рабочую силу и средства производства, не доставляя за все это время никакого продукта в качестве полезного эффекта... . При общественном производстве, так же как и при капиталистическом, рабочие, занятые в отраслях производства с относительно короткими рабочими периодами, будут лишь на короткое время отвлекать продукты, не давая взамен нового продукта; между тем отрасли производства с длинными рабочими периодами непрерывно отвлекают продукты на более продолжительное время, прежде чем сами начнут давать таковые. Следовательно, это обстоятельство вытекает из вещных условий соответствующего процесса труда, а не из его общественной формы» [10, стр. 401—402].

Отсюда следует, что социалистическое общество должно неодинаково расценивать продукты, производство которых требует «коротких» или «длинных рабочих периодов». Уже одна эта необходимость учитывать фактор времени говорит о том, что при решении различных хозяйственных вопросов (в централизованном порядке или отдельными хозрасчетными организациями) на основе цен, построенных по «стоимости» — по средним трудовым затратам, считались бы эквивалентными хозяйственные ресурсы, значение которых в действительности отнюдь неодинаково: одни и те же по величине затраты труда могут резко отличаться по своему распределению во времени. Анализ моделей оптимального планирования показывает, что приведение разновременных затрат к единому выражению при помощи формулы сложных процентов и учет соответствующих начислений на производственные фонды при расчетах по ценообразованию представляют собой грубый, приближенный, но практически допустимый метод оценки значения для общества фактора времени (при этом соизмерение капиталовложений — единовременных затрат — и текущих расходов рассматривается как частный случай различий затрат по времени их производства).

Игнорирование рядом экономистов значения для социалистического хозяйства фактора времени (проявляющегося при капитализме как проблема скорости оборота капитала) явилось одной из причин, задерживавших внедрение в нашу хозяйственную практику правильных приемов сравнения вариантов, учет при ценообразовании величины производственных фондов и введение платы за фонды, как важного элемента в организации хозяйственного расчета.

Развитие советской экономической мысли показывает, насколько важно для решения актуальных проблем социалистической экономики глубокое понимание и творческое развитие основных положений марксистско-ленинской экономической теории. Руководствуясь указаниями Маркса и Энгельса о методологии экономической науки и об основных отличительных чертах социалистического общества, используя замечания классиков марксизма-ленинизма по отдельным проблемам социалистической экономики, советские ученые обеспечат дальнейшее развитие и конкретизацию теории социалистической экономики и неразрывно с ней связанной научной методологии планового руководства хозяйством.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., изд. 2-е, т. 34.
2. Там же, т. 23.
3. Там же, т. 36.
4. Там же, т. 20.
5. Архив Маркса и Энгельса. М., Партиздат, 1935, т. IV.
6. К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., изд. 2-е, т. 4.
7. Там же, т. 33.
8. В. И. Ленин. Полное собрание сочинений, изд. 5-е, т. 43.
9. К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., изд. 2-е, т. 25, ч. I.
10. Там же, т. 24.

Поступила в редакцию
15 VII 1968

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1968 том IV, вып. 6

ЛИНЕЙНЫЙ ПРОГНОЗ ПО ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ ПРИ НАЛИЧИИ ОШИБОК В ПЕРЕМЕННЫХ, МАРКОВСКОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ И ЗАВИСИМОСТИ ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ПЕРЕМЕННЫХ

Б. Н. МИХАЛЕВСКИЙ

(Москва)

Основная цель данной статьи сводится к получению формул точечного и интервального линейного (или приводящегося к линейному) прогноза по уравнению

$$X_t = \beta_t' z_t + u_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T, \ldots, T + \theta \tag{1}$$

с постоянными и переменными коэффициентами без основных ограничительных предпосылок традиционного метода наименьших квадратов.

Прямоугольные скобки в дальнейшем означают вектор, круглые — матрицу, крышка над буквой — диагональную матрицу, штрих — транспонирование, X_t^* — интервальный прогноз, t^*, d, r_1 — статистики Стьюдента, Дарбина — Уотсона, первый эмпирический коэффициент автокорреляции, σ и σ^* — среднеквадратические ошибки как корень квадратный из дисперсии и как 1,253 $|\eta|$, где $|\eta|$ — модуль простой средней ошибки, v — коэффициент вариации, s — выборочная оценка σ, M — знак математического ожидания, R_1, R_2 — первые эмпирические коэффициенты автокорреляции переменных, i' — транспонированный единичный вектор, I — единичная матрица. Индекс t будет использоваться только в необходимых случаях.

Вероятностные утверждения относительно u_t и переменных составляют проблему спецификации, т. е. группу предпосылок, лежащих в основе той или иной разновидности метода наименьших квадратов. Ослабление этих предпосылок составляет содержание задачи корректной спецификации и ведет к развитию группы критериальных статистик, позволяющих судить о степени улучшения спецификации в том или ином отношении, а следовательно, об обоснованности перехода от задачи оценки к задаче прогноза и изменении качества прогноза.

По единодушному мнению, предпосылки классического метода наименьших квадратов являются чрезмерно ограничительными и потому во многих случаях приводят к неудовлетворительному качеству спецификации, а следовательно, и прогноза (см., например, [1—6]).

Основные из этих предпосылок для (1) таковы:

1) возмущения не зависят от Z, т. е. нет разницы между оценкой и истинным u, так что u не содержат систематических ошибок и, следовательно, $M(u) = 0$;

2) возмущения не коррелируют друг с другом и имеют постоянную дисперсию, т. е. $M(u'u) = \sigma^2 I$, $\sigma^2 < \infty$. Когда (1) основано на временных рядах, это означает также нулевую остаточную автокорреляцию и постоянство σ^2 во времени;

3) ошибки имеются только в уравнении, но не в переменных, которые представляют собой нестохастические действительные числа. Следствием

этого для (1), базирующегося на временных рядах, является дополнительно отсутствие автокорреляции в самих переменных;

4) матрица Z в (1) содержит все переменные, необходимые для правильной спецификации (1), и имеет ранг k (k — число независимых переменных), т. е. не вырождена, и уравнение (1) исключает мультиколлинеарность;

5) коэффициенты (1) являются постоянными во времени, что вместе с предпосылками 1—2 означает, что в основе (1) лежит стационарный случайный процесс. Независимо от предпосылок 1—2, это условие нельзя считать слишком типичным для экономических процессов.

При этих условиях, представив

$$uu' = (X - b'Z)'(X - b'Z), \tag{2}$$

минимум (2) дает система нормальных уравнений

$$b = (Z'Z)^{-1}Z'X, \tag{3}$$

откуда при невырожденности $Z'Z$

$$b = \beta + (Z'Z)^{-1}Z'u. \tag{4}$$

Но так как в силу предпосылок 1 и 3 $M(b) = \beta$, т. е. оценка наименьших квадратов будет несмещенной, а ее ковариационная матрица в силу предпосылки 2, симметричности, идемпотентности и положительной полуопределенности матрицы $Z'Z$ будет равна

$$M[(b-\beta)'(b-\beta)] = M[(Z'Z)^{-1}uu'Z(Z'Z)^{-1}] = \sigma^2(Z'Z)^{-1}, \tag{5}$$

причем, как известно,

$$s^2 = \frac{T}{T-k}\sigma^2 \tag{6}$$

будет несмещенной оценкой σ^2.

При вышеуказанных предпосылках уравнение оценки ($t = T$) и прогноза ($t > T$) будет иметь вид

$$X_t = b'Z_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T + \theta, \tag{7}$$

а дисперсия составит

$$M[(X_t^* - X_t)^2] = Z_t'Z_t \cdot M[(b-\beta)'(b-\beta)] + \\ + M(u_t'u_t) + 2Z_tM[(b-\beta)u_t]. \tag{8}$$

$Z_tM[(b-\beta)'(b-\beta)]u_t = 0$, так как $u_1, \ldots, u_T$ не коррелируют друг с другом и с $u_{T+1}, \ldots, u_{T+\theta}$, первый член есть $Z_t's^2(Z_t'Z_t)^{-1}Z_t$, а второй член в правой части — просто s^2.

Таким образом, с учетом постоянного члена

$$\sigma^2_{X^*_t - X_t} = s^2\left[I + \frac{I}{t-1} + Z_t'(Z_t'Z_t)^{-1}Z_t\right], \quad t = 0, 1, \ldots T + \theta. \tag{9}$$

Теперь используем тот факт, что

$$C = \frac{[X_t^* - M(X_t Z_t)]\sqrt{T-k}}{s\sqrt{I + \frac{I}{t-1} + Z_t'(Z_t'Z_t)^{-1}Z_t}}, \quad t = 0, 1, \ldots, T \tag{10}$$

имеет распределение Стьюдента с $T - k$ степенями свободы [7, стр. 343] (для которого критерий

$$\sigma / \sigma^* \approx 1 \tag{11}$$

при малых выборках может служить лишь частичным приближением) для оценки доверительного интервала при наличии постоянного члена

$$X_t^* = X_t \pm t^* s \sqrt{I + \frac{I}{t-1} + Z_t'(Z_t'Z_t)^{-1}Z_t}, \quad t = 0, 1, \ldots, T + \theta. \tag{12}$$

Таким образом, при использовании классического метода наименьших квадратов не возникает различия между задачами оценки и прогноза.

В то же время, хорошо известно, что из-за наличия предпосылок 1—5 оценки (3) и соответственно прогноз (7), (12) являются завышенными, т. е. *смещенными вверх по отношению к неизвестным истинным оценкам.* И хотя могут быть получены определенные — в основном асимптотические — результаты в отношении оценок наибольшего правдоподобия или обобщенного метода наименьших квадратов при различных вариантах ослабления или исключения предпосылок 1—5, практически важнее всего оценка эффекта улучшенной спецификации с точки зрения несмещенности и эффективности по отношению к традиционным оценкам наименьших квадратов. Такая оценка будет сделана ниже.

Ослабление или полное исключение предпосылок 1—5 классического метода наименьших квадратов для задач оценки и прогноза составляет, таким образом, содержание правильной спецификации.

Предварительные результаты этой улучшенной спецификации для уравнений, основанных на малых выборках из временных рядов, сводятся к следующему:

1) в случае с линейно изменяющимися коэффициентами происходит переход к описанию нестационарного экономического процесса, а при постоянных коэффициентах — квазистационарного, так как $s_t^2 \neq \text{const}$;

2) оценки, прогноз и его доверительный интервал зависят от спецификации начальных условий оценки возмущения, т. е. u_1;

3) в большинстве случаев после введения лучшей спецификации оценки регрессии будут по модулю ниже, чем при классическом методе наименьших квадратов, давая, таким образом, улучшение несмещенности, но обладая меньшей или, по крайней мере, не большей эффективностью;

4) соответственно уровень прогнозируемой переменной будет обычно ниже, чем в классическом методе наименьших квадратов, но доверительный интервал прогноза, как правило, шире.

Перейдем теперь к описанию процесса последовательного улучшения спецификации уравнений (1) и (7).

Его первая фаза связана лишь с задачей оценки, а не прогноза, и предполагает исключение мультиколлинеарности и введение ошибок в переменные.

1. ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ПРИ ИСКЛЮЧЕНИИ МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТИ И НАЛИЧИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Ограничение задачей оценки, т. е. временным периодом, покрываемом выборкой, объясняется тем, что дальнейшая спецификация охватит основные элементы ошибки прогноза, так что на данной стадии достаточно рассмотреть лишь ошибки спецификации в связи с наличием мультиколлинеарности и измерения переменных.

Исключение мультиколлинеарности равнозначно соблюдению предпосылки 4, лежащей в основе уравнения (1), и является исходной точкой всякого дальнейшего продвижения вперед в области спецификации, так как ярко выраженная мультиколлинеарность сразу приводит к бессмысленным или сильно смещенным оценкам.

Трудность решения состоит в том, что из-за часто применяемого упрощения модели с целью избавиться от мультиколлинеарности появляются ошибки неполной идентификации, и до недавнего времени большинство предложенных методов не могли успешно справиться с этой задачей *.

Метод [9] свободен от основных дефектов и может быть применен для исключения мультиколлинеарности. Его использование основано на идее анализа отклонений от ортогональности независимых переменных и соответствующем анализе определителя корреляционной матрицы—$\det|Z'Z|$— и матрицы, обратной корреляционной, т. е. нормированной матрицы $(Z'Z)^{-1}$. Оба эти элемента имеются в готовом виде при нахождении оценки (3).

Последующая техника исключения мультиколлинеарности при нормальности распределения складывается из четырех шагов:

1) Общая проверка наличия или отсутствия мультиколлинеарности заключается в получении численной и порядковой шкалы степени зависимости между подмножествами переменных, т. е. отклонения их от ортогональности. Для этого используется тот факт, что $\det|Z'Z|$ имеет приближенное распределение χ^2 с $1 / (2k(k-1))$ степенями свободы (это показано С. Уилксом и М. Бартлетом — цитировано в [9])

$$\chi^2|Z'Z| = -[(T-1) - {}^1\!/_6(2k+5)] \ln |Z'Z|, \tag{13}$$

где

$$1 \geqslant |Z'Z| \geqslant 0. \tag{14}$$

2) Для проверки зависимости данной переменной от других переменных множества Z используется тот факт, что в условиях ортогональности диагональные элементы матрицы, обратной корреляционной, т. е. нормированной матрицы $(Z'Z)^{-1}$, имеют точное F-распределение, так что проверка выполняется с помощью таблиц F-распределения.

3) Для проверки взаимозависимости независимых переменных используется тот факт, что в условиях ортогональности недиагональные элементы матрицы, обратной корреляционной, т. е. нормированной матрицы $(Z'Z)^{-1}$, имеют распределение Стьюдента.

4) После этого применяется принцип условной регрессии, т. е. часть параметров для переменных, обнаруживших мультиколлинеарность, оценивается внешним образом.

Исключение мультиколлинеарности позволяет перейти ко второму шагу оценки (1) для $t \leqslant T$ — включению ошибок измерения переменных, т. е. устранению первой части предпосылки 3 обычного метода наименьших квадратов (см. [10], где дана модель отдельно с ошибками измерения и прогноза) **.

Из многочисленных имеющихся возможностей мы воспользуемся обычным методом наименьших квадратов в сочетании с техникой оценки ошибок спецификации [4, 5, 11]. Такая комбинация обладает рядом преимуществ по сравнению с остальными: 1) она не предъявляет жестких требований к априорной информации, 2) результаты не являются асимптотическими, 3) вычислительная схема является простой. Однако она требует предположений о независимости и аддитивности ошибок независимой и

---

* Единственными конкурентами сейчас являются методы [1, 8, 9]. Недостатки метода Г. Тинтнера сводятся к следующему: 1) для определения несистематической части переменных применяется не очень надежный метод вариации разностей; 2) статистические критерии, применяемые для оценки числа линейных зависимостей, относятся лишь к очень большим выборкам; 3) для явного исключения мультиколлинеарности — если не влияют перечисленные выше два фактора — требуется применение довольно громоздкой вычислительной процедуры, органически не связанной с основным циклом вычислений.

** Для оценки параметров в линейном парном уравнении при наличии ошибок измерения могут быть использованы непосредственно несколько методов [2—5, 11—17].

зависимой переменной и последовательного включения эффектов ошибок измерения этих переменных.

Иначе говоря, вместо полной модели с ошибками в уравнении и переменных

$$X_t = x_t + \hat{q}_t, \tag{15}$$

$$Z_t = z_t + v_t,$$

$$X_t = \beta_1' Z_t + u_{1t}, \quad t = 0, 1, \ldots, T \tag{16}$$

сначала берется модель, в которой $\hat{q}_t = 0$.

Для последнего случая оценки получаются применением методов оценки ошибки спецификации. Пусть правильная спецификация имеет вид

$$X = \beta_{11}' Z_1 + u_{11} \tag{17}$$

а неправильная

$$X = \beta_{12}' Z_2 + u_{12}. \tag{18}$$

Оценкой наименьших квадратов для (18) будет

$$b_{12} = (Z_2' Z_2)^{-1} Z_2' X = (Z_2' Z_2)^{-1} Z_2' Z_1 \beta_{12} + (Z_2' Z_2)^{-1} Z_2 u_{12}. \tag{19}$$

Взяв средние от обеих частей (19) при нестохастическом Z, получим

$$\beta_{12} = M(b_{12}) = P b_{11} = (Z_2' Z_2)^{-1} Z_2' X \beta_{11}, \tag{20}$$

где P — матрица коэффициентов оценок наименьших квадратов регрессии правильно определенных независимых переменных на неправильно специфицированные переменные.

Введение случайной ошибки измерения дает

$$Z_2 = Z_1 + v, \tag{21}$$

где v — матрица ошибок измерения с нулевой средней и независимым совместным распределением от u_{11}, практически определяемая как наблюдаемые отклонения от трендов соответствующих переменных. Такое определение предполагает диагональность v и означает исключение предпосылок 1—2 в отношении уравнений временны́х рядов для переменных X и Z. Более точная спецификация v в данном случае не требуется, так как важно не качество оценок коэффициентов во временны́х уравнениях для X и Z, а только хорошая спецификация элементов v. Принципиально же v может и не быть диагональной, т. е. включать корреляцию ошибок измерения Z. При спецификации Z_2 в виде (21) уравнения (20) и (21) дают

$$P = (Z_1' Z_1 + \hat{v}' Z_1 + \hat{v}' \hat{v} + Z_1' \hat{v})^{-1} (Z_1' Z_1 + \hat{v}' Z_1) =$$
$$= [I + (Z_1' Z_1 + \hat{v}' Z_1)^{-1} (\hat{v}' \hat{v} + Z_1' \hat{v})]^{-1}. \tag{22}$$

Матрица $(Z_1' Z_1 + \hat{v}' Z_1)^{-1}$ всегда существует, так как при безусловном распределении с чисто случайными ошибками $M(\hat{v}' Z_1) = 0$.

Заменяя $\hat{v}' Z_1$ и $Z_1' \hat{v}$ их средними, получим

$$P = [I + (Z_1' Z_1)^{-1} \hat{v}' \hat{v}]^{-1}. \tag{23}$$

Таким образом,

$$\beta_{11} \equiv \hat{b} = P^{-1} b = b' [I + (Z_1' Z_1)^{-1} \hat{v}' \hat{v}], \tag{24}$$

и ошибка спецификации равна

$$\beta_{12} - \beta_{11} = -b' (Z_1' Z_1)^{-1} \hat{v}' \hat{v}, \tag{25}$$

т. е. игнорирование ошибок измерения в независимых переменных ведет к получению смещенных вниз оценок. Но величина этого смещения невелика, ибо, как видно из (23), ошибка спецификации не больше коэффициента вариации.

Теперь, пользуясь независимостью и аддитивностью v, q, u_{12}, включим ошибку измерения зависимой переменной.

(16) — (18), (25) в данном случае будут иметь вид

$$X_1 = b_1'Z_1 + u_{11}, \tag{26}$$

$$X_2 = b_{11}'Z_1 + u_{12}, \tag{27}$$

$$X_2 = X_1 + \hat{q}, \tag{28}$$

$$M(\hat{q}) = 0, \quad M(\hat{q}, u_{12}) = 0, \quad M(\hat{q}, \hat{v}) = 0. \tag{29}$$

Оценка наименьших квадратов (28) будет

$$b_{11} = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'X_2. \tag{30}$$

При нестохастическом Z_1 и учете (28) усреднение (30) дает

$$M(b_{11}) = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'(X_1 + \hat{q}) = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_1b_1 +$$

$$+ (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'u_{11} + (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'\hat{q} = b_1 + \frac{Z_1\hat{q}}{Z_1'Z}, \tag{31}$$

так что

$$b_1 = b - \frac{Z_1'\hat{q}}{Z_1'Z_1} \equiv \beta - \frac{Z_1'\hat{q}}{Z_1'Z_1}. \tag{32}$$

Таким образом, наличие ошибок измерения в независимых переменных ведет к смещению вверх оценок наименьших квадратов, равному отношению

$$\frac{\text{средняя ошибка выхода}}{\text{средняя величина входа}}$$

В силу предпосылки независимости и аддитивности этих эффектов имеем окончательные оценки наименьших квадратов при наличии ошибок измерения переменных

$$b_1^* = \beta'\left(I + \frac{\hat{v}'\hat{v} - Z_1'\hat{q}}{Z_1'Z_1}\right) \equiv \beta'(I + \hat{\varkappa}). \tag{33}$$

(33) показывает: 1) благодаря $\varkappa$ величина b_1^* может в дальнейшем рассматриваться как нестохастическая; 2) происходит компенсирующее влияние ошибок измерения зависимой и независимых переменных, так что оценки (33) близки к обычной оценке наименьших квадратов и, по крайней мере, асимптотически будут иметь ее основные свойства.

Показателем изменения качества оценок является эффективность оценки b_1^* по отношению к β, т. е. в данных условиях малых выборок

$$\mathrm{Eff}\,\frac{b_1^*}{\beta} = (I + \hat{\varkappa})'(I + \hat{\varkappa}). \tag{34}$$

Иначе говоря, при введении ошибок измерения в переменные оценки наименьших квадратов по модулю несколько сдвигаются вниз (на величину порядка 1—3% для парного случая) и будут более эффективными, так как (34) меньше единицы, т. е. некоторое улучшение по сравнению с обычным методом наименьших квадратов качества оценок с точки зрения их несмещенности достигается при включении ошибок измерения в переменные с одновременным выигрышем эффективности.

Уравнение (1) теперь имеет вид

$$X_1 = b_1^{*\prime}Z. \tag{35}$$

Полученные результаты дают возможность дальше улучшить спецификацию (1) за счет исключения лежащей в его основе предпосылки 1, что, в свою очередь, позволяет объединить задачу оценки с задачей прогноза.

2. ВКЛЮЧЕНИЕ РАЗЛИЧИЯ МЕЖДУ ИСТИННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ И ОЦЕНКОЙ ВОЗМУЩЕНИЯ И УСЛОВИЯ $\delta^2 \neq$ CONST.

В действительности (1) имеет дело не с истинным u, а лишь с его оценкой, и эту оценку возмущения u^* можно представить в виде

$$u^* = X - Z(Z'Z)^{-1}Z'X \equiv NX. \tag{36}$$

Но так как N симметрична, идемпотентна, положительно полуопределена и после устранения мультиколлинеарности имеет ранг $T - k$ (последнее свойство отражено в том, что $NX = 0$ [6], то

$$u^* = NX = N'(\beta'Z + u) = Nu, \tag{37}$$

т. е. N есть матрица перехода от u^* к u.

Следовательно, даже в случае постоянных коэффициентов и при $M(u) \neq 0$, $M(u'u) \neq sI$

$$M(u^*u^{*\prime}) = M(Nuu'N') = s^2N, \tag{38}$$

т. е. u^* включает систематическое смещение, в частности, будет автокоррелированным, $s_{u^*}{}^2 \neq \text{const}$ и может содержать гетероскедастичность.

(37) образует исходный пункт для дальнейшей спецификации уравнений (1) и (7) и доверительного интервала (12), равно как и для объединения задач оценки и прогноза за счет перехода к адаптивному типу прогноза.

Выразив u_1 и $s_{u_1}{}^2$ через $u_1{}^*$ и $s_{u_1^*}{}^2$, получим

$$u_1 = N^{-1}u_1{}^*, \tag{39}$$

$$s_{u_1}{}^2 = (N^{-1})'\, N^{-1}\, s^2_{u_1^*}. \tag{40}$$

Теперь оценка наименьших квадратов включит измеримую величину $u_{1t}{}^*$, так что (4) и, следовательно, (33) будут зависеть от времени, знака и величины $u_{1t}{}^*$

$$b_{1t} = b_1{}^{*\prime}(I + N_t{}^{-1}u_{1t}{}^*) \equiv \beta'(I + \hat{\varkappa})'(I + N_t{}^{-1}u_{1t}{}^*), \tag{41}$$

$t = 0, 1, \ldots, T, \ldots, T + \theta$.

(41) показывает, что устранение предпосылки 1 традиционного метода наименьших квадратов означает переход к квазиадаптивному прогнозу, причем оценка (41), минимизирующая сумму квадратов отклонений, сохраняет свойство несмещенности, но лишь при $s_{u_1}{}^2 = \text{const}$ она переходит в разновидность оценки обобщенного метода наименьших квадратов (оценку Эйткена), а при дополнительных условиях $M(u_{1t}{}^*) = \hat{\varkappa} = 0$ — в обычную оценку наименьших квадратов. Так как обычно $\hat{\varkappa} < 0$, то соотношение модулей b_{1t} и β зависит от знака и величины $u_{1t}{}^*$, а точнее от знака и величины $u_{1t}{}^*$ в $t = 1$.

Наконец, эффективность оценки (41) по отношению к обычной оценке наименьших квадратов будет равна

$$\text{Eff}\ \frac{b_{1t}}{\beta} = \frac{s^2_{u_{1t}^*}\,(N_tN_t{}')^{-1}}{s_{u_1}{}^2}. \tag{42}$$

С помощью (40) для $Z_t > 0$ получаем

$$\text{Eff}\ \frac{b_{1t}}{\beta} = (1 + \hat{g}_{s^2u_{1t}^*}) > 1, \tag{43}$$

и в специальном случае $t > T$:

$$\mathrm{Eff}\,\frac{b_{1,\,T+\theta}}{\beta} = \left(1 + g_{s^2_{u^*_{1,\,T+\theta}}}\right) \frac{(N'_{T+\theta}\,N_{T+\theta})^{-1}}{(N_\tau{}'\,N_\tau)^{-1}}, \tag{44}$$

где $\tau = T$, $g_{s^2{}_{u^*{}_1,\,T+\theta}}$ — темп изменения дисперсии.

Иначе говоря, переход к квазиадаптивному прогнозу с некоторым уменьшением несмещенности оценки сопровождается определенным понижением ее эффективности за пределами выборки (в плановом периоде).

Оценки (41) вместе с (40) приводят к следующему уравнению для одновременного решения задач оценки и прогноза

$$X_{2t} = b_{1t}'Z_t + u_{1t} \equiv \beta'(I + \hat{\varkappa})\,(I + N_t{}^{-1}u_{1t}{}^*)Z_t + N_t{}^{-1}u_{1t}{}^*,$$
$$t = 0, 1, \ldots, T + \theta, \tag{45}$$

а доверительный интервал прогноза при сохраняющемся пока предположении об отсутствии автокорреляции найдем из (40) и выражения для дисперсии оценки

$$M[(b_{1t} - \beta)'(b_{1t} - \beta)] = s^2_{u^*{}_{1t}} N_t{}^{-1\prime}Z_t(Z_t{}'Z_t)^{-1}Z_tN_t{}^{-1}.$$
$$t = 0, 1, \ldots, T + \theta, \tag{46}$$

так что при наличии постоянного члена

$$X_{2t}{}^* = X_{2t} \pm t^*s_{u_{1t}{}^*}\sqrt{I + \frac{I}{t-1} + (I + \hat{\varkappa})'\,(I + \hat{\varkappa})\,N_t^{-1\prime}Z_t\,(Z_t{}'Z_t)^{-1}\,Z_tN_t^{-1}}, \tag{47}$$

$t = 0, 1, \ldots, T + \theta$.

Из сравнения (47) и (12) видно, что для $t > T$, по сравнению с прогнозом по обычному методу наименьших квадратов, будет наблюдаться расширение доверительного интервала прогноза, так как при возрастании $Z_ts_{u^*_{1t}} > s_{u^*}$, $(Z_t{}'Z_t)^{-1}$ всегда существует из-за невырожденности $Z_t{}'Z_t$ и больше I настолько, чтобы почти во всех случаях компенсировать тот факт, что $(I + \hat{\varkappa})'(I + \hat{\varkappa}) < I$. Очевидно, однако, что такое расширение доверительного интервала совсем необязательно для $t = T$, т. е. для задачи оценки.

В итоге, переход к квазиадаптивному прогнозу с ошибками измерения переменных дает, как правило, улучшение несмещенности прогноза по отношению к прогнозу по обычному методу наименьших квадратов, но за счет расширения его доверительного интервала.

Сделаем следующий шаг в улучшении спецификации уравнений (1) и (7), устранив вторые части предпосылок 2 и 3 обычного метода наименьших квадратов включением марковской автокорреляции.

3. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ И ПРОГНОЗА С МАРКОВСКОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИЕЙ И ОШИБКАМИ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ БЕЗ ЯВНОГО ВВЕДЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Эта процедура означает исключение не только остаточной автокорреляции, но и автокорреляции самих переменных при сохранении условий $M(u_t) \neq 0$ и $s_{u_t} \neq \mathrm{const}$. Поэтому полученные оценки и уравнения будут характеризовать довольно ярко выраженный нестационарный процесс и квазиадаптивный прогноз и будут обладать несколько большей общностью, чем обычные оценки обобщенного метода наименьших квадратов.

Отличительная черта указанного процесса улучшения спецификации и прогноза заключается в его унифицированном характере. Это достигается тем, что во всех случаях — как для оценки, так и для адаптивного прогноза — совершается почти однозначный переход из плоскости первоначальных переменных в плоскость преобразованных переменных, полученных авторегрессивным преобразованием первого порядка при наличии марковской автокорреляции возмущения и переменных, а также ошибок измерения переменных.

Общие преимущества подобного подхода заключаются в следующем:

1) С помощью единого метода учитываются эффекты автокорреляции остатков и переменных (при наличии одновременно ошибок измерения переменных) на оценки коэффициентов и качество адаптивного прогноза по малым выборкам.

2) Для большинства случаев увеличивается несмещенность оценок и прогноза по отношению к обычным оценкам наименьших квадратов.

3) Как и в обычной спецификации подобного типа для обобщенного метода наименьших квадратов, не требуется знание всей ковариационной матрицы, и, как показывает опыт, двукратного применения авторегрессивного преобразования первого порядка при остаточной автокорреляции обычно достаточно для удовлетворительного исключения остаточной автокорреляции в уравнениях с 1 и 2 независимыми переменными в условиях малых выборок.

4) В преобразованных переменных центральной частью всех вычислений остаются стандартные формулы метода наименьших квадратов.

Эти преимущества не устраняются в существенной степени и недостатками данного метода, к которым относятся:

1) Область применения метода ограничена классом марковских случайных процессов первого порядка. Однако практические вычисления, включившие более 500 различных временны́х рядов, показали, что примерно в $^3/_4$ случаев такая спецификация оказывается удовлетворительной.

2) Смещенность вниз первых коэффициентов остаточной автокорреляции в малых выборках ведет к смещению вниз и оценок регрессии по отношению к оценкам обобщенного метода наименьших квадратов. При сильном смещении это сопровождается и ухудшением качества прогноза по сравнению с обычным методом наименьших квадратов. Однако почти в любом случае увеличивается отношение шума к полезному сигналу (коэффициент вариации), так что эффективность оценок может и понижаться, а доверительный интервал прогноза обычно расширяется. Широкий доверительный интервал самих оценок первых коэффициентов автокорреляции в малых выборках дополнительно уменьшает надежность оценок и прогноза, а более чем однократное применение авторегрессивного преобразования лишь усугубляет положение.

При практических вычислениях ослабление этих отрицательных эффектов достигалось следующим образом: а) рассматривалась вся авторегрессивная структура, т. е. марковская автокорреляция первого порядка в остатке и переменных; б) авторегрессивное преобразование не применялось более двух раз; в) вводилась одинаковая поправка на эффект малой выборки для остатка и переменных, а сама выборка увеличивалась до максимально возможных размеров.

3) Оценка значимости первого коэффициента остаточной автокорреляции, входящего в авторегрессивное преобразование, затруднительно, с одной стороны, из-за недостаточной мощности традиционного критерия — статистики Дарбина — Уотсона, а с другой — из-за значительной сложности оценки полностью исключающего остаточную автокорреляцию BLUS-критерия и сложности включения вычислительной процедуры BLUS-критерия в общую схему прогноза (от Best Linear Unbiased Scalar — наилучшая линейная несмещенная скалярная оценка).

Паллиативный выход заключался в следующем:

а) была проведена эмпирическая оценка нижних границ значимости r_1 и d для парной регрессии линейной в логарифмах при малых выборках из 8 и 16 наблюдений и эмпирически же для этих выборок исследована связь между авторегрессивным преобразованием первого порядка при остаточной автокорреляции с изменением углового коэффициента регрессии, коэффициента вариации, статистик t^*, r_1, d;

б) это позволяло применить сразу несколько критериев, а не только d-статистику, для оценки целесообразности авторегрессивного преобразования при остаточной автокорреляции;

в) если все эти критерии не давали возможности в некоторых случаях предварительно судить о целесообразности авторегрессивного преобразования, то оно все же проводилось фактически, и фактические результаты снова оценивались на основе r_1, d, b, v, t^*.

В итоге сразу происходит переход к обобщенной автокорреляционной модели с одновременной автокорреляцией остатка * и переменных в условиях $M(u) \neq 0$, $s_u^2 \neq \text{const}$, а в заключение используется тот факт, что (33) дает возможность рассматривать переменные как нестохастические, несмотря на наличие ошибок измерения, и ошибки измерения вводят в общую модель. Тем самым оказывается исчерпанной задача получения уравнений и доверительных интервалов прогноза для регрессий на основе квазистационарного случайного процесса.

Эта наиболее общая модель для случая с постоянными коэффициентами описывается следующим образом

$$u_{2t} = \frac{T}{T-k} r_1 u_{2,\, t-1} + \xi_{1t}, \tag{48}$$

$$Z_t = \frac{T}{T-k} R_1 Z_{t-1} + \xi_{2t}, \tag{49}$$

$$X_t = \frac{T}{T-1} R_2 X_{t-1} + \xi_{3t}, \tag{50}$$

$$X_t = \beta_2' Z_t + u_{2t}, \tag{51}$$

где в общем случае матрица R_1 включает автокорреляции остатков вспомогательных регрессий Z_1 на Z_2, Z_3, . . . , т. е.

$$R_1 = \begin{pmatrix} R_{1,\,11} \dots R_{1,\,1k} \\ \dots\dots\dots \\ R_{1,\,k1} \dots R_{1,\,kk} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

так что диагональные элементы находятся по (49), а недиагональные формируются следующим образом

$$Z_{jt} = c_j Z_{it} + \pi_{ijt}, \quad i = j = 1, \dots, k \quad \text{для} \quad i \neq j, \tag{52а}$$

$$\pi_{ijt} = R_{ij}\pi_{ij,\, t-1} + \delta_{ijt}, \tag{52б}$$

$$M(\delta) = 0, \quad M(\delta'\delta) = \text{const}. \tag{52в}$$

Так как мультиколлинеарность уже исключена, то на элементы R_1 не влияет наличие корреляции между независимыми переменными

$$u_{3t} = N_t^{-1} u_{5t}^*, \tag{53}$$

* Спецификация u_t, помимо формы u_t, связана, главным образом, с состоянием методов оценки неизвестного параметра [2—5, 19—26].

что после подстановки сразу дает

$$u_{2t}^* = r_1 \frac{T}{T-k} \frac{I - Z_t(Z_t'Z_t)^{-1}Z_t}{I - Z_{t-1}(Z'_{t-1}Z_{t-1})^{-1}} u^*_{2t-1} + N_t\xi_{1t} \equiv r_1 M_{t-1}^{-1} N_t \xi_{1t}, \tag{53a}$$

$$r_1 = \frac{T}{T-k} \frac{\Sigma u_{2t}^* u^*_{2,\,t-1}}{\Sigma u_{2t}^{*\prime} u_{2t}^* - u^{*2}_{2.0}}, \tag{54}$$

$$R_{1ii} = \frac{T}{T-k} \frac{\Sigma \xi^*_{2iit}\xi^*_{2ii,\,t-1}}{\Sigma \xi^{*\prime}_{2iit}\xi^*_{2iit} - \xi^{*2}_{2ii,0}}, \tag{55}$$

$$R = \frac{T}{T-1} \frac{\Sigma \xi_{3t}^* \xi_{3,\,t-1}}{\Sigma \xi_{3t}^{*\prime}\xi_{3t}^* - \xi_{3t}^{*2}} \tag{56}$$

После полной спецификации остатка и переменных

$$M(\xi_{2it},\ \xi_{2jt}) = 0, \quad i \neq j, \tag{57}$$

т. е. возмущения в уравнениях для независимых переменных не коррелируют друг с другом

$$M(\xi_{3t}) \neq 0, \quad M(\xi_{3t}',\ \xi_{3t}) \neq \text{const}, \tag{58}$$

$$\xi_{3t} = [I - R_{2,\,t-1}(R'_{2,\,t-1}R_{2,\,t-1})^{-1}R'_{2,\,t-1}]^{-1}\xi_{3t}^* \equiv N_{1t}^{-1}\xi_{3t}^*, \tag{59}$$

$$M(\xi_{2t}) \neq 0, \quad M(\xi_{2t}',\ \xi_{2t}) \neq \text{const}, \tag{60}$$

$$\xi_{2t} = [I - R_{1,\,t-1}(R'_{1,\,t-1}R_{1,\,t-1})^{-1}R'_{1\ t-1}]^{-1}\xi_{2t}^* \equiv N_{2t}^{-1}\xi_{2t}^*. \tag{61}$$

$$M(u_{2t}) \neq 0, \quad M(u_{2t}',\ u_{2t}) \neq \text{const}. \tag{62}$$

(59) — (62) представляют собой условия систематического смещения возмущений в уравнениях (48) — (50).

$$\xi_{2t} = i'\xi_{2jt} \tag{63}$$

представляет собой условие аддитивности:

$$\xi_{4t} = u_{2t} + \xi_{2t} + \xi_{3t} \equiv N_t^{-1}u_{2t}^* + \xi_{2t} + \xi_{3t}, \tag{64}$$

$$M(\xi_{4t}',\ \xi_{4t}) = N_t^{-1\prime} V_{2t} N_t^{-1} + s^2_{\xi_{3t}^*} N_{1t}^{-1} + s^2_{\xi_{2t}^*} N_{2t}^{-1}, \tag{65}$$

$$M(\xi_{1t},\ \xi_{2t}) = M(\xi_{1t},\ \xi_{3t}) = M(\xi_{2t},\ \xi_{3t}) = 0. \tag{66}$$

(66) — условие некоррелируемости остатков друг с другом. V_{2t} определено ниже.

Использование (49) — (50) потом приводит к замене u_{2t} на ξ_{4t}. Наконец,

$$\hat{\xi}_{5t} = \hat{\xi}_{3t} + \hat{q}, \tag{67}$$

$$\hat{\xi}_{6t} = \hat{\xi}_{4t} + \hat{v} \tag{68}$$

являются условиями аддитивности $\hat{\xi}_{3t}$, $\hat{\xi}_{4t}$ и ошибок измерения переменных.

Само решение получается в две стадии. На первой решение находится для описанной выше чисто автокорреляционной модели, т. е. при $\hat{q} = \hat{v} =$

$= 0$, а на второй вводится поправка на наличие ошибок измерения в переменных с помощью (67) и (33).

Выполнение первой стадии начинается с введения следующих матриц:

$$V_{2t} = s^2_{\xi_{1t}} F_{1t}, \tag{69}$$

где

$$F_{1t} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 M_{t+1} & r_1^2 M_{t+2\ldots} & r_1^{t+\tau-1} M_{t+\tau-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ r_1^{t+\tau-1} M_{t+\tau-1} & r_1^{t+\tau-2} M_{t+\tau-2} & r_1^{t+\tau-3} M_{t+\tau-3\ldots} & 1 \end{pmatrix}; \tag{70}$$

$$V_{3t} = s^2_{\xi_{2t}} F_{2t}, \tag{71}$$

где

$$F_{2t} = \begin{pmatrix} 1 & R_2^1 & R_2^2 & R^{t+\tau-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_2^{t+\tau-1} & R_2^{t+\tau-2} & R_2^{t+\tau-3} & 1 \end{pmatrix}; \tag{72}$$

$$V_{4t} = (s^2_{\xi_{21t}}, \ldots, s^2_{\xi_{2kt}})(F_{31t}, \ldots, F_{3kt}), \tag{73}$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 1 & R_{1ij}^1 & R_{1ij}^2 & R_{1ij}^{t+\tau-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{1ij}^{t+\tau-1} & R_{1ij}^{t+\tau-2} & R_{1ij}^{t+\tau-3} & 1 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Далее, для описанной выше модели получаются оценки обобщенного метода наименьших квадратов.

С этой целью вводится линейная оценка

$$b_{2t} = A_t X_t, \tag{75}$$

в которой по свойству оценок обобщенного метода наименьших квадратов

$$A_t = \frac{V_{3t}^{-1} Z_t' V_{2t}^{-1} V_{4t}^{-1}}{Z_t' V_{2t}'^{-1} Z_t V_{3t}^{-1} V_{4t}^{-1}}. \tag{76}$$

Применим теперь к уравнению (51) с остатком (64) матричное преобразование G_t

$$G_t X_t = G_t \beta_2' Z_t + G_t \hat{\xi}_{4t} \tag{77}$$

и найдем для него оценку наименьших квадратов

$$b_{2t} = \frac{G_t Z_t' G_t X_t}{G_t Z_t' G_t Z_t} = \frac{Z_t' G_t' G_t X_t}{Z_t' G_t' G_t Z_t}. \tag{78}$$

Чтобы (78) были оценкой обобщенного метода наименьших квадратов, необходима идентичность (75) и (78), а это, в свою очередь, предполагает, что

$$\frac{V_{3t}^{-1} Z_t' V_{2t}^{-1} V_{4t}^{-1}}{Z_t' V_{2t}^{-1} Z_t V_{3t}^{-1} V_{4t}^{-1}} = \frac{Z_t' G_t' G_t}{Z_t' G_t' G_t Z_t}, \tag{79}$$

или

$$G_t' G_t = V_{3t}^{-1} V_{2t}^{-1} V_{4t}^{-1}. \tag{80}$$

Так как (54) — (55) являются оценками Прейса — Уинстона [19], то применение преобразования типа H_1 вместо H не поведет к появлению дополнительной неэффективности. Поэтому после применения G_1-преобразования получаем

$$G_{1t}'G_{1t} = \begin{pmatrix} -\left(\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}\right)R_2 r_1 M_t & r_1 M_t\left(R_1 - \prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}\right) + R_1\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}\ldots 0 \\ 0 & -\left(\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}\right)R_2 r_1 M_{t+1}\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \qquad\qquad 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразованные переменные примут вид

$$X_t - \frac{\left(\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}\right)R_2 r_1 M_t}{r_1 M_t\left(\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j} - R_2\right) + R_2\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}}X_{t-1},$$

$$Z_t - \frac{\left(\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}\right)R_2 r_1 M_t}{r_1 M_t\left(\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j} - R^2\right) + R_2\prod_{j=1}^{k}\hat{R}_{1j}}Z_{t-1}, \qquad (82)$$

или в сокращенной форме

$$R_t = X_t - \delta_t X_{t-1}, \quad Q_t = Z_t - \delta_t Z_{t-1}. \qquad (83)$$

Теперь оценка обобщенного метода наименьших квадратов в преобразованных и первоначальных переменных получается следующим образом

$$b_{2t} = Q_t(Q_t'Q_t)^{-1}Q_t = \beta_{2t} + (Q_t'Q_t)^{-1}Q_t N_t^{-1}\xi_{4t}^*, \qquad (84)$$

и в первоначальных нестохастических переменных

$$b_{2t} = \beta - [I - \delta M_t)\,[Z_t'JZ_t(Z_t'Z_t)^{-1} - Z_t J(Z_t'Z_t)^{-1}N_t^{-1}\xi_{4t}^*], \qquad (85)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (85а)$$

(85) показывает, что соотношение b_{2t} с обычной оценкой наименьших квадратов для нестохастических переменных зависит от всей автокорреляционной структуры: 1) $b_{2t} < \beta$, если модуль $|\delta M_t| < I$ и выражение в квадратных скобках (85) положительно, причем $b_{2t} \ll \beta$, если $\delta < 0$; 2) $b_{2t} > \beta$, если δM_t и выражения в квадратных скобках (85) одного знака. Найдем далее оценку относительной эффективности

$$M[(b_{2t} - \beta)'(b_{2t} - \beta)] = (Z_t'Z_t)^{-1}Z_t'\Omega_t Z_t(Z_t'Z_t)^{-1}, \qquad (86)$$

где $$\Omega_t = \begin{pmatrix} 1 & \delta M_t s_t^2 & \ldots & 0 \\ \delta M_{t+1}s_{t+1}^2 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s^2_{\xi_{1t}^*}N_{1t}^{-1} & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & s^2_{\xi^*_{1,t+\tau}} & N^{-1}_{1,t+\tau} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} s^2_{\xi_{2t}^*}\ N_{2t}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^2_{\xi_{2t}^*}\ N^{-1}_{2,\ t+\tau} \end{pmatrix}. \tag{87}$$

Пользуясь (63), можно выразить $s^2_{\xi_{1t}^*}$ и $s^2_{\xi_{2t}^*}$ через $s^2_{u^*_{2t}}$

$$s^2_{\xi_{1t}^*} = f_{1t} s^2_{u_{2t}^*},\quad s^2_{\xi_{2t}^*} = f_{2t} s^2_{u_{2t}^*}, \tag{88}$$

и подстановка (88) в (87) позволяет все дисперсии выразить через s^2

$$\Omega_i = s^2 \begin{pmatrix} 1 & \delta M_t \dots 0 \\ \delta M_{t+1}(1+g_{s_{u_1^*}}) & 1 \quad \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 \quad\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} f_{1t}(1+g_{s_{u_1^*}})\,N_{1t}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_{1,\ t+\tau}\,(1+g_{s_{u_1^*}})^{t+\tau}_{\ } N^{-1}_{1,\ t+\tau} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} f_{2t}(1+g_{s_{u_1^*}})\,N_{2t}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{2,\ t+\tau}(1+g_{s_{u_1^*}})^{t+\tau} N^{-1}_{2,\ t+\tau} \end{pmatrix} = s^2 (J + \delta J_{1t} + \hat P_{1t} + \hat P_{2t}). \tag{89}$$

Таким образом,

$$M\,[(b_{2t}-\beta)'(b_{2t}-\beta)] = s^2 (Z_t'Z_t)^{-1}\Big[I + \delta Z_t' J_{2t} Z_t (Z_t'Z_t)^{-1} + $$
$$+ Z_t'\Big(\sum_{r=1}^{2}\hat P_{rt}\Big) Z_t (Z_t'Z_t)^{-1}\Big], \tag{90}$$

и эффективность по отношению к оценке наименьших квадратов с нестохастическими переменными будет равна

$$\mathrm{Eff}\,\frac{b_{2t}}{\beta} = I + \delta Z_t' J_1 Z_t (Z_t'Z_t)^{-1} + Z_t'\Big(\sum_{r=1}^{2}\hat P_{rt}\Big) Z_t (Z_t'Z_t)^{-1}, \tag{91}$$

т. е. повышение или понижение эффективности обобщенной оценки наименьших квадратов по сравнению с обычной при нестохастических переменных зависит от знаков и абсолютных величин δ и f_{1t}, f_{2t}.

Теперь происходит непосредственный переход к третьей стадии — включению ошибок измерения переменных. Это достигается, с одной стороны, использованием (33), а с другой — (85), (91)

Тогда (85) окончательно примет следующий вид

$$b_{3t} = \beta'(I+\varkappa) - (I - \delta M_t)(I+\varkappa)\,[Z_t' J_{1t} Z_t (Z_t'Z_t)^{-1} - $$
$$- Z_t J_{1t} (Z_t'Z_t)^{-1} N_t^{-1} \xi_{4t}^*], \tag{92}$$

и эффективность

$$\mathrm{Eff}\,\frac{b_{3t}}{\beta} = (I+\hat\varkappa)(I+\hat\varkappa)'\Big[I + \delta Z_t' J_1 Z_t (Z_t'Z_t)^{-1} + $$
$$+ Z_t'\Big(\sum_{r=1}^{2}\hat P_{rt}\Big) Z_t (Z_t'Z_t)^{-1}\Big]. \tag{93}$$

Уравнение оценки и прогноза, получающееся из (92) и условий (53а), (57) — (68), будет иметь следующий вид

$$X_{3t} = b_{3t}' Z_t + r_1 M_t N_t^{-1} u_{2,\,t-1}^{*} + N_{1t}^{-1} \xi_{1t}^{*} + N_{2t}^{-1} \xi_{2t}^{*}, \qquad (94)$$

а его доверительный интервал при введении постоянного члена

$$X_{3t}^{*} = X_{3t} \pm t^{*} s \cdot$$

$$\cdot \sqrt{I + \frac{I}{t-1} + (I+\hat{\varkappa})(I+\hat{\varkappa})' Z_t' Z_t \left[I + \delta Z_t' J_{1t} Z_t (Z_t' Z_t)^{-1} + \right.}$$

$$\sqrt{\left. + Z_t' \left(\sum_{r=1}^{2} \hat{P}_{rt} \right) Z_t (Z_t' Z_t)^{-1} \right] (Z_t' Z_t)^{-1}}. \qquad (95)$$

Таким образом, введение ошибок измерения улучшает несмещенность и эффективность оценок и прогноза при одновременном сужении доверительного интервала, если, как обычно, β смещено вверх из-за неточной спецификации. Обратное происходит в противоположном случае.

Для двух наиболее простых частных случаев — $M(u_t^{*}) = 0$, $M(u_t^{*\prime}, u_t) = \text{const}$, $k = 1$, $k = 2$ — приходим к следующему:

а) при $k = 1$

$$\delta = \frac{R_1 R_2 r_1}{r_1 (R_1 - R_2) + R_1 R_2}, \qquad (96)$$

$$b_{31} = b - (1+\varkappa) \left[(1-\delta) \left(Z_t^2 \Big/ \sum_{\tau=1}^{T} Z_\tau^2 \right) \right], \quad t = 0, 1, \ldots, T+\theta, \qquad (97)$$

$$\operatorname{Eff} \frac{b_{31}}{b} = (1+\varkappa)^2 \left[(1+\delta) \left(Z_t^2 \Big/ \sum_{\tau=1}^{T} Z_\tau^2 \right) \right], \qquad (98)$$

$$X_{31t} = b_{31} Z_t, \qquad (99)$$

$$X_{31t}^{*} = X_{31t} \pm t^{*} s \sqrt{1 + \frac{1}{t-1} + (1+\varkappa)^2 \left((1+\delta) Z_t^2 \Big/ \sum_{\tau=1}^{T} Z_\tau^2 \right)}; \qquad (100)$$

б) при $k = 2$:

$$\delta = \frac{r_1 R_{12} R_{13} R_{23} R_2}{R_{13} R_{23} R_2 (R_{12} - r_1) + R_{12} R_{23} r_1 (R_{13} + R_2)} \qquad (101)$$

и (97) — (100) перепишутся аналогичным образом. Для случая а) имеется программа для БЭСМ-3.

Таким образом, весь процесс оценки и прогноза в случае с постоянными коэффициентами складывается из следующих шагов:

1) исключение мультиколлинеарности за четыре шага;

2) получение оценок коэффициентов общей авторегрессивной модели по (85);

3) включение в оценки (85) эффекта от наличия ошибок измерения в переменных с помощью (33), т. е. переход к оценкам (92) и выполнение прогноза по (94) — (95).

На этом заканчивается трехшаговая процедура оценки и прогноза в квазистационарном случае, и вместе с включением переменных коэффициентов происходит переход к чисто нестационарному случаю и адаптивному линейному прогнозу в точном смысле слова.

Подобному переходу, естественно, предшествует проверка постоянства коэффициентов уравнения (1) (дополнительно может быть выполнена и проверка на гетероскедастичность).

4. ПРОВЕРКА ПОСТОЯНСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ И ПРОГНОЗ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

Эта проверка приобретает смысл после исключения ошибок измерения, автокорреляции и перехода к квазиадаптивному прогнозу вследствие введения различия между истинным и наблюдаемым значением остатка. Поэтому и проверка имеет смысл лишь для оценок (85), и ее удобнее всего ввести сразу в преобразованных переменных (83).

После проведенной спецификации достаточно выделить две подвыборки и для проверки гипотезы о постоянстве коэффициентов в них использовать критерий средней мощности, каковым является Коу-тест [2, 28]. Для его применения введем при коэффициентах регрессии и переменных дополнительные индексы 11 и 21, которые относятся соответственно к первой и второй подвыборкам с числом наблюдений T и $T - T_1$. Коу-тест предполагает два случая.

1. В [28] показано, что при гипотезе $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta S_2 / \sigma^2$ и S^3 / σ^2 имеют независимые χ^2-распределения с $T - 2k$ и k — степенями свободы.

В случае $T_1 > k$ и $T - T_1 > k$ гипотеза $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta$ проверяется с помощью F-статистики

$$F = \frac{S_3/k}{S_2/(T-2k)} \tag{102}$$

с $(k, F - 2k)$ степенями свободы, где

$$S_2 = \xi^{*}_{41t}[I - Q_{11}(Q_{11}' Q_{11})^{-1} Q_{11}'] \xi^{*}_{41t} + \xi^{*\prime}_{42t} \times$$

$$\times [I - Q_{21}(Q_{21}' Q_{21})^{-1} Q_{21}'] \xi^{*}_{42t}, \tag{103}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} (b_{311} - b_3)'Q_{11} \\ (b_{321} - b_3)'Q_{21} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (b_{321} - b_3)'Q_{11} \\ (b_{321} - b_3)'Q_{21} \end{bmatrix}.$$

2. В случае же $T_1 < k$ и $(T - T_1) < k$, как следует из [28], эта гипотеза проверяется с помощью статистик

$$F = \frac{\begin{array}{c}(b_{311}' Q_{11} - b_{321}' Q_{11})'(b_{311}' Q_{11} - b_{321}' Q_{11}) + \\ + (R_{21} - b_3'Q_{21})(R_{21} - b_3'Q_{21})'(R_{21} - b_3'Q_{21})\end{array}}{(R_{11} - b'_{311} Q_{11})'(R_{11} - b'_{311} Q_{11})} \cdot \frac{T_1 - k}{T - T_1} \tag{105}$$

с $(T - T_1, T_1 - k)$ степенями свободы.

Итак, если статистики (102), (105) — Коу-тест — опровергают гипотезу $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta$, то возникает вопрос о форме введения переменных коэффициентов в уравнение регрессии.

Простейший способ включения переменных коэффициентов заключается в оценке переменных коэффициентов регрессии на каждом шаге $b_{4t} = b_{40} + b_{41}t$ *. Так происходит переход к адаптивному прогнозу в собственном смысле слова.

* В недавней работе [31] дано более строгое обоснование оценки случайно варьирующих коэффициентов общей линейной регрессии при повторяющихся наблюдениях. Там же получены свойства оценок и доверительный интервал. Однако, эти результаты не приложимы к анализу временных рядов. Выводы же [31] для случая с неповторяющимися наблюдениями, естественно, гораздо слабее.

Получим оценки для случая с линейным изменением коэффициентов регрессии на протяжении всего периода после центра временного интервала первой подвыборки, т. е. на протяжении времени $t = T + \theta - (T_1/2)$.

Для оценки изменений, вносимых переменными коэффициентами регрессии, запишем уравнение сразу в преобразованных переменных (83):

$$R_t = \beta_{4t}' Q_t + u_{3t}, \tag{106}$$

где

$$\beta_{4t} = \beta_{4,\,T^{1/2}} + \beta_{41} t,\ t = \frac{T_1}{2}, \ldots, T + \theta - \frac{T_1}{2}. \tag{107}$$

Оценка наименьших квадратов для (106) — (107) будет иметь вид

$$b_{4t} = \left(I + \frac{I}{t}\right) \frac{Q_t' R_t}{Q_t' Q_t}, \quad t = \frac{T_1}{2}, \ldots, T + \theta - \frac{T_1}{2}, \tag{108}$$

т. е. при линейно изменяющихся коэффициентах регрессии оценки отличаются от оценок в случае с постоянными коэффициентами на

$$\frac{I}{t} Q_t' (Q_t' Q_t)^{-1} R_t.$$

Тогда (94) — (97) для случая с линейно изменяющимися коэффициентами регрессии можно переписать следующим образом

$$b_{4t} = (I + \hat{\varkappa})' \Big\{ b' - (I - \delta M_t) [Z_t' J Z_t (Z_t' Z_t)^{-1} - \\ - Z_t J (Z_t' Z_t)^{-1} \cdot N_t^{-1} \xi_{4t}^*] \Big\} \left(I + \frac{I}{t}\right), \tag{109}$$

$$t = \frac{T_1}{2}, \ldots, T + \theta - \frac{T_1}{2};$$

$$\operatorname{Eff} \frac{b_{4t}}{\beta} = (I + \hat{\varkappa})(I + \hat{\varkappa})' \Big[I + \delta Z_t' J_{1t} Z_t (Z_t' Z_t)^{-1} + \\ + Z_t' \left(\sum_{r=1}^{2} \hat{P}_{rt}\right) Z_t (Z_t' Z_t)^{-1} \Big] \left(I + \frac{I}{t}\right). \tag{110}$$

$$X_{4t} = b_{4t}' Z_t + (r_1 M_t N_t^{-1} u_{3,\,t-1} + N_{1t}^{-1} \xi_{1t}^* + N_{2t}^{-1} \xi_{2t}^*) \left(I + \frac{I}{t}\right). \tag{111}$$

$$X_{4t}^* = X_{4t} \pm t^* s \left(I + \frac{I}{t}\right) \cdot \\ \cdot \sqrt{I + \frac{I}{t-1} + (I + \hat{\varkappa})(I + \varkappa)' Z_t' Z_t \, I + \delta Z_t' J_{1t} Z_t (Z_t' Z_t)^{-1} + \\ + Z_t' \left(\sum_{r=1}^{2} \hat{P}_{rt}\right) Z_t (Z_t' Z_t)^{-1} \Big] (Z_t' Z_t)^{-1}}. \tag{112}$$

В итоге в случае линейного изменения коэффициентов адаптивный прогноз в точном смысле слова отличается от квазиадаптивного главным образом лишь фазой предварительной оценки изменения коэффициентов.

Это весьма сильное однообразие процедуры позволило уже на ранней стадии создать программу оценки и прогноза для ЭВМ БЭСМ-3 для частного случая (98) — (102) и сразу же распространить ее на случай с переменными коэффициентами *.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Тинтнер. Введение в эконометрию. М., «Статистика», 1966.
2. J. Johnston. Econometric Methods. N. Y., L., 1963.
3. A. Goldberger. Econometric Theory. N. Y., 1964.
4. Z. Griliches. Specification Analysis in Econometrics (Lecture Notes). Center for Math. St. in Bus. and Ec. Chicago, 1966.
5. H. Theil. Economic Forecasts and Policy. Amsterdam, 1961.
6. H. Theil. The Analysis of Disturbances in Regression Analysis. J. A. S. A., 1965, v. 60, N 312.
7. Н. Смирнов, И. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений). М., «Наука», 1965.
8. G. Tintner. Econometrics. N. Y., 1952.
9. D. Farrar, R. Glauber. Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited. The Rev. of Ec. and St., 1967, v. 59, N 1.
10. T. Lancaster. A Note on an «Errors in Variables' Model», J. A. S. A., 1966, v. 61, N 313.
11. H. Roberts. Probabilistic Prediction. J. A. S. A., 1965, v. 60, N 319.
12. A. Zellner. On Errors in Variables. Center for Math. St. in Bus. and Ec. Chicago, Jan. 1967.
13. A. Madansky. The Fitting of Straight Lines When Both Variables Are Subjekt to Errors. J. A. S. A., 1959, v. 54, N 258.
14. M. Halperin. Fitting of Straight Lines and Prediction When Both Variables Are Subject to Errors, J. A. S. A., 1961, v. 56, N 295.
15. Д. Лоули, А. Максвелл. Факторный анализ как статистический метод. М., «Мир», 1967.
16. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
17. J. Scott, Jr., Factor Analysis and Regression, Econom., 1966, v. 34, N 3.
18. Z. Griliches. A Note on Serial Correlation Bias in Estimates of Distributed Lags. Econom., 1961, v. 29, N 1.
19. P. Rao, Z. Griliches. Small-Sample Properties of Several Two — Stage Regression Methods in the Context of Autocorrelated Errors. Center for Math. St. in Bus. and Ec. Chicago, Rep. 6731, Oct. 1967.
20. H. Thornber. Finite Sample Monte-Carlo Studies: An Autoregressive Illustration. J. A. S. A., 1967, v. 62, N 319.
21. R. Parks. Efficient Estimation of a System of Regression Equations When Disturbances Are Both Serially and Contemporaneously Correlated. J. A. S. A., 1967, v. 62, N 318.
22. H. Wold. On the Least Squares Regression with Autocorrelated Variables and Residuals. Bul. of the Intern. Stat. Inst., 1950, v. 32.
23. J. Copas. Monte-Carlo Results for Estimation in a Stable Markov Time Series. J. of R. S. S., 1966, v. 129.
24. K. Wallis. Lagged Dependent Variables and Serially Correlated Errors: A Reappraisal of Three — Pass Least Squares, Rev. of Ec. and St., 1967, v. 49, N 4.
25. F. Marriot, J. Pope. Bias in the Estimation of Autocorrelation. Biometrica, 1954, v. 41, p. 390—402.
26. J. White. Assymptotic Expansions for the Mean and Variance of the Serial Correlation Coefficients. Biometrica, 1961, v. 48, p. 85—94.
27. E. Malinvaud. Methodes Statistique de l'Econometrie, Paris, Dunod, 1964.
28. G. Chow. Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. Econ., 1960, v. 28, N 3.
29. G. Menges, H. Diehl. Time Stability of Structural Parameters, With Discussion, «Econometric Analysis for National Planning», 16-th Symposium of the Colston Research Society, April 6-th — 9-th 1964, L., 1964.
30. H. Mann. Non-Parametric Tests Against Trend. Econ., 1945, v. 13, N 4.
31. P. Fisk. Models of the Second Kind in Regression Analysis, J. of R. S. S., Ser. B, v. 29, N 2, 1967.

Поступила в редакцию
29 VII 1968

* Это было предложено и выполнено ведущим инженером Лаборатории оптимального перспективного планирования М. Заблудовским.

ЭКОНОМИКА 1968
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том IV, вып. 6

ПРОДУКТЫ ДЛИТЕЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В СИСТЕМЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ *
(УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ)

А. И. КАЦЕНЕЛИНБОЙГЕН, С. М. МОВШОВИЧ, Ю. В. ОВСИЕНКО

(Москва)

В настоящей статье, которую следует рассматривать как продолжение работы [1], изучаются некоторые стороны отношений обмена в системе оптимального планирования социалистической экономики. Основное внимание уделяется здесь обмену между комплексами, производящими и потребляющими продукты длительного использования **.

Первый раздел посвящен описанию модели, являющейся обобщением модели A; во втором рассматриваются некоторые экономические категории, необходимые при дальнейшем анализе; третий раздел посвящен анализу отношений обмена между комплексами и проблеме амортизации.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Нам понадобятся обобщения модели A из [1] в двух направлениях.

1. В работе [1] было принято, что все производимые продукты используются потребляющими их комплексами в течение одного цикла. Такие продукты естественно назвать *продуктами однократного использования* ***.

Продукты однократного использования обычно преобразуются в процессе их производственного потребления. Если некоторый продукт служит в течение нескольких циклов, то он является продуктом *длительного* использования. Назовем его для краткости *орудием*, а максимально возможный срок его службы *физическим сроком службы*. Орудия в процессе использования не преобразуются в другие продукты, но изнашиваются ****.

---

* В порядке постановки.

** Здесь, как и в предыдущей работе, предполагается, что обмен производится по ценам, динамика которых соответствует динамике оценок оптимального плана. Эта предпосылка, естественно, влияет на выводы, получаемые из анализа модели.

*** Понятие продуктов однократного использования может быть истолковано двояко. Во-первых, в смысле продуктов, физически служащих один раз, т. е. непосредственно исчезающих в единичном акте производства (к таким продуктам относится большая часть предметов труда); во-вторых, в смысле продуктов, служащих в течение фиксированного единичного интервала времени (если, к примеру, в качестве такого интервала принят год, то машины, служащие один год, относятся к продуктам однократного использования). В рамках моделей с дискретным временем понятие продукта однократного использования может употребляться в любом из указанных смыслов.

**** С точки зрения функциональной роли в процессе производства могут быть орудия, служащие однократно (например, литейные формы и т. п.) и некоторые предметы труда, служащие как бы длительное время, но непосредственно входящие в производимый продукт (например, удобрения, единовременно внесенные в почву, постепенно, иногда в течение нескольких лет, потребляются растениями).