ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1968
том IV, вып. 6

НАЦИОНАЛЬНЫЕ СЧЕТА И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

А. Г. ТЕРУШКИН

(Москва)

Одной из проблем планирования является проблема начальной плановой информации, т. е. проблема выбора некоторой совокупности экономических переменных, значения которых определяют экономическое состояние. Ниже рассматривается способ такого выбора, осуществляемого на основе представления экономики в виде системы национальных счетов методом алгебро-статистического анализа и называемого поэтому «статистическим планированием».

1. МАТРИЦА НАЦИОНАЛЬНЫХ СЧЕТОВ И БАЛАНСОВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Национальное счетоводство — это система упорядочения макроэкономической информации в форме счетов, аналогичных бухгалтерским счетам. Она представляется в виде матрицы национальных счетов, аналогичной таблице затраты-выпуск.

Общий вид матрицы из m национальных счетов показан в таблице, где в скобках указаны обозначения, в основном используемые в дальнейшем изложении. По строкам матрицы указываются доходы (поступления) по счетам; по столбцам — расходы (платежи) по счетам.

Указанная матрица состоит из счетов, составленных в сальдированном виде. Однако это условие, будучи удобным при определенных целях анализа, не является существенно необходимым и может быть (если это представляется желательным или если его выполнение оказывается невозможным) опущено.

Номера счетов

	1	2	$\cdots$	i	$\cdots$	j	$\cdots$	$m-1$	m
1	—	$A_{12}(X_1)$	$\cdots$	$A_{1i}(X_{i-1})$	$\cdots$	$A_{1j}(X_{j-1})$	$\cdots$	$A_{1,m-1}(X_{m-2})$	$A_{1m}(X_{m-1})$
2	$A_{21}(X_m)$	—	$\cdots$	A_{2i}	$\cdots$	A_{2j}	$\cdots$	$A_{2,m-1}$	$A_{2m}(X_{2m-2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	—	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$A_{i1}(X_{(i-1)m-i+2})$	A_{i2}	$\cdots$	—	$\cdots$	A_{ij}	$\cdots$	$A_{j,m-1}$	$A_{im}(X_{im-i})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	—	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
j	$A_{j1}(X_{(j-1)m-j+2})$	A_{j2}	$\cdots$	A_{ji}	$\cdots$	—	$\cdots$	$A_{j,m-1}$	$A_{jm}(X_{jm-j})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	—	$\cdots$	$\cdots$
$m-1$	$A_{m-1,1}$	$A_{m-1,2}$	$\cdots$	$A_{m-1,i}$	$\cdots$	$A_{m-1,j}$	$\cdots$	—	$A_{m-1,m}(X_{(m-1)^2})$
m	$A_{m1}(X_{(m-1)^2+1})$	A_{m2}	$\cdots$	A_{mi}	$\cdots$	A_{mj}	$\cdots$	$A_{m,m-1}(X_{m^2-m})$	—

Каждый элемент матрицы имеет содержательную экономическую интерпретацию; так, например, если счет i есть счет «Население», а j — счет «Государственный бюджет», то передача A_{ij} означает выплаты населению по Госбюджету, а передача A_{ji} — поступления в бюджет от населения.

Так как в экономике национальные счета должны балансироваться, т. е. суммы доходов и расходов по счетам должны совпадать, то для матрицы национальных счетов необходимо выполнение балансовых равенств

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} - \sum_{j=1}^{m} A_{ji} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

т. е. в других обозначениях

$$B\bar{x} = 0, \tag{1}$$

где B — матрица размерности $m \times n$ (см. ниже (2)); $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — вектор-столбец элементов матрицы национальных счетов ($n = m^2 - m$; T означает операцию транспонирования).

Полученная однородная система линейных уравнений содержит m уравнений с $n = m^2 - m$ неизвестными и так как при $m > 2$ и $n > m$, то система (1) имеет бесконечное множество решений.

Теорема 1. *Ранг основной матрицы системы* (1) *на единицу меньше числа уравнений* $r_B = m - 1$.

Доказательство. Основная матрица системы (1) имеет вид (числа сверху обозначают номер неизвестного)

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2\ 3 & m-1 & m & 2m-2 & 2m-1 & 3m-3 & (m-1)^2 & & (m^2-m) \end{array} \\
B = \begin{pmatrix}
1 & 1\ 1 \ldots 1 & -1 & 0\ 0 \ldots 0 & -1 & 0\ 0 \ldots & 0 \ldots -1 & 0\ 0 \ldots 0 \\
-1 & 0\ 0 \ldots 0 & 1 & 1\ 1 \ldots 1 & 0 & -1\ 0 \ldots & 0 \ldots & 0\ -1\ 0 \ldots 0 \\
0 & -1\ 0 \ldots 0 & 0 & -1\ 0 \ldots 0 & 1 & 1\ 1 \ldots & 1 \ldots & 0\ 0\ -1 \ldots 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0\ 0\ 0 \ldots & -1 & 0\ 0\ 0 \ldots & -1 & 0\ 0\ 0 \ldots & -1 & \ldots 1 & 1\ 1 \ldots 1
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{2}$$

Решающей особенностью этой матрицы является то, что в каждом столбце матрицы имеется лишь два ненулевых элемента, один из которых $+1$, а другой -1; содержательно это означает, что каждый элемент матрицы национальных счетов при балансировании считается ровно два раза — один раз как доход и другой раз как расход. Кроме того, в матрице нет нулевых строк.

Прибавляя к каждой строке матрицы, начиная со второй, сумму предыдущих ее строк, преобразуем данную матрицу в эквивалентную ее ступенчатую матрицу, у которой первые $m - 1$ строк ненулевые, а последняя m-я строка является нулевой. Так как ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк, то получаем доказываемое утверждение.

В силу теоремы в системе (1) имеется по крайней мере одна совокупность из $n - r = m^2 - m - r = (m-1)^2$ переменных (так называемые «свободные переменные»), при произвольных значениях которых однозначно определяются значения остальных $r = m - 1$ переменных. Вопрос о том, какие именно совокупности из $n - r$ переменных в системе (1) могут быть свободными, разрешается, как обычно, вычислением миноров r-го порядка матрицы B *.

Если начальная плановая информация дает больше, чем знание о некоторой совокупности свободных переменных, то проверка этих данных на сбалансированность приводит к выводу о том, что либо эта информация противоречива (в случае отсутствия сбалансированности), либо она избыточна (в случае наличия сбалансированности). Таким образом, имеем следующий принцип: *начальная плановая информация должна давать не более, чем знание о некоторой совокупности из $n - r$ свободных переменных системы* (1).

С другой стороны, так как только знание свободных переменных позволяет однозначно определить остальные переменные из условия сбалансированности матрицы национальных счетов, то *начальная плановая информация должна дать не менее, чем знание о некоторой совокупности из $n - r$ свободных переменных системы* (1).

2. МОДЕЛИРУЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ЕЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Выводы предыдущего раздела, основанные на анализе системы балансовых уравнений, достаточно далеки от практически приемлемого решения проблемы начальной плановой информации потому, что свободные, с точки зрения системы (1), переменные не являются таковыми в «действительности», ибо они связаны между собой другими, «внебалансовыми» зависимостями.

Таким образом, должны быть установлены зависимости одних переменных матрицы национальных счетов от других. Эти зависимости устанавливаются содержательно-количественным анализом статистических рядов переменных матрицы.

Методом определения этих зависимостей может быть, например, метод линейной множественной регрессии **.

Итогом определения уравнений регрессии является получение системы линейных уравнений, которая моделирует систему национальных счетов ***

$$X_i = a_{io} + \sum_{k=1}^{n} {}^{(i)} a_{ik} X_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где a_{ik}, $k = 0, 1, \ldots, n$ — некоторые числа; знак $\sum\limits_{k=\smile}^{n}{}^{(i)}$ обозначает суммирование по всем указанным значениям кроме $k = i$.

Система (3) заведомо совместна, ибо все гиперплоскости регрессии проходят через точку $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n)$, где $\overline{X}_i$ — среднее значение X_i ****. Совместность системы означает, что ранги основной и расширенной матрицы системы (3) одинаковы.

---

* Указанные утверждения справедливы и для матрицы национальных счетов с меньшим, чем $m^2 - m$, количеством переменных. Действительно, недостающие до $m^2 - m$ переменные принимаются свободными с закрепленным нулевым значением.

** Если линейная множественная регрессия по матричным факторам дает не вполне удовлетворительную точность, то в регрессионный анализ включаются другие, внематричные факторы.

*** Если бы зависимости системы (3) были точными, то балансовые равенства (1) являлись бы следствием системы (3). Приближенный характер уравнений (3) делает, по-видимому, целесообразным включение (1) в моделирующую систему уравнений.

**** Очевидно, что эта же точка принадлежит всем гиперплоскостям, определенным балансовыми равенствами.

Относительно моделирующей системы (3) справедливо и большее утверждение: система (3) является неопределенной, т. е. имеет бесконечное множество решений. Ясно, что это утверждение выполняется с определенной точностью, так как уравнения регрессии и их линейность не дают, вообще говоря, абсолютно точных зависимостей. Неопределенность системы означает, что ранг основной матрицы системы (3) меньше числа неизвестных, т. е., в частности определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & -a_{12} \dots -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 \quad \dots -a_{2n} \\ \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} \dots \quad 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть r — ранг основной (и расширенной) матрицы системы (3). Тогда в системе (3) имеется, по крайней мере, одна совокупность из $n - r$ свободных переменных. Указание главных (отличных от нуля) миноров r-го порядка основной матрицы системы (3) даст всевозможные такие совокупности свободных переменных.

Проблема начальной плановой информации решается алгебраическим анализом моделирующей системы (3): начальная плановая информация должна дать знание о некоторой совокупности из $n - r$ свободных переменных системы (3).

Знание всевозможных совокупностей свободных переменных позволяет при планировании отдать предпочтение той или иной из них (например, по соображениям «легкости» определения плановых показателей).

При практическом осуществлении алгебраического анализа встает ряд вопросов вычислительного характера, порожденных известной приблизительностью соотношений (3).

Первый из них связан с равенством нулю определителей основной и основной и расширенной матрицы системы, в частности определителя Δ и его миноров. Корректное решение этого вопроса существенно для проверки совместности и неопределенности системы (3) и для определения свободных переменных.

Дело в том, что фактическое значение некоторого определителя, в частности определителя Δ, может не быть нулем, хотя и достаточно мало, но теоретически этот определитель может быть (в случае определителя Δ должен быть) признан нулем.

Укажем способ решения вопроса о равенстве нулю некоторого определителя. Пусть

$$f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{n1} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)} (-1)^k a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n},$$

где $(\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n)$ — некоторая перестановка чисел: 1, 2, 3, ..., n и k — четность этой перестановки.

Имеем

$$df = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} da_{ij},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n)} (-1)^k a_{1\alpha_1} \ldots a_{i-1,\,\alpha_{i-1}} a_{i+1,\,\alpha_{i+1}} \ldots a_{n\alpha_n} = M_{ij},$$

где M_{ij} — минор элемента a_{ij} в определителе f. Таким образом

$$df = \sum_{i,\,j=1} M_{ij}\, da_{ij}. \tag{4}$$

Так как в статистическом анализе знак da_{ij} не определяется, то, во-первых, внесение da_{ij} непосредственно в определитель f не представляется возможным и, во-вторых, вместо формулы (4) для определения df используется достижимая оценка $|df|$:

$$|df| = \sum_{i,\,j=1}^{n} |M_{ij}| \cdot |da_{ij}|. \tag{5}$$

В анализе определителей матрицы системы уравнений *регрессии* формула (3) выглядит несколько проще

$$|df| = \sum_{i=1}^{n} |M_{ii}| \cdot |da_{ii}|. \tag{6}$$

В качестве $|da_{ii}|$ берется математическое ожидание $m(\beta_i)$, где β_i — точность i-го уравнения регрессии.

Вопрос о равенстве нулю определителя решается сравнением $|f|$ и $|df|$: если $|df| \geqslant |f|$, то определитель f считается нулем; в противном случае определитель признается отличным от нуля, причем чем больше $|f| - |df|$, тем убедительнее выглядит это признание.

Второй из вычислительных вопросов связан с выражением несвободных переменных системы (3) через свободные или, более общо, с решением системы (3). Нетрудно показать, что представляется весьма целесообразным получать выражение несвободных переменных через свободные непосредственным корреляционным анализом.

Замечания: 1. Реализация принципа статистического планирования существенно связана с проблемой устойчивости свободных переменных: будут ли свободные до настоящего времени переменные свободными и в планируемом периоде. Ясно, что это будет так, если статистические зависимости в планируемом периоде остаются неизменными. Однако эта неизменность весьма неправдоподобна: почти достоверно, что коэффициенты регрессии будут меняться, оказывая тем самым влияние на решение вопроса о свободности или несвободности переменных.

Таким образом, проблема устойчивости свободных переменных оказывается разновидностью проблемы статистического прогноза, а именно, прогноза тенденции коэффициентов регрессии.

2. Данное замечание имеет своей целью подчеркнуть определенную ограниченность принципа статистического планирования, обусловленную как рамками матрицы национальных счетов (эта причина может быть нейтрализована широким привлечением внематричных факторов), так и общей ограниченностью статистических выводов на основе анализа информации за предшествующий плановому период (эта причина, по крайней мере теоретически, нейтрализуется заменой чисто статистических связей причинно-следственными).

Поступила в редакцию
27/II 1968

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1968 том IV, вып. 6

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С БОЛЬШИМИ РАЗМЕРАМИ ИСХОДНЫХ МАТРИЦ

В. Ф. БЕСЕДИН

(Киев)

В практике перспективного планирования народного хозяйства и отдельных отраслей довольно часто возникают задачи оптимального размещения производства одного или нескольких ресурсов.

В таких задачах предполагаются заданными: месторасположение потребителей; объем производства продукции в каждом пункте потребления ресурсов; гамма ресурсов, которые могут быть использованы каждым потребителем; возможные пункты производства ресурсов; производственная мощность пунктов производства ресурсов; затраты на производство ресурсов в каждом пункте производства; стоимость транспортировки ресурсов от каждого пункта производства к каждому пункту потребления; затраты на использование каждого ресурса каждым потребителем; нормы расхода ресурсов для производства единицы продукции.

Требуется определить месторасположение предприятий по выработке соответствующих ресурсов при минимальных суммарных затратах на производство, транспорт и использование ресурсов потребителями. При этом возможный объем выработки ресурсов в каждом пункте производства должен быть не выше его производственной мощности, а потребности потребителей должны удовлетворяться полностью только за счет тех видов ресурсов, которые могут использоваться данным потребителем для вырабатываемой им продукции.

Для соблюдения последнего условия в клетках матрицы, соответствующих j-му потребителю, $j = 1, 2, \ldots, m$, который не может для выработки своей продукции использовать ресурс i-го поставщика, ставятся запретительные (неизмеримо высокие) суммарные затраты.

Индекс i заменяет сложный индекс $\alpha\beta$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, a$ — территориальные районы производства ресурсов, $\beta = 1, 2, \ldots, b$ — вид вырабатываемого ресурса) и характеризует номер предприятия, которое расположено в определенном территориальном районе и вырабатывает определенный ресурс. Если предприятие вырабатывает несколько ресурсов, то оно подразделяется на соответствующее количество пунктов производства.

Аналогичным образом индекс j характеризует номер потребителя, расположенного в определенном γ-м районе, $\gamma = 1, 2, \ldots, 2$ и вырабатывающего d-й вид продукции, $d = 1, 2, \ldots, g$.

Математически задача формулируется следующим образом: найти минимум функционала

$$\sum_{ij} (c_i + c_{ij} + c_{ij}')x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_j x_{ij} \leqslant \Pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$