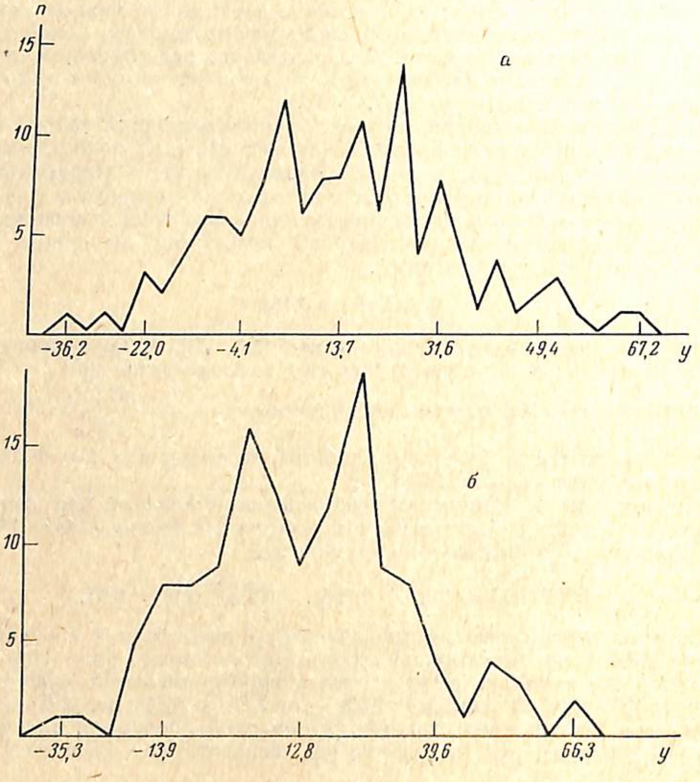

Рис. 1. Полигоны частот показателя прибыли: *а* — 30 интервалов; *б* — 20 интервалов

частот — неодновершинные, и подтверждают гипотезу о том, что изучаемая группа 132 леспромхозов есть выборка из объединения (смеси) нескольких одновершинных распределений (рис. 1).

В [5] предлагается приближенный метод оценки неизвестного числа нормальных компонент, их параметров, а также величин, определяющих веса компонент в изучаемой смеси нормальных распределений. Результаты случайной независимой выборки группируются по k равным интервалам. Рассматривается множество точек $(y_i, \lg(n_{i+1} : n_i))$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где y_i — середина i-го интервала, n_i — количество наблюдений в нем. Эти точки делятся на группы, которые приближенно можно соединить отрезком прямой с отрицательным наклоном. Количество этих групп есть оценка числа нормальных компонент смеси. Если j-й отрезок пересекает ось y в точке λ_j и образует с отрицательным направлением оси y угол θ_j, то в качестве оценок параметров j-й компоненты смеси берутся статистики

$$\hat{a}_j = \lambda_j + \frac{h}{2}, \quad \hat{\sigma}_j^2 = \frac{ch \operatorname{ctg} \theta_j}{b} - \frac{h^2}{12},$$

где c и b — единицы масштаба на осях y и $\lg \frac{n_{i+1}}{n_i}$ соответственно; h — длина интервала.

Результаты графической проверки зависят от количества интервалов группировки. Проведем ее для 30, 20 и 15 интервалов. Схема необходимых вычислений при разбиении на 15 интервалов приведена в табл. 4. На рис. 2—4 изображены точки с координатами (y_i, $\lg (n_{i+1}/n_i)$) и полученные при различных разбиениях прямые (для 1964 г.).

Гипотеза о неоднородности совокупности 132 леспромхозов по показателю прибыли на рубль производственных фондов получила полное подтверждение, так как ни на одном рисунке нельзя провести только одну прямую, близкую всем (или хотя бы большинству) точкам (y_i, $\lg (n_{i+1} / n_i)$). Более того, можно предположить, что с точки зрения влияния на прибыль различий в условиях и организации производ-

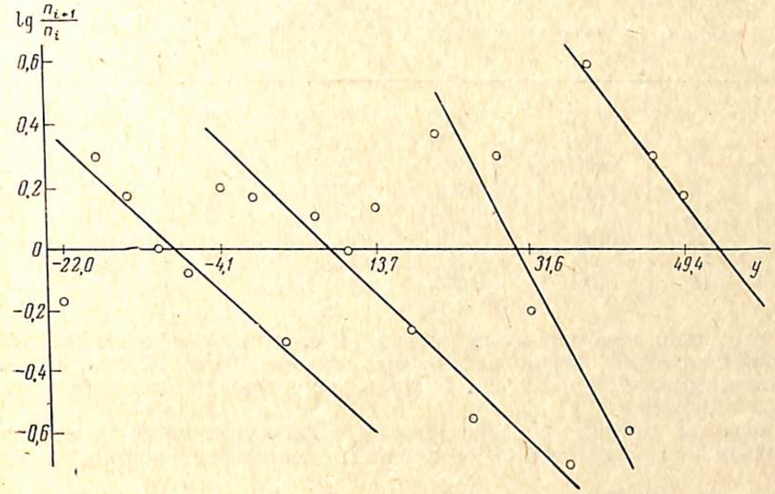

Рис. 2. Графическая оценка неизвестного числа нормальных компонент (число интервалов 30)

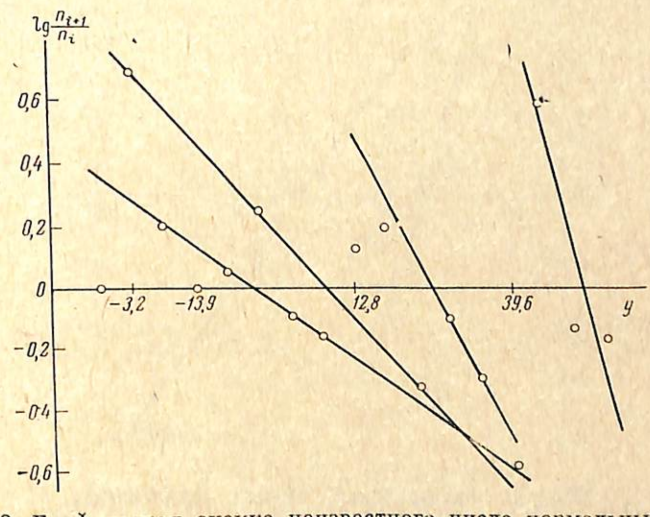

Рис. 3. Графическая оценка неизвестного числа нормальных компонент (число интервалов 20)

ства все леспромхозы делятся на четыре группы. Наиболее отчетливо это видно на рис. 2, 3. Группировка по 15 интервалам позволяет выделить из общей совокупности только группу леспромхозов с наиболее низкой прибылью на рубль фондов.

Оценки математических ожиданий и среднеквадратических отклонений, вычисленные по графикам и приведенным выше формулам, даны в табл. 5. Несмотря на неточность этих оценок, даже для фиксированного количества интервалов, можно сделать следующий качественный вывод: существуют две достаточно крупные группы леспромхозов, внутри которых распределение прибыли от реализации на рубль фондов близко к нормальному с математическими ожиданиями, равными примерно 10 и 30 коп. Имеются две менее крупные группы, для одной из них оценка матема-

Таблица 4

Вспомогательные вычисления для приближенной оценки неизвестного числа нормальных компонент и их параметров

Середина интервала y_i	Эмпирические частоты n_i	$\lg n_i$	$\lg\frac{n_i+1}{n_i}$	Середина интервала y_i	Эмпирические частоты n_i	$\lg n_i$	$\lg\frac{n_i+1}{n_i}$
—34,4	1	0,000	0,000	22,6	20	1,301	—0,222
—27,3	1	0,000	+0,699	29,8	12	1,079	—0,301
—20,2	5	0,699	+0,301	36,9	6	0,778	—0,176
—13,0	10	1,000	+0,041	44,0	4	0,602	+0,176
—5,9	11	1,041	+0,260	51,2	6	0,778	—0,778
1,2	20	1,301	—0,155	58,3	1	0,000	+0,301
8,4	14	1,146	+0,133	65,4	2	0,301	
15,5	19	1,279	+0,022				

тического ожидания прибыли отрицательна (т. е. речь идет о группе убыточных в среднем предприятий), для другой — очень высока, около 55 коп. (т. е. группа леспромхозов с высокой прибылью). Существующие группы леспромхозов необходимо изучать отдельно.

Таким образом, говорить о распределении и свойствах прибыли от реализации на рубль фондов по всей изучаемой совокупности леспромхозов нельзя. Можно только

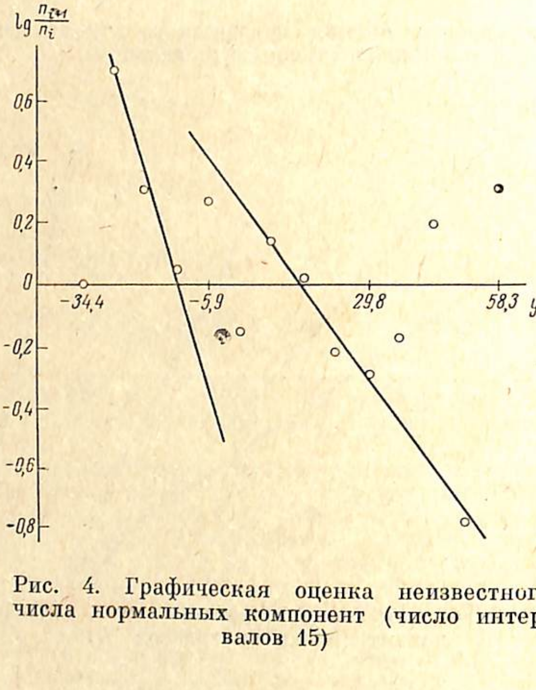

Рис. 4. Графическая оценка неизвестного числа нормальных компонент (число интервалов 15)

предположить, что в среднем по 132 предприятиям величина прибыли в 1961—1964 гг. убывала *. Эта неочевидная на первый взгляд гипотеза выдвигается на основании двух линейных аппроксимаций зависимости среднего значения a_t от времени (1960 г. соответствует $t = 0$). Линейные функции, найденные соответственно методом наименьших квадратов и по критерию минимума максимального отклонения, имеют вид $\hat{a}_t = 16{,}05—0{,}58t$, $\hat{a}_t = 17{,}7—1{,}29t$.

---

* Проверить статистически эту гипотезу нельзя, так как множество леспромхозов не является однородной совокупностью по отношению к показателю прибыли.

Таблица 5

Оценки параметров нормальных компонент распределения прибыли в 1964 г.

Количество интервалов	Оценки параметров							
	a_1	σ_1	a_2	σ_2	a_3	σ_3	a_4	σ_4
30	—7,4	11,2	10,2	11,2	31,6	7,8	55,6	10,0
20	—1,8	19,2	10,9	15,0	29,0	11,8	54,5	8,3
15	—3,6	12,1		17,6		19,0		

СЕБЕСТОИМОСТЬ ДРЕВЕСИНЫ

Статистические характеристики взятого для анализа показателя эффективности использования суммарных производственных затрат (себестоимости) приведены в табл. 6, анализ которой позволяет высказать гипотезу о том, что закон распределения себестоимости 1 $м^3$ древесины в изучаемой совокупности не изменяется во времени. Предполагаемую гипотезу можно проверить по критерию Смирнова о двух выборках [3, 4]. В табл. 7 даны значения накопленных частот и соответствующие координаты левых концов интервалов при группировке по 35 интервалам. Более смещено эмпирическое распределение в 1962 г., остальные ряды накопленных частот очень близки. Поэтому гипотезу о несущественности различия между двумя эмпирическими функциями распределения необходимо проверить в первую очередь для таких пар, которые содержат распределение в 1962 г.

Таблица 6

Динамика статистических характеристик себестоимости 1 $м^3$ древесины (руб.)

Год	Среднее значение	Среднеквадратическое отклонение	Коэффициенты		
			вариации	асимметрии	эксцесса
1961	6,32	1,46	23,1%	0,12	1,99
1962	6,02	1,25	20,6%	0,09	1,01
1963	6,51	1,38	21,0%	0,72	0,81
1964	6,33	1,29	20,3%	0,78	0,92
Среднее	6,30	1,34	—	—	—

Максимальное расхождение $D_{\alpha,\beta}$ двух эмпирических функций распределения оценивается по информации, данной в табл. 7. Для двух выборок одного объема n справедливо

$$D_{\alpha,\beta} = \max_x |F_\alpha(x) - F_\beta(x)| \leqslant \frac{\max\limits_i d_i}{n},$$

где d_i — максимально возможная (по абсолютной величине) разность накопленных частот для i-го интервала. Значение d_i подсчитываем при «наихудших» предположениях относительно распределения наблюдений внутри интервалов. Например, наихудшие предположения для интервала (5,95; 6,13) (табл. 7, обведенная строка) будут в том случае, если в 1964 г. все шесть значений, принадлежащих (5,96; 6,14), появляются в самом начале, а в соответствующей части интервала за 1963 г. еще не появилось ни одного значения. Максимально возможная разность на этом интервале $d_i = 56 - 47 = 9$.

Рассмотрим следующие пары эмпирических функций: $F_1(x)$ и $F_2(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$, $F_3(x)$ и $F_4(x)$. Для них значения статистик $D_{\alpha,\beta}$ не превышают 0,175; 0,175 и 0,084 соответственно (последние три столбца табл. 7), а значения величин λ_{12}, λ_{23}, λ_{34} $(\lambda_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}\sqrt{n_\alpha n_\beta : (n_\alpha + n_\beta)})$ — чисел 1,416; 1,416; 0,677. По таблице значений $K(\lambda)$ [3, 4] находим 0,90; 0,95; 0,99 квантили распределения Колмогорова: 1,225; 1,358; 1,627. Таким образом, даже для наиболее отличающейся от других функции распределения в 1962 г. гипотезу о несущественности различий эмпирических функций распределе-

Таблица 7

Накопленные частоты эмпирического распределения себестоимости 1 $м^3$ древесины

1961		1962		1963		1964		Максимально возможная разность α_i		
начало интервала	накопленная частота	начало интервала	накопленная частота	начало интервала	накопленная частота	начало интервала	накопленная частота	1961—1962 *	1962—1963 *	1963—1964 **
		2,22	1					1	1	
		2,42	1					1	1	
		2,63	1					1	1	
		2,84	1					1	1	
		3,05	1					1	1	
		3,25	1					1	1	
		3,46	1					1	1	
3,74	1	3,67	2					2	2	
3,92	2	3,88	4	4,05	2			4	4	2
4,10	2	4,08	6	4,22	4	4,10	1	5	6	4
4,28	4	4,29	8	4,39	4	4,29	4	6	6	3
4,46	9	4,50	17	4,57	6	4,47	6	13	13	2
4,64	13	4,71	21	4,74	11	4,66	13	12	17	7
4,82	20	4,92	30	4,91	18	4,84	20	17	19	9
4,99	26	5,12	40	5,09	21	5,03	27	20	22	9
5,17	29	5,33	43	5,26	30	5,22	30	17	22	9
5,35	39	5,54	51	5,43	36	5,40	36	22	21	6
5,53	43	5,75	57	5,61	42	5,59	39	14	21	6
5,71	51	5,95	70	5,78	47	5,77	50	19	23	8
5,89	55	6,16	77	5,95	58	5,96	56	22	19	9
6,07	61	6,37	82	6,13	62	6,14	67	21	20	9
6,25	71	6,58	90	6,30	67	6,33	72	19	23	10
6,43	74	6,78	97	6,48	74	6,51	78	23	23	11
6,61	82	6,99	110	6,65	80	6,70	85	20	20	11
6,79	90	7,20	114	6,82	90	6,89	91	23	18	11
6,97	91	7,41	119	6,99	96	7,07	98	23	19	8
7,15	96	7,61	121	7,17	100	7,26	102	17	18	6
7,32	104	7,82	123	7,34	103	7,44	108	18	16	8
7,50	105	8,03	125	7,52	107	7,63	110	16	13	7
7,68	109	8,24	129	7,69	109	7,81	114	9	11	7
7,86	118	8,45	130	7,86	112	8,00	117	8	11	8
8,04	120	8,65	130	8,03	118	8,18	118	6	10	6
8,22	122	8,86	131	8,21	119	8,37	119	7	10	1
8,40	124	9,07	131	8,38	120	8,55	122	6	8	3
8,58	124	9,28	132	8,56	121	8,74	123	5	7	3
8,76	125			8,73	123	8,93	125	4	6	4
8,94	125			8,90	124	9,11	126			2
9,12	126			9,08	126	9,30	127			2
9,30	127			9,25	128	9,48	128			2
9,48	128			9,43	129	9,67	129			
9,65	130			9,60	130	9,85	130			
9,83	132			9,77	131	10,04	130			
				9,74	132	10,22	131			
						10,41	132			

* Разности соответствуют интервалам 1962 г.
** Разности соответствуют интервалам 1963 г.

ния можно принять с уровнем значимости 0,01. Если учесть, что принимаемые для расчетов статистики $\lambda_{\alpha\beta}$ значения $D_{\alpha\beta}$ явно завышены и наибольшие значения d_i принадлежат центральной части распределения, а на его краях величины d_i значительно меньше, то гипотезу о несущественности различия эмпирических функций распределения для всех четырех лет можно принять с достаточно большим уровнем значимости.

Коэффициенты эксцесса себестоимости древесины довольно значительны и устойчивы по знаку (табл. 6). Поэтому проверим гипотезу о том, что в каждом году функ-

Таблица 8

Проверка гипотез о согласии эмпирических функций распределения себестоимости 1 $м^3$ древесины с теоретическими

Количество интервалов	Статистики	1961	1962	1963	1964
	χ_0^2	12,4	14,6	13,8	3,9
20 равных	ν	7	5	8	7
	P	$\sim$0,10	$\sim$0,01	$\sim$0,10	$\sim$0,80
	χ_0^2	11,0	11,0	21,0	7,2
30 равных	ν	11	8	11	11
	P	$\sim$0,44	$\sim$0,20	$\sim$0,04	$\sim$0,78
	χ_0^2	24,1	15,5	11,5	12,1
12 равновероятных	ν	7	7	7	7
	P	$\sim$0,001	$\sim$0,03	$\sim$0,12	$\sim$0,10

Таблица 9

«Проверка гипотезы о согласии эмпирических функций распределения себестоимости $м^3$ древесины с обобщеннонормальным (6,30; 1,34; 0,43; 0,91) распределением

Критерий	Статистики		1961	1962	1963	1964
Пирсона	P^*		$\sim$0,75	$\sim$0,02	$\sim$0,10	$\sim$0,30
Дифференциальный	$\alpha = 0,10$	m'	2	2	2	2
		P_α *	0,34	0,34	0,34	0,34
	$\alpha = 0,05$	m'	1	1	2	1
		P_α	0,46	0,46	0,12	0,46
	$\alpha = 0,01$	m'	0	0	0	1
		P_α	1,00	1,00	1,00	0,11

* Значения статистик P, m', P_α указаны в табл. 2.

ция распределения изучаемого показателя Y_3 является обобщенно-нормальной [1, 6], т. е.

$$P\left(\frac{Y_3 - a_t}{\sigma_t} < y\right) = \Phi(y) - \frac{\gamma_1^{(t)}}{3!}\Phi^{(3)}(y) + \frac{\gamma_2^{(t)}}{4!}\Phi^{(4)}(y),$$

где $\Phi(y)$, $\Phi^{(3)}(y)$, $\Phi^{(4)}(y)$ — нормальная функция распределения и ее третья и четвертая производные; параметры a_t, σ_t, $\gamma^{(t)}_1$, $\gamma^{(t)}_2$ взяты из табл. 6. Результаты проверки согласия по критерию Пирсона приведены в табл. 8, анализ которой показывает, что для каждого года согласие можно считать удовлетворительным. Попытаемся найти общее для всех четырех лет обобщенно-нормальное распределение. Выдвигается следующая гипотеза: себестоимость 1 $м^3$ древесины в каждом году (из периода 1961—1964 гг.) распределена обобщенно-нормально с параметрами: $a = 6{,}30$ руб., $\sigma = 1{,}34$ руб, $\gamma_1 = 0{,}43$, $\gamma_2 = 0{,}91$ *. Результаты проверки гипотезы по двум критериям — критерию Пирсона при делении на 12 равновероятных интервалов и дифференциальному критерию (табл. 9) — говорят о том, что нет оснований ее отвергать. Поэтому функция распределения нормированной величины $Y_3^0 = (Y_3 - 6{,}30)/1{,}34$ может быть записана следующим образом: $P(Y_3^0 < y) = F(y) = \Phi(y) - 0{,}0717\,\Phi^{(3)}(y) + 0{,}0379\,\Phi^{(4)}(y)$.

* Математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение и коэффициент асимметрии выбраны равными средним арифметическим соответствующих характеристик за изучаемый период, коэффициент эксцесса — среднему арифметическому за последние три года (см. табл. 6).

Таблица 10

Отыскание 0,10 и 0,90 квантилей распределения $F(y) = \Phi(y) - 0{,}0717\,\Phi^{(3)} + 0{,}0379\,\Phi^{(4)}\,y$

1	2	3	4	5	6	7	8
P	j	y_j	$\Phi^{(3)}(y)_j$	$\Phi^{(4)}(y_j)$	0,0717 (4)— 0,0379(5) + p	$\Phi(y_j)$	| (7)—(6) |
	0	1,281 *	0,1126	0,3058	0,8965	0,90	0,0035
0,90	1	1,262	0,1066	0,3196	0,8955	0,8965	0,0010
	2	1,256	0,1047	0,3239	0,8952	0,8955	0,0003
	3	1,255	0,1044	0,3246	0,8952	0,8952	0,0000
	4	$\boxed{1{,}255}$				0,8952	
	0	−1,281	0,1126 **	−0,3058 **	0,1197	0,10	0,0197
	1	−1,177	0,0769	−0,3793	0,1199	0,1197	0,0002
0,10	2	−1,175	0,0761	−0,3806	0,1199	0,1199	0,0000
	3	$\boxed{-1{,}175}$				0,1199	

* Выбирается $y_0 = 1{,}281$, подсчитываются $\Phi^{(3)}$ $y_0)$, $\Phi^{(4)}(y_0)$, затем $\Phi(y_1)$ (6) и по таблице значение $y_1 = 1{,}262$ и т. д.

** Функция $\Phi^{(3)}(y)$ — четная, $\Phi^{(4)}(y)$ — нечетная.

Величина p-квантиля этого распределения находится решением уравнения $F(y) = p$. Итеративный процесс его решения записывается в виде $\Phi(y_j) = 0{,}0717\,\Phi^{(3)}(y_{j-1}) - 0{,}0379\,\Phi^{(4)}(y_{j-1}) + p$, $j = 1, 2, \ldots$. Порядок вычислений для определения 0,10 и 0,90 квантилей распределения $F(y)$ показан в табл. 10. Следовательно, 10- и 90%-е квантили себестоимости равны сосответственно $6{,}30 - 1{,}34 \cdot 1{,}175 = 4{,}73$ руб. и $6{,}30 + 1{,}34 \cdot 1{,}255 = 7{,}98$ руб. Таким образом, в среднем около 10% предприятий будут иметь себестоимость, большую 7,98 руб/$м^3$ и 10% — меньшую 4,73 руб/$м^3$, основная масса предприятий (около 80%) — себестоимость, находящуюся между указанными числами.

Таким образом, исследование распределений трех показателей работы — выработки товарной продукции на одного работающего, прибыли от реализации на рубль производственных фондов и себестоимости 1 $м^3$ древесины — выявило принципиальное различие динамики этих распределений для изучаемой группы леспромхозов. Относительно одного из показателей (прибыли) исследуемую совокупность предприятий нельзя считать однородной; распределение выработки товарной продукции нормальное с постоянной дисперсией и математическим ожиданием, возрастающим на 184 руб/чел ежегодно; распределение себестоимости во времени не изменяется и является обобщенно-нормальным. Данные, полученные в результате такого анализа распределений, могут быть использованы и при построении динамической модели исследуемой группы леспромхозов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений. М., «Наука», 1966.
2. М. Л. Лукацкая. Статистическая оценка согласия эмпирической функции распределения с теоретической. В сб. Статистические методы в экономическом анализе производства. Новосибирск, «Наука», 1968.
3. А. Хальд. Математическая статистика с техническими приложениями. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
4. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
5. C. G. Bhattacharya. A Simple Method of Resolution of a Distribution into Gaussian Components. Biometrics, 1967, 23, N 1.
6. Экономико-статистические исследования промышленного производства. М., «Статистика», 1969.

Поступила в редакцию
22.IV.1969