

МНОЖЕСТВЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СЕБЕСТОИМОСТИ УГЛЯ

Л. Д. БУДЕННЫЙ, И. Н. ЗИМИН, О. М. КОЗЛОВ

(Киев)

В данной работе приводится экономико-математическая модель формирования себестоимости угля при подземном способе добычи в условиях пологих пластов Донецкого бассейна с учетом влияния на себестоимость значений различных факторов не только в данный, но и в предыдущие периоды времени.

При решении аналогичных задач [1—3] уровень моделируемого показателя y (себестоимости продукции, производительности труда и т. д.) определяется как функция совокупности факторов x_i . В [1, 3], например, при построении экономико-математических моделей себестоимости продукции и производительности труда говорится о необходимости учета «фактора времени». В этих моделях в уравнение связи между y и факторами x_i в качестве еще одной переменной вводится параметр t . В действительности время t влияет на величину y не как самостоятельный аргумент, а через посредство изменений факторов x_i .

В других работах, посвященных исследованию динамики экономических показателей с помощью статистических методов [4, 5], основное внимание уделяется определению величины автокорреляции и возможности прогнозирования этой динамики на перспективу.

Величина $y(t)$ в каждый данный момент представляет собой значение некоторого функционала F от значений факторов $x(\tau)$ при $\tau \leq t$.

$$y(t) = F[x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)], \tau \leq t. \quad (1)$$

Факторы производства, под воздействием которых находится уровень себестоимости угля, для отдельной шахты можно разделить на статические (постоянные) и динамические (переменные). Особенностью шахты является постоянное перемещение фронта работ. В связи с этим большое число условий носит динамический характер. В конкретных условиях и в зависимости от рассматриваемого промежутка времени один и тот же фактор может рассматриваться как постоянный и как переменный. Например, глубина разработки в общем случае переменна, а для горизонтального залегания пластов она постоянна. Для крутого падения за время отработки одного горизонта глубина разработки постоянна, а за весь срок службы шахты — переменна.

В приводимой модели учтены динамические условия производства, проявляющиеся в изменении основных технико-экономических показателей работы шахт.

При моделировании себестоимости угля необходимо учитывать взаимное влияние различных факторов и их совместное влияние на обобщающий показатель. Эта необходимость вызвана следующим. Главные виды работ, выполняемые в шахте, увязаны между собой в пространстве и во времени. Проведение горной выработки, подготовка участка пласта к отработке, связано с необходимостью последующей укладки рельсовых путей или конвейеров, снабжения энергией, проветриванием, водоотливом, связью и т. д. Вслед (а иногда параллельно) за подготовительными проводятся работы по очистной выемке угля. Следствием очистных работ является необходимость закрепления выработок или их погашения. Если рассматривать затраты на эти виды работ, то они также будут увязаны между собой во времени. Величина запаздывания для различных видов работ и технологических схем может быть от нескольких часов или нескольких месяцев до нескольких лет.

К основным технико-экономическим показателям работы шахт относятся: 1) объем добычи, 2) численность персонала, 3) объем проведения горных выработок, 4) производительность труда, 5) себестоимость 1 т угля, 6) фондоотдача и ряд других, детализирующих указанные или раскрывающих лишь отдельные стороны деятельности шахт.

Динамика основных технико-экономических показателей работы шахт резко различается в зависимости от трех основных периодов: 1) до освоения проектной мощности, 2) устойчивой работы в пределах производственной мощности, 3) завершения работ и ликвидации предприятия.

Если рассматривать второй период работы шахты или совокупности шахт (треста или комбината), то динамика технико-экономических показателей работы шахт носит сложный характер, проявляющийся в значительном изменении начального и конечного уровней отдельных показателей (наличие временного тренда). Например, для треста «Куйбышевуголь» Донецкого бассейна (объекта моделирования) месячный объем добычи за пять лет увеличился в 1,3 раза, уровень механизированной навалки — в 1,35 раза, производительность труда возросла в 1,25 раза. В этом случае динамика показателя $\xi_i(t)$, являясь временной последовательностью, может быть представлена в виде суммы некоторой детерминированной составляющей (времен-

ного тренда) $a_i(\tau)$ и случайной составляющей (отклонения от тренда) $x_i(\tau)$ с нулевым математическим ожиданием

$$\xi_i(\tau) = a_i(\tau) + x_i(\tau), \quad Mx_i(\tau) = 0. \quad (2)$$

Последовательность $\xi_i(\tau)$ в общем виде является неоднородной. После исключения из нее детерминированной составляющей $a_i(\tau)$ она может рассматриваться как стационарная случайная, к которой применим аппарат теории стационарных случайных процессов [6, 7]. Экспериментальный расчет модели произведен для системы с тремя входами. Чтобы ввести в систему возможно больший объем информации, все три показателя воздействия выбраны обобщающими, т. е. каждый из них находится под влиянием нескольких факторов, причем некоторые факторы — общие для всех трех показателей, поэтому последние взаимосвязаны.

Из числа перечисленных выше технико-экономических показателей в модель включены: месячный объем добычи угля, месячный объем проведения основных подготовительных выработок, среднемесячная численность персонала по добыче угля.

Основная задача при построении динамической модели — нахождение импульсной переходной функции исследуемого объекта, по которой находится переходная характеристика [8]. Если обозначить входные величины через $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, а величину на выходе линейного объекта через $y(t)$, тогда

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (3)$$

Так как практически $k(\tau)$ отлично от нуля лишь на конечном интервале $[0, T]$, то

$$y(t) = \int_0^T k(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

где $k(\tau) = \{k_{ij}(\tau)\}$ — матрица импульсных переходных функций, или покомпонентно

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^3 \int_0^T k_{ij}(\tau)x_j(t-\tau)d\tau, \quad (4)$$

где $i = 1, j = 3$.

Для определения $k_i(\tau)$ используются результаты наблюдений $x(t)$ и $y(t)$ за промежуток времени $[0, N]$, где N значительно превосходит T . $k(\tau)$ находится из условия минимума среднего квадратического отклонения

$$M \left[y(t) - \int_0^T k(\tau)x(t-\tau)d\tau \right]^2 = \min. \quad (5)$$

Так как $x(t)$ и $y(t)$ — стационарные случайные процессы, то это условие приводит к уравнению

$$R_{yx}(t) = \int_0^T k(\tau)R_{xx}(t-\tau)d\tau, \quad (6)$$

где $R_{yx}(t)$ и $R_{xx}(t)$ — соответственно взаимно- и автокорреляционные функции. Заменяя интеграл суммой, приходим к системе линейных уравнений

$$R_{yx}(nh) = \sum_{m=0}^n k(mh)R_{xx}(n-m)h, \quad (7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, задача определения импульсной переходной функции сводится к нахождению взаимно- и автокорреляционной функций и решению соответствующей системы линейных уравнений.

По импульсной переходной функции находятся переходные характеристики $h(t)$ по формуле

$$h(t) = \int_0^T k(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Обозначим через $\xi_1(t)$ — месячную добычу угля, тыс. т; $\xi_2(t)$ — объем проведения основных подготовительных выработок в месяц, м; $\xi_3(t)$ — численность персонала по добыче, человек; $\xi_0(t)$ — полную себестоимость 1 т угля, руб., где последовательности $\xi_i(t)$ составлены по данным месячной учетно-отчетной статистики и включают сведения за 7 лет для $\xi_1(t)$ и $\xi_0(t)$ и за шесть лет для $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$.

Расчет переходных функций произведен по следующей схеме.

1. Приведение значений $\xi_i(t)$ к условным: $\xi_1'(t) = \xi_1(t) - 300$, $\xi_2'(t) = \xi_2(t) - 3000$, $\xi_3'(t) = \xi_3(t) - 22\,000$, $\xi_0'(t) = \xi_0(t) - 14$, что позволяет уменьшить число знаков, принимаемых к расчету.

2. По условным значениям $\xi_i'(t)$ определение математического ожидания (тренда) — $a_i(t)$. Для указанных последовательностей временной тренд оказался линейным, так как увеличение степени аппроксимирующего полинома не приводило к уменьшению остаточного среднеквадратического отклонения. Получаются следующие функции: $a_1 = 56,12048 + 1,75404t$, $1 \leq t \leq 83$; $a_2 = 1488,597 - 3,763949t$, $1 \leq t \leq 72$; $a_3 = 173,2171 + 46,86019t$, $1 \leq t \leq 72$; $a_0 = 1,455284 + 0,03197603t$, $1 \leq t \leq 83$.

3. Определение случайной составляющей $x_i(t)$ последовательности как отклонения функций $\xi_i(t)$ от временного тренда в соответствии с (2).

4. Нахождение авто- и взаимнокорреляционных функций по формулам

$$R_{y x_i}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(\tau) y(t + \tau) d\tau, \quad (9)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3,$$

$$R_{x_i x_j}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(\tau) x_j(t + \tau) d\tau. \quad (10)$$

5. В связи с тем, что T в нашем случае недостаточно велико ($N < 100$), корреляционные функции имеют не вполне гладкий характер, произведено их аналитическое сглаживание с помощью метода «натянутой нити» на графике с функциональными шкалами.

6. Составление системы линейных уравнений (7) по дискретным значениям сглаженных корреляционных функций. Представим (7) в матричной форме

$$A \cdot K = Q, \quad (11)$$

где A — квадратная матрица, образованная из значений корреляционных функций $R_{x_i x_j}$.

Для системы с одним входом матрица A принимает вид

$$A = \begin{vmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(h) & R_{xx}(2h) & \dots & R_{xx}[(n-1)h] \\ R_{xx}(h) & R_{xx}(0) & R_{xx}(h) & \dots & R_{xx}[(n-2)h] \\ R_{xx}(2h) & R_{xx}(h) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}[(n-3)h] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}[(n-1)h] & R_{xx}[(n-2)h] & R_{xx}[(n-3)h] & \dots & R_{xx}(0) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

K — матрица-столбец значений импульсной переходной характеристики

$$K = \begin{vmatrix} k(0) \\ k(h) \\ k(2h) \\ \vdots \\ k[(n-1)h] \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Q — матрица-столбец, образованный из значений взаимной корреляционной функции

$$Q = \begin{vmatrix} R_{yx}(h) \\ R_{yx}(0) \\ R_{yx}(2h) \\ \vdots \\ R_{yx}[(n-1)h] \end{vmatrix}. \quad (14)$$

В нашем случае, для системы с тремя входами и одним выходом матрицы A , K и Q приобретают вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где A_{12} , A_{13} , A_{23} — подматрицы, транспонированные соответственно к матрицам A_{21} , A_{31} , A_{32} .

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix},$$

где K_1 , K_2 и K_3 — подматрицы-столбцы аналогично (13) и

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix},$$

где Q_1 , Q_2 , Q_3 — подматрицы-столбцы аналогично (14).

7. Решение составленной таким образом системы линейных уравнений относительно K . Значения столбца K являются значениями импульсных переходных характеристик.

Импульсная переходная характеристика используется для восстановления или экстраполяции случайного процесса при заданных воздействиях на входе. Она

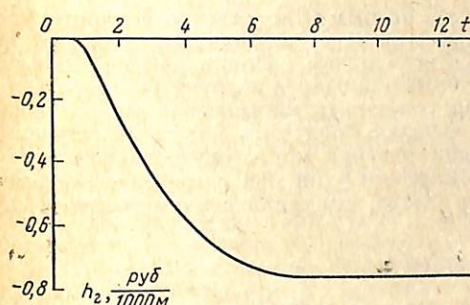


Рис. 2. Переходная характеристика себестоимости 1 т угля при увеличении объема проведения основных подготовительных работ на 1000 м/мес

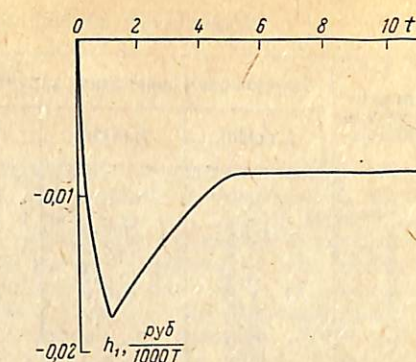


Рис. 1. Переходная характеристика себестоимости 1 т угля при увеличении объема добычи угля на 1000 т/мес

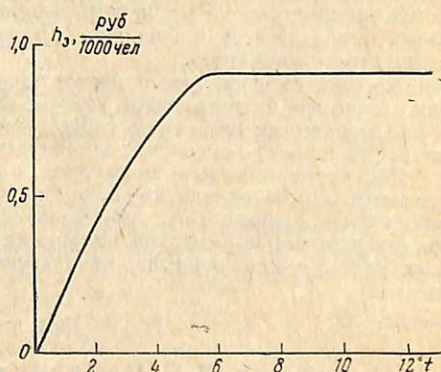


Рис. 3. Переходная характеристика себестоимости 1 т угля при увеличении численности персонала по добыче на 1000 человек

же служит основой для определения реакции системы на воздействия, различные по форме и величине. Например, реакция системы на скачкообразное воздействие (по величине равное единице) описывается уравнением (8).

Расчет импульсной переходной функции позволил получить значения $k(t)$, представленные в таблице. Здесь же приведены значения единичных переходных функций.

На рис. 1—3 даны графики единичных переходных функций. Они отражают в динамике изменение уровня себестоимости 1 т угля при скачкообразном увеличении фактора — воздействия в момент $t = 0$ на единицу для $\xi_1(t)$ и на 1000 единиц для $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$.

Характер полученных зависимостей определяется технологическими и экономическими процессами, лежащими в основе исследуемых явлений.

Рассмотрим, например, зависимость между себестоимостью 1 т угля и объемом производства (рис. 1). Зависимость между этими показателями приближенно может быть выражена законом обратной пропорциональности. Полученная кривая подтвер-

Таблица

Времен- ные коор- динаты	Импульсная переходная характеристика			Единичная переходная характеристика		
	$h_1(\tau)10^3$	$h_2(\tau)10^4$	$h_3(\tau)10^4$	$h_1(t)10^3$	$h_2(t)10^4$	$h_3(t)10^4$
0	0,	0	0	0	0	0
1	-17,8	-0,2	3,3	-17,8	-0,2	3,3
2	3,2	-2,2	0,9	-14,6	-2,5	4,2
3	2,4	-2,1	1,3	-12,2	-4,6	5,4
4	1,6	-0,9	1,6	-10,6	-5,5	7,0
5	2,0	-1,1	2,0	-8,5	-6,6	9,0
6	0,0	-0,8	0,2	-8,5	-7,4	9,2
7	-0,1	-0,2	0,0	-8,6	-7,6	9,1

ждает это положение лишь до некоторого момента времени t . Последнее объясняется тем, что с ростом объема добычи увеличиваются объемы некоторых других видов работ, выполняемых с некоторым запаздыванием по отношению к моменту увеличения объема добычи. В первую очередь это работы по поддержанию производственной мощности на достигнутом уровне (воспроизводство линии забоя) и по обеспечению нормальных условий дальнейшей работы (перекрепление или ликвидация горных выработок). Естественно, что зависимость между объемом этих видов работ и удельными (отнесенными на 1 т добываемого угля) затратами на их выполнение будет отличаться от зависимости между объемом добычи и полной себестоимостью 1 т угля. Основная причина такого явления кроется в постоянном росте удельной протяженности горных выработок и различном уровне механизации отдельных видов работ. Например, если навалка угля на пластах пологого падения механизирована почти полностью, то на вспомогательных работах уровень механизации составляет лишь около 15%, а работы по перекреплению горных выработок почти полностью выполняются вручную.

Нормальным следует признать положение с равным и достаточно высоким уровнем механизации всех работ. В этом случае рост объема производства приведет примерно к равному снижению себестоимости по всем видам работ, а дальнейший технический прогресс обеспечит неуклонную экономию живого и овеществленного труда.

Построенная модель позволяет не только установить взаимосвязь между исследуемыми показателями, но на количественной основе получить новые качественные зависимости. Кроме того, динамические характеристики могут служить основанием для разработки нормативов изменения себестоимости угля под влиянием динамических условий производства, используемых с целью оптимального управления объектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Хайкин, В. С. Найденов, С. Г. Галуза. Корреляция и статистическое моделирование в экономических расчетах. М., «Экономика», 1964.
2. А. А. Френкель. Многофакторные корреляционные модели производительности труда. М., «Экономика», 1966.
3. Л. Л. Майзель. Разработка экономико-математических моделей для оптимального планирования производства на угольных шахтах. Краткий научн. отчет. М., 1966. (Ин-т горного дела им. А. А. Скочинского).
4. Н. С. Четвериков. Статистические и стохастические исследования. М., Госстатиздат, 1963.
5. М. Езекпэл, К. А. Фокс. Методы анализа корреляций и регрессий линейных и криволинейных. М., «Статистика», 1966.
6. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи матем. наук, 1952, т. VII, вып. 5.
7. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
8. В. В. Солодовников, А. С. Усков. Статистический анализ объектов регулирования. М., Машигиз, 1960.

Поступила в редакцию
4 V 1967