

времени. Набор параллельно работающих устройств зависит от текущего потока заявок от выполняемых программ и поведения потребителей, подающих на вход системы свои исходные данные. Поток заявок на устройства регулируется специальной управляющей программой (супервайзором). Супервайзор должен содержать блок, проверяющий перед каждым предполагаемым включением одного или нескольких новых устройств, будут ли при намеченном составе Γ выполняться условия (20) и условия типа (21). Если какие-либо из этих условий не выполняются, то супервайзор откладывает выполнение заявок, вызывающих расширение состава Γ , до момента, когда одно или несколько устройств из Γ выключаются (вследствие, например, окончания работы над очередным заказом). В этот момент следует снова при помощи условий (20) и условий типа (21) проверить, какими устройствами можно «догрузить» Γ .

2°. Пусть система предназначена для обработки данных, характеризуемой устойчивыми значениями λ_j и μ_j . Такой характер обработки данных дает возможность включить в постоянную параллельную работу некоторую группу внешних устройств Γ и ЦУ. Возникает вопрос о наилучшем комплектовании Γ . Можно, например, выбирать Γ так, чтобы доставить максимум количеству единиц информации, перерабатываемой системой за единицу времени. Другими словами, надо найти целые неотрицательные y_j , $j = 1, 2, \dots, m$, дающие линейной форме

$$I = \sum_{j=1}^m I_j y_j \quad (22)$$

максимальное значение при ограничениях (20) и (21)*. Для того чтобы свести поставленную задачу к задаче линейного целочисленного программирования, надо еще несколько видоизменить условия (20). В первоначальной формулировке они нелинейны, так как должны выполняться только для индексов j , удовлетворяющих неравенству $y_j \geq 1$. Для «линеаризации» условий (20) введем m групп вспомогательных целочисленных переменных z_j , σ_{j1} , σ_{j2} , $\dots$, $\sigma_{j(l_j-1)}$; $j = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\begin{aligned} 0 \leq z_j \leq 1; \quad 0 \leq \sigma_{jh} \leq 1; \quad z_j \leq 1 - \sigma_{jh}; \\ y_j = 1 - z_j + \sigma_{j1} + \dots + \sigma_{j(l_j-1)}; \\ j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, l_j - 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что если $y_j = 0$, то $z_j = 1$, а если $y_j > 0$, то $z_j = 0$. Определим M_j формулами

$$M_j = \sum_{s=j}^m k_{js} l_s, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Ограничения (20) эквивалентны линейным неравенствам

$$Mz + p \geq Ky, \quad (24)$$

где M — диагональная матрица с элементами M_j на главной диагонали, K — треугольная матрица с элементами k_{jq} , $j = 1, 2, \dots, m$; $j \leq q \leq m$, а p и z — векторы с компонентами p_j и z_j . Решение (22) дает оптимальное распределение исходной информации по типам носителей.

Поступила в редакцию
12 V 1967

* Можно включить в рассмотрение еще и другие ограничения, например, ограничения на стоимость Γ . Ничего нового в постановку задачи эти ограничения не вносят.

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К СТОХАСТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Д. Б. ЮДИН

(Москва)

1. О ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Исходная информация для планирования, проектирования и управления в экономике, технике и военном деле, как правило, недостаточно достоверна. Планирование производства обычно производится в условиях неполной информации об обстановке, в которой будет выполняться план и реализовываться произведенная продукция. Работа автоматических устройств сопровождается непредвиденными случайными помехами, статистические закономерности которых не всегда могут быть определены и учтены при вычислении управляющих воздействий. Еще сложнее обстоит дело в военных задачах, где помимо естественного недостатка информации возникает и возможность дезинформации. Как правило, эффективная стратегия дезинформации является смешанной стратегией, организуемой при помощи случайных механизмов, статистические характеристики которых удовлетворяют определенным закономерностям.

Таким образом, в моделях математического программирования, к исследованию которых сводятся задачи планирования, проектирования и управления, отдельные или все параметры (или характеристики) показателя качества и ограничений могут оказаться неопределенными или случайными. В одних случаях опыт, статистика и исследование процессов, определяющих изменение исходных данных и формирующих условия, в которых реализуется план, проект или система управления, позволяют устанавливать те или иные вероятностные характеристики параметров задач. В других случаях нет оснований для каких бы то ни было суждений о статистических особенностях явлений, способных изменить предполагаемые значения параметров условий задачи. И те и другие ситуации являются предметом исследования так называемого стохастического программирования.

Стохастическим программированием называют раздел математического программирования, изучающий методы решения условных экстремальных задач при неполной информации.

В стохастическом программировании больше, чем в других разделах математического программирования, значительные трудности подстерегают исследователя не только (а может быть и не столько) при разработке методов решения задач, но и при постановке задач, в которых необходимо отразить подчас довольно тонкие ситуации планирования и управления в условиях риска и неопределенности.

Естественный, на первый взгляд, путь анализа задач стохастического программирования — замена случайных параметров их средними значениями и вычисление оптимальных планов полученных таким образом детерминированных задач — далеко не всегда приводит к приемлемому решению. Отсюда необходимость в разработке моделей планирования, проекти-

рования и управления в условиях неполной информации и методов, позволяющих их исследовать.

Первые работы по стохастическому программированию принадлежат, по-видимому, Дж. Данцигу и А. Маданскому [1, 2]. Некоторое продвижение в постановке и решении стохастических экстремальных задач наметилось главным образом в стохастическом линейном программировании. Обзор работ по стохастическому программированию имеется в [3, стр. 399—437].

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$L = CX \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$AX \leq b, \quad (2)$$

$$X \geq 0. \quad (3)$$

В общем случае составляющие вектора C линейной формы, элементы матрицы условий A и компоненты вектора ограничений b могут быть случайными величинами. При этом характеристики распределения случайных величин могут быть заданы (случай риска) или неизвестны (случай неопределенности). Чтобы рассмотреть задачу (1) — (3) как задачу стохастического программирования, необходимо определить, что следует понимать под ее планом и решением. Различные постановки задач стохастического программирования отличаются показателем качества решения и определением понятия плана задачи.

Рассматриваются следующие показатели качества решения задач стохастического программирования:

- а) математическое ожидание величины линейной формы;
- б) математическое ожидание квадрата линейной формы;
- в) вероятность превышения линейной формой некоторого фиксированного порога;
- г) величина порога, которую линейная форма должна превзойти с заданной вероятностью;
- д) математическое ожидание так или иначе определенной функции полезности линейной формы.

Рассматриваются различные подходы к определению понятия плана стохастической задачи. План X задачи стохастического программирования может определяться как детерминированный вектор и как случайный вектор. При детерминированных параметрах управления рассматриваются одно- и двухэтапные задачи стохастического программирования. В одноэтапных задачах под планами понимают лишь векторы X , которые удовлетворяют ограничениям при всех матрицах A и векторах b , отвечающих возможным состояниям природы (реализациям случая).

Более гибкими являются постановки двухэтапных задач стохастического программирования, в которых процесс решения разбивается на два этапа. На первом этапе выбирается некоторый неотрицательный вектор X , не обязательно удовлетворяющий всем условиям задачи при всевозможных реализациях матрицы A и вектора b (т. е. при всех возможных состояниях природы). Затем фиксируется реализация случайной матрицы A и случайного вектора b и в зависимости от невязки $AX - b$ вводится неотрицательный вектор ξ , корректирующий принятое решение. Двухэтапные задачи стохастического линейного программирования сводятся к детерминированным задачам выпуклого программирования. При конечном числе реализаций вектора b для решения двухэтапной стохастической задачи могут быть использованы принципы блочного линейного программирования.

В ряде работ под планом задачи стохастического программирования понимают вектор X (детерминированный или случайный, в зависимости от

принятой постановки задачи), который удовлетворяет условию

$$P(AX \leq b) \geq 1 - \varepsilon,$$

где $P(S)$ — вероятность реализации события S .

В постановках стохастических задач, в которых искомый вектор X — случайный вектор, решение обычно определяется в форме $X = \Phi(A, b, C)$, где Φ — заданная вектор-функция. Некоторые подобные постановки задач сводятся к задачам выпуклого программирования (см., например, работы Чарнеса и Купера [4] и Катаока [5]).

Естественно, что чем шире множество, из которого выбираются допустимые планы, тем на больший эффект от решения задачи можно рассчитывать. Поэтому во всех задачах, в которых стохастический план (смешанная стратегия) имеет физический смысл и может быть реализован, целесообразно предполагать искомые параметры управления случайными и определять их зависимость от параметров (случайных и детерминированных) условий задачи. Априорное предположение о том, что план представляет собой некоторую функцию из заранее заданного класса (например, линейную, как в [4]) от параметров условий задачи, обычно не вытекает из физического содержания задачи и является, вообще говоря, ограничивающим допущением. Подобные предположения принимаются иногда потому, что они упрощают формальный анализ задачи и позволяют сводить стохастические задачи к детерминированным задачам поиска параметров, определяющих функцию Φ .

Ниже рассматриваются методы анализа класса задач выпуклого стохастического программирования, в которых план задачи предполагается стохастическим, не связанным каким бы то ни было априорным соотношением с параметрами условий задачи. Получающиеся при этом функциональные зависимости вида $X = \Phi(A, b, C)$ не предполагаются заранее, а определяются в результате решения задачи.

2. ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В известных работах по стохастическому программированию целевая функция и ограничения задачи записываются в классических вероятностных понятиях и терминах. В тех случаях, когда представляет интерес решение задачи в смешанных стратегиях, т. е. когда целесообразно искать оптимальный план в виде случайного вектора, запись задачи в классических терминах становится мало обозримой и чрезмерно сложной для анализа. Это относится и к сравнительно простым по своей структуре выпуклым задачам стохастического программирования, в целевую функцию и ограничения которых входят только моменты линейных форм. По-видимому, это не последняя причина ограниченных достижений в стохастическом программировании.

Представляется, что известное продвижение в постановках задач стохастического программирования и в методах их решения можно получить, записывая стохастические задачи в терминах функциональных пространств и используя для их анализа, по крайней мере, те конструктивные бесконечномерные аналоги методов математического программирования, которые к настоящему времени разработаны. Этому вопросу посвящены следующие разделы статьи.

Для последующего изложения потребуются понятия вероятностного пространства и построенного на нем гильбертова пространства случайных величин.

В 1933 г. А. Н. Колмогоров [6] предложил аксиоматику теории вероятностей, в которой он определил случайные события как множества и заменил теоретико-вероятностную терминологию теоретико-множественной.

Пусть Ω — множество элементов, которые будем называть элементарными событиями, а F — множество подмножеств A из Ω . Назовем элементы A множества F случайными событиями. Сумма, пересечение и разность элементов множества F принадлежат множеству F . Каждому множеству A из F приводится в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$, называемое вероятностью случайного события A . При этом $P(\Omega) = 1$, и если A и B не пересекаются, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$. Множество F называется σ -алгеброй. Если F содержит бесконечное число событий, то для каждой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, такой, что пересечение $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = 0$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$. Вероятность $P(A)$ является на F вполне аддитивной функцией множеств. Множество Ω , σ -алгебра F и вероятностная мера P определяют вероятностное пространство (Ω, F, P) .

Будем рассматривать случайные величины как функции на вероятностном пространстве. Случайная величина x — это функция, отображающая множество Ω на числовую ось $(-\infty, \infty)$, так что прообразы всех борелевских множеств на числовой оси являются случайными событиями.

Случайной функцией называется семейство случайных величин, зависящее от одного или нескольких параметров. Конечное семейство определяет случайный вектор, счетное — случайную последовательность. Интеграл Лебега $\int_A xP(d\Omega)$ называется математическим ожиданием случайной величины x и обозначается через $M(x)$ или $\bar{x}$. Интеграл $\int_A (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \cdot P(d\Omega)$ называется корреляционным моментом случайных величин x и y и обозначается через k_{xy} . Интеграл $\int_A (x - \bar{x})^2 P(d\Omega)$ называется дисперсией случайной величины x и обозначается через $D(x)$ или σ_x^2 .

Рассмотрим на вероятностном пространстве (Ω, F, P) функции, принадлежащие L_2 — пространству функций с интегрируемым квадратом. Соответствующие случайные величины имеют ограниченную дисперсию (и нулевое математическое ожидание). Они образуют гильбертово пространство H_0 . Гильбертово пространство H_1 — декартово произведение H_0 и числовой оси — представляет собой гильбертово пространство случайных величин с ограниченной дисперсией и произвольным математическим ожиданием. Скалярное произведение (x, y) в H_0 совпадает с корреляционным моментом этих величин

$$(x, y) = M(xy) = k_{xy}.$$

Скалярное произведение в H_1 равно

$$(x, y) = k_{xy} + \bar{x}\bar{y}.$$

Норма $\|x\|$ в H_0 совпадает со среднеквадратическим значением σ_x случайной величины x . В H_1 квадрат нормы равен сумме дисперсии и квадрата математического ожидания случайной величины $\|x\|^2 = \sigma_x^2 + \bar{x}^2$.

Пусть $X = \{x_j\}$ — система n случайных величин с ограниченной дисперсией и произвольным математическим ожиданием. Обозначим через H^n определяемое случайным вектором X гильбертово пространство. Скалярное произведение в H^n

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n (x_i, y_i).$$

Запись многих задач стохастического программирования в терминах гильбертова пространства H^n более прозрачна, чем в первичных вероятностных терминах. Многие естественные для стохастических задач целевые функции оказываются линейными или выпуклыми функционалами в H^n . Различные ограничения, используемые в разных постановках задач стохастического программирования, отсекают в H^n выпуклые множества. Таким образом, многие задачи стохастического программирования могут рассматриваться как задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве H^n .

Математическое ожидание линейной формы — линейный функционал в H^n

$$L = M(CX) = (C, X).$$

Дисперсия линейной формы — выпуклый вниз функционал в H^n

$$D(CX) = (CX - \overline{CX}, CX - \overline{CX}).$$

Задача стохастического программирования вида

$$M(C_0X)^2 + M(CX) \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$M(AX) - b \leq 0, \quad (5)$$

$$M(C_kX)^2 - d_k^2 \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

(C_0, C, C_k — n -мерные случайные векторы, A — матрица $m \times n$ со случайными элементами, b — n -мерный детерминированный вектор, d_k — детерминированные постоянные) представляет собой пример задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Чтобы гарантировать существование $M(C_kX)^2$, $k = 0, 1, \dots, s$, следует потребовать, чтобы компоненты случайных векторов C_k были почти наверное ограниченными величинами.

Можно указать задачи управления в условиях неполной информации, которые могут быть записаны в виде следующей задачи квадратичного стохастического программирования.

$$M(C_0X)^2 + M(C^0X) \rightarrow \min. \quad (7)$$

$$M(C_kX)^2 + M(C^kX) \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

3. МЕТОД ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Для решения задач стохастического программирования вида (4) — (6) или (7) — (8) может быть использован любой численный метод выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Наиболее конструктивным из численных методов решения задач математического программирования в функциональных пространствах в настоящее время является, по-видимому, метод возможных направлений, обобщенный и обоснованный в [7] для решения бесконечномерных выпуклых задач.

Приведем этот алгоритм с некоторыми уточнениями и упрощениями, предложенными в [9], и укажем особенности его применения для решения задач стохастического программирования.

Запишем задачу выпуклого программирования в H^n в виде

$$f_0(X) \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$f_i(X) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

f_0 и f_i , $i = 1, 2, \dots, m$ — выпуклые вниз функционалы точки

$$X = \{x_j\}_1^n \in H^n.$$

Для решения задачи предлагается сходящийся итеративный метод. На каждом шаге метода решается конечномерная задача квадратичного программирования для выбора возможного направления, вдоль которого можно улучшить значение целевого функционала $f_0(X)$, и выбирается рациональная величина шага. В алгоритме используется «anti-zigzagging»-прием, исключающий «заедание» вычислительного процесса и обеспечивающий точность вычислений. Предлагаемый метод представляет собой естественное обобщение метода возможных направлений, разработанного в [8] для решения задач линейного и выпуклого программирования.

Решение задачи начинается с определения некоторого исходного вектора X_0 , удовлетворяющего условиям (10), — начального плана X_0 . Выберем некоторое достаточно малое число $\delta_1 > 0$ и определим множество индексов $i \in I = I(X_0; \delta_1)$ — номеров функционалов $f_i(X)$, которые на плане X_0 обращаются в нуль или отличаются от нуля не более, чем на δ_1 .

$$I = I(X_0; \delta_1) = \{i \in I \mid -\delta_1 \leq f_i(X_0) \leq 0\}.$$

Чтобы улучшить план X_0 , спустимся из точки X_0 в некотором направлении $z^{(1)} \in H^n$. Направление $z^{(1)}$ должно вести внутрь области, определяемой ограничениями (10), и вдоль него $f_0(X)$ должен убывать. Следовательно, вдоль направления $z^{(1)}$ производные

$$\frac{d}{dt} f_i(X_0 + tz^{(1)})|_{t=0} = (\nabla f_i(X_0), z^{(1)}),$$

$$i \in I'(X_0; \delta_1) = I(X_0; \delta_1) \cup \{0\}$$

должны быть отрицательными. Из всех направлений, удовлетворяющих этому свойству, естественно выбрать то, для которого наименьшая скорость убывания функционалов $f_i(X)$, $i \in I'(X_0; \delta_1)$, была бы наименьшей. Это значит, что вдоль направления спуска следует максимизировать

$$\min_{i \in I'(X_0; \delta_1)} |(\nabla f_i(X_0), z^{(1)})|.$$

Учитывая, что скалярные произведения $(\nabla f_i, z^{(1)})$ отрицательны, следует подчинить выбор направления $z^{(1)}$ требованию, чтобы наибольшая из величин $(\nabla f_i(X_0), z^{(1)})$, $i \in I'(X_0; \delta_1)$, была бы возможно меньшей.

Используя естественную для метода возможных направлений нормализацию $\|z\| \leq 1$ (чтобы ограничить область определения вектора $z^{(1)}$), сводим выбор возможного направления $z^{(1)}$ к задаче

$$\max_{i \in I'(X_0; \delta_1)} (\nabla f_i(X_0), z^{(1)}) = \min_{\|z\| \leq 1} \max_{i \in I'(X_0; \delta_1)} (\nabla f_i(X_0), z). \quad (11)$$

В задаче (11) играет роль только проекция вектора z на подпространство, натянутое на векторы $\nabla f_i(X_0)$. Поэтому вдоль направления наискорейшего спуска

$$z = \sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \xi_i \nabla f_i(X_0), \quad (12)$$

и задача о выборе возможного направления $z^{(1)}$ сводится к отысканию конечномерного вектора ξ , обеспечивающего

$$\min_{\|z\| \leq 1} \max_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \sum_{j \in I'(X_0; \delta_1)} (\nabla f_i(X_0), \nabla f_j(X_0)) \xi_j.$$

Обозначим скалярное произведение

$$(\nabla f_i(X_0), \nabla f_j(X_0))$$

через h_{ij} . Тогда вспомогательная задача о выборе направления спуска может быть записана в следующем виде: требуется минимизировать линейную форму

$$L = \xi \quad (13)$$

при условиях

$$\sum_{j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \xi_j \leq \xi, \quad i \in I'(X_0; \delta_1), \quad (14)$$

$$\|z\| = \left\| \sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \xi_i \nabla f_i(X_0) \right\| \leq 1. \quad (15)$$

Условие (15) может быть переписано в виде

$$\sum_{i, j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \xi_i \xi_j \leq 1. \quad (16)$$

Задача квадратичного программирования (13) — (15) эквивалентна следующей задаче с квадратичным показателем качества и простыми линейными условиями [9]:

$$u = \left\| \sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \xi_i \nabla f_i(X_0) \right\|^2 = \sum_{i, j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \xi_i \xi_j \rightarrow \min, \quad (17)$$

$$\sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \xi_i = 1, \quad (18)$$

$$\xi_i \geq 0, \quad i \in I'(X_0; \delta_1). \quad (19)$$

При этом направление наискорейшего спуска определяется формулой

$$z^{(1)} = - \sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \xi_i^{(1)} \nabla f_i(X_0),$$

где $\xi_i^{(1)}$ — компоненты оптимального плана задачи (17) — (19).

Обозначим $\min u$ при условиях (18), (19) через u_1 . Пусть $u_1 > \delta_1$.

Величина шага t_1 , на который следует сместиться вдоль направления $z^{(1)}$, вычисляется как наименьший положительный корень уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\nabla f_0(X_0 + tz^{(1)}), z^{(1)}) &= 0, \\ f_i(X_0 + tz^{(1)}) &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Если какое-либо из этих уравнений не имеет положительных корней, полагаем его наименьший положительный корень равным ∞ .

В качестве нового приближения принимаем

$$X_1 = X_0 + t_1 z^{(1)}.$$

Отправляясь от X_1 , как от исходной точки, полагаем $\delta_2 = \delta_1$ и снова, как и на предыдущем шаге, определяем направление наискорейшего спуска $z^{(2)}$ из точки X_1 , величину шага t_2 и т. д.

Итеративная процедура продолжается до тех пор, пока мы не придем в некоторую точку X_k с соответствующим значением δ_{k+1} , при которых задача квадратичного программирования (17) — (19) приводит к оптимальному значению квадратичной формы (17) $u_{k+1} \leq \delta_{k+1}$. Тогда полагаем $\delta'_{k+1} = \delta_{k+1}/2$ и повторяем $(k+1)$ -ю итерацию для δ'_{k+1} . При этом воз-

можны два случая. Если $u'_{k+1} > 0$, то находим t_{k+1} и X_{k+1} и продолжаем вычисления, считая X_{k+1} исходной точкой, а δ'_{k+1} соответствующим значением anti-zigzagging-параметра. Если же $u'_{k+1} = 0$, то для определения направления спуска заменяем множество $I'(X_k; \delta'_{k+1})$ множеством

$$I'(X_k; 0) = \{i | f_i(X_k) = 0\} \cup \{0\}$$

и решаем вспомогательную задачу (17)–(19). Здесь снова могут возникнуть два случая. Если соответствующее значение квадратичной формы $u''_{k+1} = 0$, задача решена. В противном случае продолжаем вычисления, исходя из нового приближения

$$X_{k+1} = X_k + t_{k+1}z^{(k+1)}.$$

2. Чтобы использовать метод возможных направлений для решения задач стохастического программирования вида (4)–(6) или (7)–(8), достаточно учесть, что

$$\begin{aligned} \nabla M(CX) &= \nabla(C, X) = C, \\ \nabla M(C_h X)^2 &= 2(C_h X)C_h = 2(C_h^T C_h)X, \\ \nabla M(C_h X - (C_h, X))^2 &= 2(C_h X - (C_h, X))C_h. \end{aligned}$$

Последняя формула следует из представления

$$\begin{aligned} M[C_h(X+h) - (C_h, X+h)]^2 - M[C_h X - (C_h, X)]^2 &= \\ = 2(C_h X - (C_h, X), C_h h). \end{aligned}$$

3. Некоторый вычислительный опыт, накопленный при решении задач стохастического программирования методом возможных направлений, позволяет высказать следующие суждения о выборе величины параметров δ . Чем больше исходная величина δ_1 , тем, как правило, на отдельных или на всех итерациях процесса больше размерность вспомогательной задачи (17)–(19). Трудоемкость каждой итерации может быть сокращена (однако число итераций, требуемых для обеспечения заданной точности может возрасти), если придерживаться следующей вычислительной схемы.

Решение задачи начинается с $\delta_1 = 0$. Спустя некоторое число (k) итераций, когда приращение целевой функции $|\Delta| = |\Delta_k|$ становится достаточно малым и не превышает этой величины в течение последующих m шагов, следует повторить k -ю итерацию при положительном δ . Если при некотором расширении множества $I'(X_k; \delta)$ приращение $|\Delta_{k+1}|$ превысит величину $|\Delta_k|$, то это будет обозначать, что предшествующие шаги привели в область, где процесс «заедает», и введение anti-zigzagging-параметра δ позволило преодолеть эту область. Дальнейшие вычисления можно продолжить при $\delta = 0$ до тех пор, пока шаг процесса и соответственно приращение Δ целевой функции, уменьшаясь, снова не достигнут достаточно малых значений. Если $|\Delta_{k+1}| \leq |\Delta_k|$, следует продолжить вычисления в соответствии с рекомендациями п. 1 либо прекратить вычисления, приняв последний полученный план в качестве приближенного решения задачи.

4. Докажем, следуя В. А. Березневу, эквивалентность вспомогательных задач (13)–(15) и (17)–(19). Будем считать симметричную матрицу $\|h_{ij}\|$ невырожденной. К этому случаю всегда можно прийти, исключая из системы (14) линейно зависимые неравенства и соответствующие переменные.

Функция Лагранжа для задачи квадратичного программирования (13), (14), (16) записывается в виде

$$\Phi(\xi, \xi_j, \zeta_0 + \zeta_i) = \left\{ \xi + \sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \zeta_i \sum_{j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \xi_j - \right. \\ \left. - \xi \sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \zeta_i + \zeta_0 \sum_{i, j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \xi_i \xi_j - 1 \right\}.$$

Оптимальное значение L^* линейной формы (13) может быть получено по формуле

$$L^* = \max_{\zeta \geq 0} \min_{\xi, \xi_j} \Phi(\xi, \xi_j, \zeta_0, \zeta_i). \quad (21)$$

Переменные ξ и ξ_i в (21) не связаны никакими ограничениями. Поэтому можно исключить эти переменные из (21), приравняв нулю производные функции Φ по ξ и ξ_i . Имеем

$$1 - \sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} \zeta_i = 0, \quad (22)$$

$$\sum_{i \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij}(\zeta_i + 2\zeta_0 \xi_i) = 0; \quad j \in I'(X_0; \delta_1). \quad (23)$$

Матрица $\|h_{ij}\|$ по условию невырождена. Поэтому из (23) следует, что

$$\zeta_i + 2\zeta_0 \xi_i = 0, \quad i \in I'(X_0; \delta_1).$$

$\zeta_0 \neq 0$, в противном случае равенство (22) противоречило бы системе (23). Поэтому компоненты оптимальных планов задач (13) — (15) и (17) — (19) связаны соотношениями

$$\xi_i = -\frac{\zeta_i}{2\zeta_0}, \quad i \in I'(X_0; \delta_1). \quad (24)$$

Учитывая формулы (24), получаем

$$L^* = \min_{\zeta \geq 0} \left\{ \frac{1}{4\zeta_0} \sum_{i, j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \zeta_i \zeta_j + \zeta_0 \right\}.$$

Минимум функции Лагранжа достигается при $\zeta_0 > 0$ ($\zeta_0 \neq 0$; $\zeta_0 \geq 0$). Приравняв нулю производную Φ по ζ_0 , получаем

$$2\zeta_0 = \sqrt{\sum_{i, j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \zeta_i \zeta_j}. \quad (25)$$

Отсюда

$$L^* = \min_{\zeta} \sqrt{\sum_{i, j \in I'(X_0; \delta_1)} h_{ij} \zeta_i \zeta_j}.$$

Переменные ζ_i удовлетворяют также условиям (22). Последняя задача эквивалентна задаче (17) — (19). Задача (17) — (19), таким образом, двойственна задаче (13) — (16).

5. Приведем два примера решения задачи стохастического программирования по методу возможных направлений.

Пример 1.

$$\{0\} \quad L = M\{a_{01}x_1 + a_{02}x_2\} \rightarrow \min,$$

$$\{1\} \quad M\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2\} \leq b_1,$$

$$\{2\} \quad M\{x_1^2\} \leq d_1,$$

$$\{3\} \quad M\{x_2^2\} \leq d_2.$$

Здесь $b_1 = d_1 = d_2 = 1$. Остальные параметры условий задачи случайны. Первые и вторые (корреляционные) моменты параметров условий задачи, используемые в процессе решения, заданы таблицами (табл. 1, 2)

Таблица 1

		$\bar{a}_i$	
i	j	1	2
	0	2	3
	1	1	2

Таблица 2

		$k(a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2})$			
i_1j_1	i_2j_2	01	02	11	12
	01	1		0,25	
	02		1		0,75
	11			1	
	12				1

Градиент показателя качества f_0 решения задачи и функционалов f_i , определяющих условия задачи, равны соответственно

$$\nabla f_0(X^{(N)}) = \{a_{01}; a_{02}\}; \quad \nabla f_1(X^{(N)}) = \{a_{11}; a_{12}\};$$

$$\nabla f_2(X^{(N)}) = \{2x_1^{(N)}; 0\}; \quad \nabla f_3(X^{(N)}) = \{0; 2x_2^{(N)}\}.$$

Значения $h_{ij}^{(N)} = (\nabla f_i(X^{(N)}), \nabla f_j(X^{(N)}))$ — коэффициентов квадратичной целевой функции вспомогательной задачи (17) — (19) содержатся в табл. 3.

Таблица 3

i	j	0	1	2	3
	0	15	9	$2(a_{01}, x_1^{(N)})$	$2(a_{02}, x_2^{(N)})$
	1		7	$2(a_{11}, x_1^{(N)})$	$2(a_{12}, x_2^{(N)})$
	2			$4(x_1^{(N)}, x_1^{(N)})$	0
	3				$4(x_2^{(N)}, x_2^{(N)})$

Основные характеристики последовательных итераций процесса решения задачи зафиксированы в табл. 4.

Оптимальный план задачи $X^* = \{-0,4472a_{01}; -0,3162a_{02}\}$. Минимальное значение показателя качества решения задачи на множестве ее планов равно $L^* = -5,398$.

Таблица 4

N	I'	z_1	z_2	t	x_1	x_2	L	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0					0	0	0	
1	0	$-a_{01}$	$-a_{02}$	0,3162	$-0,3162 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-4,743$	$4,743$
2	0; 3	$-0,3262 a_{01}$	$0,1000 a_{02}$	0,4016	$-0,4472 a_{01}$	$-0,2760 a_{02}$	$-4,996$	0,253
3	0; 2	$0,3200 a_{01}$	$-0,3032 a_{02}$	0,1326	$-0,4048 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-5,186$	0,190
4	0; 3	$-0,3262 a_{01}$	$0,1000 a_{02}$	0,1300	$-0,4472 a_{01}$	$-0,3032 a_{02}$	$-5,268$	0,082
5	0; 2	$0,3200 a_{01}$	$-0,3032 a_{02}$	0,0429	$-0,4335 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-5,330$	0,062
6	0; 3	$-0,3262 a_{01}$	$0,1000 a_{02}$	0,0420	$-0,4472 a_{01}$	$-0,3120 a_{02}$	$-5,356$	0,026
7	0; 2	$0,3200 a_{01}$	$-0,3032 a_{02}$	0,0135	$-0,4428 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-5,376$	0,020
8	0; 3	$-0,3262 a_{01}$	$0,1000 a_{02}$	0,0135	$-0,4472 a_{01}$	$-0,3149 a_{02}$	$-5,385$	0,009
9	0; 2	$0,3200 a_{01}$	$-0,3032 a_{02}$	0,0043	$-0,4458 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-5,391$	0,006
10	0; 3	$-0,3262 a_{01}$	$0,1000 a_{02}$	0,0043	$-0,4472 a_{01}$	$-0,3158 a_{02}$	$-5,394$	0,003
11	0; 2	$0,3200 a_{01}$	$-0,3032 a_{02}$	0,0014	$-0,4468 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-5,396$	0,002
12	0; 3	$-0,3262 a_{01}$	$0,1000 a_{02}$	0,0013	$-0,4472 a_{01}$	$-0,3161 a_{02}$	$-5,397$	0,001
13	0; 2	$0,3200 a_{01}$	$-0,3032 a_{02}$	0,00043	$-0,4471 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-5,398$	0,001
14	0; 3	$-0,3262 a_{01}$	$0,1000 a_{02}$	0,00040	$-0,4472 a_{01}$	$-0,3162 a_{02}$	$-5,398$	0

Пример 2.

$$\{0\} \quad L = M\{a_{01}x_1 + a_{02}x_2\} \rightarrow \min,$$

$$\{1\} \quad M\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2\} \leq b_1,$$

$$\{2\} \quad M\{a_{21}x_1 + a_{22}x_2\} \leq b_2,$$

$$\{3\} \quad M\{x_1^2\} \leq d_1,$$

$$\{4\} \quad M\{x_2^2\} \leq d_2.$$

Здесь $b_1 = b_2 = d_1 = d_2 = 1$. Остальные параметры условий задачи случайны. Первые и вторые (корреляционные) моменты параметров условий задачи заданы табл. 5 и 6.

Корреляционные моменты между компонентами разных распрямленных векторов не используются в процессе решения задачи и в таблице не при-

Таблица 5

		$\bar{a}_{ij}$
$i \backslash j$	1	2
0	2	3
1	1	2
2	-4	1

Таблица 6

		$k(a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2})$					
$i_1 \backslash i_2$	j_1	01	02	11	12	21	22
01		1		0,25		0,25	
02			1		0,75		0,75
11				1		0,25	
12					1		0,5
21						1	
22							1

Таблица 7

N	I'	z_1	z_2	t	x_1	x_2	L	Δ
0	0			0,25	0	0	0	
1	0	$-a_{01}$	$-a_{02}$	0,0921	$-0,25a_{01}$	$-0,25a_{02}$	$-3,750$	$-3,750$
2	0; 2	$-0,5476a_{01} - 0,4524a_{21}$	$-0,5476a_{02} - 0,4524a_{22}$	0,0921	$-0,3004a_{01} - 0,0417a_{21}$	$-0,3004a_{02} - 0,0417a_{22}$	$-4,340$	$-0,590$
3	0; 4	$-0,3262a_{01}$	$0,0787a_{02} + 0,0562a_{22}$	0,2010	$-0,3660a_{01} - 0,0417a_{21}$	$-0,2846a_{02} - 0,0304a_{22}$	$-4,467$	$-0,127$
4	0; 2	$-0,5476a_{01} - 0,4524a_{21}$	$-0,5476a_{02} - 0,4524a_{22}$	0,0279	$-0,3813a_{01} - 0,0543a_{21}$	$-0,2999a_{02} - 0,0430a_{22}$	$-4,646$	$-0,179$
5	0; 4	$-0,3262a_{01}$	$0,0780a_{02} + 0,0580a_{22}$	0,0609	$-0,4012a_{01} - 0,0543a_{21}$	$-0,2952a_{02} - 0,0395a_{22}$	$-4,702$	$-0,056$
6	0; 2	$-0,5476a_{01} - 0,4524a_{21}$	$-0,5476a_{02} - 0,4524a_{22}$	0,0085	$-0,4058a_{01} - 0,0581a_{21}$	$-0,2998a_{02} - 0,0433a_{22}$	$-4,739$	$-0,037$
7	0; 2; 4	$-0,2874a_{01} - 0,1404a_{21}$	$0,0557a_{02} - 0,0908a_{22}$	1,1080	$-0,7242a_{01} - 0,2137a_{21}$	$-0,2381a_{02} - 0,1440a_{22}$	$-4,886$	$-0,147$
8	0; 3	$0,7256a_{01} + 0,3012a_{21}$	$-0,2952a_{02}$	0,0753	$-0,6696a_{01} - 0,1910a_{21}$	$-0,2603a_{02} - 0,1440a_{22}$	$-5,011$	$-0,125$
9	0; 4	$-0,3258a_{01}$	$0,0252a_{02} + 0,1941a_{22}$	0,0949	$-0,7006a_{01} - 0,1910a_{21}$	$-0,2579a_{02} - 0,1255a_{22}$	$-5,072$	$-0,061$
10	0; 3	$0,6881a_{01} + 0,2686a_{21}$	$-0,2970a_{02}$	0,0329	$-0,6779a_{01} - 0,1822a_{21}$	$-0,2679a_{02} - 0,1255a_{22}$	$-5,125$	$-0,059$
11	0; 4	$-0,3259a_{01}$	$0,0350a_{02} + 0,1692a_{22}$	0,0328	$-0,6886a_{01} - 0,1822a_{21}$	$-0,2665a_{02} - 0,1200a_{22}$	$-5,146$	$-0,021$
12	0; 2	$-0,5476a_{01} - 0,4524a_{21}$	$-0,5476a_{02} - 0,4524a_{22}$	0,0046	$-0,6911a_{01} - 0,1843a_{21}$	$-0,2690a_{02} - 0,1221a_{22}$	$-5,176$	$-0,030$
13	0; 4	$-0,3259a_{01}$	$0,0368a_{02} + 0,1646a_{22}$	0,0064	$-0,6932a_{01} - 0,1843a_{21}$	$-0,2688a_{02} - 0,1210a_{22}$	$-5,180$	$-0,004$
14	0; 3	$0,6766a_{01} + 0,2589a_{21}$	$-0,2974a_{02}$	0,0021	$-0,6918a_{01} - 0,1837a_{21}$	$-0,2694a_{02} - 0,1210a_{22}$	$-5,183$	$-0,003$
15	0; 4	$-0,3259a_{01}$	$0,0373a_{02} + 0,1631a_{22}$	0,0025	$-0,6926a_{01} - 0,1837a_{21}$	$-0,2694a_{02} - 0,1206a_{22}$	$-5,185$	$-0,002$
16	0; 3	$0,6757a_{01} + 0,2581a_{21}$	$-0,2975a_{02}$	0,0010	$-0,6920a_{01} - 0,1835a_{21}$	$-0,2696a_{02} - 0,1206a_{22}$	$-5,186$	$-0,001$

водятся. Как видим, пример 2 отличается от примера 1 только одним дополнительным ограничением.

Основные характеристики последовательных итераций процесса решения задачи зафиксированы в табл. 7.

На пятой и шестой итерации значения $|\Delta_5|$ и $|\Delta_6|$ не превышают 0,1. Расширение множества I' на седьмой итерации приводит к существенному увеличению приращения целевой функции. Последующие вычисления производятся при $\delta = 0$, и расширения множества I' не увеличивают приращения $|\Delta|$. На шестнадцатой итерации, когда значение $|\Delta_{16}|$ достигает 0,001, вычисления прекращены.

Приближенное решение задачи достигается на плане

$$X = \{-0,692a_{01} - 0,1835a_{21}; -0,270a_{02} - 0,1206a_{22}\}.$$

Соответствующее значение целевой функции равно $L^* = -5,186$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Dantzig, A. Madansky. On the solution of two-stage linear programming problems under uncertainty. Proc. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1961, № 1.
2. A. Madansky. Inequalities for stochastic linear programming problems. Manag. Sci., 1960, v. 6, № 2.
3. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966.
4. A. Charnes, W. W. Cooper. Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints. Operat. Res., 1963, v. 11, № 1.
5. F. Kataoka. Stochastic programming model. Econometrica, 1963, v. 31, № 1—2.
6. А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей, М., ОНТИ, 1936.
7. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. Численный метод для решения задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1965, 163, № 2.
8. Г. Зойтендейк. Методы возможных направлений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
9. М. Е. Примак. Численные методы решения некоторых задач теории приближений. Диссертация, Киев, 1966.

Поступила в редакцию
24 V 1968