

О ЧИСЛЕ ЭТАПОВ В ПРОЦЕССЕ ОБРАБОТКИ ПРОДУКЦИИ

Н. Е. САРАФЯН

(Ереван)

В сложных экономико-технологических процессах обработки сырья $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ иногда возникает задача определения минимального числа этапов, необходимых для получения продукта $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. В данной заметке делается попытка решения упомянутой задачи при некоторых допущениях относительно производимых продуктов, причем не рассматриваются количественная сторона конечной продукции, а также проблемы, связанные с размещением предприятий, их размером, сферой обслуживания и т. д. По этим вопросам имеется обширная литература и хорошо разработанные методы их решения. Здесь лишь ставится задача получения продукта Y заданного качества на основе известного сырья X при минимальном числе этапов обработки.

Пусть контролируемый оператор T , зависящий от параметра α , преобразует заданный входной вектор X в заданный выходной вектор Y . Внутренняя структура T — «черный ящик». Предположим, что T представим операторами $T_1, T_2, \dots, T_k$ (результат применения T на X можно получить, последовательно применяя $T_1, T_2, \dots, T_k$ на X), а выбор параметра α , определяющего некоторое значение T , эквивалентен выбору $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, показывающих соответственно некоторые значения $T_1, T_2, \dots, T_k$. Число k определяет количество этапов в процессе обработки. Оно может быть либо фиксированным, либо найденным по виду X и Y .

Рассмотрим простейший случай фиксированного k . Под воздействием управляющего параметра $\alpha_i \in A_i$ (A_i — множество конечное) T_i преобразует определенный входной вектор X^i в определенный выходной, т. е. $X^{i+1} = T_{i+1}(\alpha_{i+1}, X^i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Выбор α_i характеризует элемент, используемый на i -м этапе обработки, а следовательно, и преобразования, которые этот элемент выполняет. Предположим, что в процессе обработки X в Y отсутствуют промежуточные входные и выходные ресурсы, что потребители X^{i+1} являются лишь элементами $(i+1)$ -го этапа, а также, что имеется некоторая общая условная единица измерения исходного сырья X , конечного продукта Y и промежуточных продуктов. Это условие необходимо, поскольку после каждого специального преобразования входной ресурс X может измеряться различными единицами, что вызывает затруднение наблюдений обработки X и ее контроля.

Относительно T_i допустим: 1) $T_i \neq T_{i+1}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, и 2) T_i не может быть представлено комбинациями (любого числа) T_j , $j = i+1, \dots, k$.

Предположим, что структура T_i оптимальна. Можно ли при заданных $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и множестве операторов $\{T_i\}$ построить систему, которая будет обрабатывать входной вектор X в выходной вектор Y ? Если T состоит из k уровней, то насколько X^k будет отличаться от Y ?

Для того чтобы можно было бы измерить отклонения X^k от Y , необходимо ввести подходящую метрику в пространстве векторов X и Y .

Для этого определим норму

$$\|X - Y\| = \sum_i |x_i - y_i|. \quad (1)$$

Для векторов рассматриваемого типа эта норма равняется числу компонентов X , не совпадающих с компонентами вектора Y .

Обозначим через $f_k(X)$ минимальное отклонение выходного продукта Y от X при условии, что входной вектор X подвергается k последовательным преобразованиям. Оно, очевидно, определяется через

$$\min_{\{\alpha_i\}} \|T_k(\alpha_k, X^{k-1}) - Y\|. \quad (2)$$

Для $k = 1$ имеем

$$f_1(X) = \min_{\alpha_1 \in A_1} \|T_1(\alpha_1, X) - Y\| = \min \|X^1 - Y\|. \quad (3)$$

Для $k \geq 2$ на основе принципа оптимальности [4] получим

$$f_k(X) = \min_{\alpha_1} f_{k-1}(T_1(\alpha_1, X)) = \min_{\alpha_1} f_{k-1}(X^1). \quad (4)$$

Чтобы определить минимальное число этапов, необходимых для преобразования X в Y , можно опираться на уже приведенный метод, используя его как метод решения.

Действительно, в некоторых случаях динамическое программирование может использоваться и как метод описания и как метод решения. Такой подход включает в себя оптимальное решение все более удлиняющихся процессов, пока не будет найдено решение процесса нужной длины. Это свойство динамического программирования можно применить и для определения минимального числа этапов в процессе обработки. Для этого достаточно лишь выбрать первое значение k , при котором $f_k(X)$ оказывается равным нулю. Таким образом, с помощью (4) определяется минимальное число этапов, необходимых для преобразования X в Y и набор преобразований $\{T_i\}$, т. е. $T(a, X)$.

Приведенный выше алгоритм представляет некоторый интерес при определении минимального числа этапов в производстве однородных продуктов.

Покажем на примере использование алгоритма. Допустим, что сырье X обрабатывается в Y в три этапа, т. е. $k = 3$. Пусть $X = (49, 25, 36, 64, 16, 9)$ и $Y = (6, 8, 0, 4, 0, 0)$. Предположим, что на первом этапе обработки применяется оператор вида $T_1 = \{a_1, \sqrt{X}\}$, на втором — $T_2 = \{a_2, X/25\}$ и на третьем — $T_3 = \{a_3, X/(X^2 + 5)\}$. Пусть при значении параметра $a_1 = a_1^1$ изменяется компонент I вектора X , а остальные остаются неизменными. Аналогично при $a_1 = a_1^2$ изменяются компоненты II и III, при $a_1 = a_1^3$ — IV и при $a_1 = a_1^4$ — IV и V компоненты вектора X . Таким же образом предположим, что на втором и третьем этапах процесса обработки при различных значениях параметров a_2 и a_3 изменяются соответственно: компоненты I и II при значении $a_2 = a_2^1$; компоненты III — $a_2 = a_2^2$; компоненты IV, V и VI — $a_2 = a_2^3$; компоненты II, III и IV — $a_2 = a_2^4$; компоненты I, III, IV и V — $a_2 = a_2^5$; компоненты I, IV и VI при значении $a_3 = a_3^1$; компоненты II, III и V — $a_3 = a_3^2$; компоненты I, IV, V, VI — $a_3 = a_3^3$.

Теперь нетрудно убедиться, что минимум отклонения $f_k(X)$, вычисленный с помощью изложенного алгоритма, будет:

α_1	T_1	f_1	α_1^0	α_2	T_2	f_2	α_2^0	α_3	T_3	f_3	α_3^0
α_1^1	139	139	α_1^1	α_2^1	76,04	76,04	α_2^1	α_3^1	13,54	13,54	α_3^1
α_1^2	137	137	α_1^2	α_2^2	90,44	76,04	α_2^1	α_3^2	16,75	13,54	α_3^1
α_1^3	125	125	α_1^3	α_2^3	54,44	54,44	α_2^3	α_3^3	13,14	13,14	α_3^3
α_1^4	163	125	α_1^3	α_2^4	35,83	35,83	α_2^4				
				α_2^5	18,36	18,36	α_2^5				

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

Поступила в редакцию
5 VI 1969