

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН, С. М. МОВШОВИЧ

(Москва)

1°. Во многих задачах оптимального планирования деятельности различных звеньев народного хозяйства необходимо знать влияние вариаций параметров задачи на оптимальное значение целевой функции. Если при малых изменениях параметров задачи оптимальное значение целевой функции заметно меняется, то рассчитанный на основе неточных данных план может быть далеко не оптимальным. То же самое будет и при случайных колебаниях параметров, часто встречающихся в практических задачах. Малым вариациям параметров соответствует малое изменение оптимального значения целевого функционала в том случае, когда это значение является непрерывной функцией параметров.

Вопрос о непрерывности оптимального значения целевой функции тесно связан с вопросом о непрерывности множества оптимальных планов прямой и двойственной задач.

Для задач линейного программирования условия, обеспечивающие непрерывность множества оптимальных планов прямой и двойственной задачи, были получены в работах [1] и [2]. В настоящей работе показано (теорема 1), что эти же самые условия гарантируют непрерывность в существенно более общих условиях, в частности, для задач выпуклого программирования и некоторых задач квазивыпуклого программирования.

При определении эффективности целенаправленного изменения параметров задачи вследствие, например, технического прогресса необходимо уметь оценить количественно влияние параметров на оптимальное значение целевой функции.

Такие оценки (теоремы о маргинальных значениях) для задач линейного программирования впервые были получены в работе [3], содержащей, однако, неточности, устраненные в работах [1] и [2].

Для задач выпуклого программирования при достаточно жестких допущениях эти оценки получены в работе [4].

В настоящей работе теорема о маргинальных значениях получена как следствие теоремы 1 для более широкого класса задач и при существенно более слабых предположениях. Утверждения теоремы 1 могут быть также использованы при доказательстве ряда теорем о существовании экономического равновесия и равновесия в играх n лиц. Однако на этих приложениях теоремы мы здесь не останавливаемся.

2°. Предварительно напомним определения некоторых понятий, используемых в настоящей работе. Пусть $Z(t)$ — точечно-множественное отображение элементов t топологического пространства T в подмножества $Z(t)$ евклидова пространства Z .

Отображение $Z(t)$ называют полунепрерывным сверху в точке $t_0 \in T$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\delta(t_0)$ точки t_0 , что при любом $t \in \delta(t_0)$ множество $Z(t)$ содержится в ε -окрестности множества $Z(t_0)$.

Пусть $f(x, y)$ — вещественная функция, определенная на множестве $X \times Y$.

Точку $(x', y') \in X \times Y$ называют седловой точкой функции $f(x, y)$ относительно множества $X \times Y$, если при любых $x \in X, y \in Y$

$$f(x, y') \leq f(x', y') \leq f(x', y).$$

Положим

$$\varphi(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y), \quad \psi(y) = \sup_{x \in X} f(x, y).$$

Как известно, (x', y') в том и только в том случае является седловой точкой функции $f(x, y)$ относительно множества $X \times Y$, если

$$\varphi(x') = \sup_{x \in X} \varphi(x) = \inf_{y \in Y} \psi(y) = \psi(y').$$

Пусть $f(x)$ — вещественная функция, определенная на множестве X .

Положим

$$X_c^+ = \{x : f(x) \geq c, x \in X\}, \quad X_c^- = \{x : f(x) \leq c, x \in X\}.$$

Говорят, что $f(x)$ — квазивыпукла вверх (вниз) на множестве X , если для любого числа c множество X_c^+ (X_c^-) выпукло. Очевидно, любая выпуклая вверх (вниз) функция является квазивыпуклой вверх (вниз). Однако обратное утверждение неверно и, следовательно, класс квазивыпуклых функций шире класса выпуклых функций.

Пусть $f(x, y, t)$ — непрерывная функция на множестве $X \times Y \times T$, квазивыпуклая вверх по x при всех значениях y, t из $Y \times T$, квазивыпуклая вниз по y при всех значениях x, t из $X \times T$. Здесь X, Y — выпуклые замкнутые множества соответственно в n - и m -мерном евклидовом пространстве, T — топологическое пространство. Обозначим

$$\varphi(x, t) = \inf_{y \in Y} f(x, y, t), \quad \psi(y, t) = \sup_{x \in X} f(x, y, t).$$

Положим при любом $t \in T$

$$X(t) = \{x : \varphi(x, t) = \sup_{x' \in X} \varphi(x', t)\},$$

$$Y(t) = \{y : \psi(y, t) = \inf_{y' \in Y} \psi(y', t)\}.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.
Теорема 1. Если множества $X(q)$ и $Y(q)$, $q \in T$ непусты и ограничены, то найдется такая окрестность $\delta(q) \subset T$ точки $t = q$, что для всех $t \in \delta(q)$:

- 1) множества $X(t)$ и $Y(t)$ непусты;
- 2) $X(t) \times Y(t)$ — множество всех седловых точек функции $f(x, y, t)$ относительно $X \times Y$;
- 3) отображения $X(t), Y(t)$ полунепрерывны сверху в точке $t = q$.

3°. Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения, представляющие также и определенный самостоятельный интерес.

Пусть функция $f(x, y)$ задана и непрерывна на множестве $X \times Y$, X, Y — выпуклые замкнутые множества в n - и m -мерном пространствах соответственно, $\varphi(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$, $\psi(y) = \sup_{x \in X} f(x, y)$.

Условимся говорить, что $\varphi'(x)$ — мажоранта $\varphi(x)$ на множестве $G \subset X$, если $\varphi'(x) \geq \varphi(x)$, $x \in G$.

Аналогично, $\psi'(y)$ — миноранта $\psi(y)$ на множестве $F \subset Y$, если $\psi'(y) < \psi(y)$, $y \in F$.

Лемма 1. Если $\varphi'(x)$ — непрерывная мажоранта $\varphi(x)$ на компакте $G \subset X$, то найдется такой компакт $F \subset Y$, что

$$\inf_{y \in F} f(x, y) < \varphi'(x), \quad x \in G.$$

Аналогично, для любой непрерывной миноранты $\psi'(y)$ функции $\psi(y)$ на компакте $F \subset Y$ найдется такой компакт $G \subset X$, что

$$\sup_{x \in G} f(x, y) > \psi'(y), \quad y \in F.$$

Доказательство. Докажем только первое утверждение леммы, так как второе является его простым следствием.

Рассмотрим последовательность компактов

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k \subset \dots \subset Y, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = Y.$$

Для любой точки $x \in G$ найдется, очевидно, такой номер $k(x)$, что

$$\inf_{y \in F_k} f(x, y) < \varphi'(x), \quad \text{если } k \geq k(x). \quad (1)$$

В силу непрерывности функций $\varphi'(x)$ и $\inf_{y \in F_k} f(x, y)$ (последнее вытекает из компактности F_k) соотношение (1) сохранится для некоторой окрестности $\delta(x)$ точки x . Покроем компакт $G \subset X$ окрестностями $\delta(x)$, $x \in G$. Согласно теореме Гейне — Бореля из этого покрытия может быть выделено конечное покрытие G , состоящее из окрестностей $\delta(x_1), \dots, \delta(x_s)$. В таком случае из (1) следует, что при $k \geq \max_{1 \leq i \leq s} k(x_i)$

$$\inf_{y \in F_k} f(x, y) < \varphi'(x), \quad x \in G.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Функция $\varphi(x)$ достигает своей верхней грани на любом компактном подмножестве множества X ; функция $\psi(y)$ достигает своей нижней грани на любом компактном подмножестве множества Y .

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лишь первую часть утверждения леммы, касающуюся функции $\varphi(x)$. Согласно известной теореме доказательство этой части леммы сводится к установлению полунепрерывности сверху функции $\varphi(x)$ на множестве X . Убедимся, что это действительно так. Пусть $x' \in X$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое $y_\varepsilon \in Y$, что

$$f(x', y_\varepsilon) < \varphi(x') + \varepsilon. \quad (2)$$

В силу непрерывности функции $f(x, y_\varepsilon)$ по x неравенство (2) приводит к соотношению

$$f(x, y_\varepsilon) < \varphi(x') + \varepsilon,$$

где x — произвольная точка X , отстоящая от x' не более чем на $\delta(\varepsilon) > 0$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|x - x'| \leq \delta(\varepsilon)$, $x \in X$,

$$\varphi(x) \leq f(x, y_\varepsilon) < \varphi(x') + \varepsilon.$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ — полунепрерывна сверху в каждой точке $x \in X$. Лемма доказана.

Пусть дополнительно к условиям непрерывности, наложенным на функцию $f(x, y)$ в начале пункта 3°, $f(x, y)$ — квазивыпукла вверх по $x \in X$ при любом фиксированном $y \in Y$ и квазивыпукла вниз по $y \in Y$ при любом фиксированном $x \in X$. В дальнейшем мы будем использовать следующее легко проверяемое свойство функции $f(x, y)$: при любых $G \subset X$ и $F \subset Y$ функции $\sup_{x \in G} f(x, y)$ и $\inf_{y \in F} f(x, y)$ соответственно квазивыпуклы вниз по $y \in Y$ и квазивыпуклы вверх по $x \in X$.

Положим

$$X^* = \{x: \varphi(x) = \sup_{x' \in X} \varphi(x')\}, \quad Y^* = \{y: \psi(y) = \inf_{y' \in Y} \psi(y')\}.$$

Лемма 3. Если хотя бы одно из множеств X^* , Y^* непусто и ограничено, то

$$\sup_{x \in X} \varphi(x) = \inf_{y \in Y} \psi(y).$$

Доказательство. Положим

$$\sup_{x \in X} \varphi(x) = v_1, \quad \inf_{y \in Y} \psi(y) = v_2.$$

Пусть для определенности множества Y^* непусто и ограничено. Зададимся двумя последовательностями выпуклых компактов

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_i \subset \dots \subset X, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = X;$$

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_i \subset \dots \subset Y, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = Y.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное $k(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$v_1 - \varepsilon \leq \sup_{x \in G_k} \varphi(x), \quad k \geq k(\varepsilon). \quad (3)$$

Поскольку $v_1 + \varepsilon$ является мажорантой $\varphi(x)$ на G_k , то согласно лемме 1 для каждого k найдется такое $l(k)$, что

$$\sup_{x \in G_k} \inf_{y \in M_{l(k)}} f(x, y) \leq v_1 + \varepsilon. \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) получаем

$$v_1 - \varepsilon \leq \sup_{x \in G_k} \inf_{y \in M_{l(k)}} f(x, y) \leq v_1 + \varepsilon, \quad k \geq k(\varepsilon). \quad (5)$$

Так как G_k и $M_{l(k)}$ — выпуклые компакты, а $f(x, y)$ — непрерывная на $G_k \times M_{l(k)}$ функция, квазивыпуклая вверх по x и квазивыпуклая вниз по y , то по известной теореме Никайдо ([5])

$$\sup_{x \in G_k} \inf_{y \in M_{l(k)}} f(x, y) = \inf_{y \in M_{l(k)}} \sup_{x \in G_k} f(x, y).$$

Следовательно, неравенства (5) могут быть переписаны в виде

$$v_1 - \varepsilon \leq \inf_{y \in M_{l(k)}} \sup_{x \in G_k} f(x, y) \leq v_1 + \varepsilon, \quad k \geq k(\varepsilon). \quad (6)$$

Положим

$$\Gamma_\varepsilon = \{y: y \in Y, \varepsilon \leq \rho(y, Y^*) \leq 2\varepsilon\},$$

где через $\rho(y, Y^*)$ обозначено расстояние от точки y до непустого ограниченного множества Y^* .

Очевидно, Γ_ε — компакт, причем

$$\psi(y) > v_2, \quad y \in \Gamma_\varepsilon.$$

Итак, v_2 является минорантой $\psi(y)$ на Γ_ε и по лемме 1 найдется такое натуральное $k_1(\varepsilon)$, что

$$\psi_k(y) = \sup_{x \in G_k} f(x, y) > v_2, \quad y \in \Gamma_\varepsilon, \quad k \geq k_1(\varepsilon). \quad (7)$$

С другой стороны, если $y^* \in Y^*$, то

$$\psi_k(y^*) \leq \psi(y^*) = v_2. \quad (8)$$

Из (7) и (8) вытекает, что для любого y_1 , отстоящего от Y^* далее чем на 2ε , $\psi_k(y_1) > v_2$.

Действительно, в противном случае $y_1 \in Y' = \{y: \psi_k(y) \leq v_2\}$. В силу (8) множество Y' содержит также точку y^* . Поскольку $\psi_k(y)$ — квазивыпуклая вниз функция, то Y' — выпуклое множество и, следовательно, содержит все точки отрезка $\Delta: \lambda y^* + (1 - \lambda)y_1$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Очевидно, отрезок Δ имеет непустое пересечение с множеством Γ_ε ; пусть $y' \in \Delta \cap \Gamma_\varepsilon$. Тогда, с одной стороны, $y' \in Y'$, т. е. $\psi_k(y') \leq v_2$, а с другой стороны, $y' \in \Gamma_\varepsilon$, т. е. $\psi_k(y') > v_2$ (см. (7)). Получили противоречие, которое и доказывает наше утверждение. Итак, если $Y_\varepsilon = \{y: y \in Y, \rho(y, Y^*) \leq \varepsilon\}$, то

$$\psi_k(y) > v_2 \text{ при } y \notin Y_\varepsilon, \quad k \geq k_1(\varepsilon). \quad (9)$$

Выберем $k_2 = k_2(\varepsilon) \geq \max(k_1(\varepsilon), k_1(\varepsilon))$ таким, чтобы $M_{l(k_2)} \supset Y_\varepsilon$. Тогда в силу (9)

$$\inf_{y \in M_{l(k)}} \psi_k(y) = \inf_{y \in Y_\varepsilon} \psi_k(y), \quad k < k_2(\varepsilon)$$

и поэтому неравенства (6) превращаются в

$$v_1 - \varepsilon \leq \inf_{y \in Y_\varepsilon} \sup_{x \in G_k} f(x, y) \leq v_1 + \varepsilon, \quad k \geq k_2(\varepsilon). \quad (10)$$

Очевидно, $v_2 - \varepsilon$ является минорантой функции $\psi(y)$ на компакте Y_ε . Следовательно, по лемме 1 найдется такое $k_3(\varepsilon)$, что

$$v_2 - \varepsilon \leq \inf_{y \in Y_\varepsilon} \sup_{x \in G_k} f(x, y) \leq v_2, \quad k \geq k_3(\varepsilon). \quad (11)$$

Пусть $k \geq \max(k_2(\varepsilon), k_3(\varepsilon))$. Тогда из (10) и (11) получаем

$$-\varepsilon \leq v_2 - v_1 \leq 2\varepsilon. \quad (12)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ соотношения (12) приводят к искомому равенству $v_1 = v_2$. Лемма 3 доказана.

4°. Доказательство теоремы 1. 1. Прежде всего отметим, что из леммы 3 следует, что

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y, q) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y, q) = f(x_q, y_q, q),$$

где

$$(x_q, y_q) \text{ — произвольная точка из } X(q) \times Y(q).$$

Положим

$$v_q = \max_{x \in X} \varphi(x, q) = \min_{y \in Y} \psi(y, q). \quad (13)$$

Зададимся произвольным $\sigma > 0$ и обозначим через

$$X_\sigma = \{x: x \in X, \rho(x, X(q)) \leq \sigma\}$$

множество точек, принадлежащих X и отстоящих от $X(q)$ не более чем на σ .

Покажем, что при достаточно большом σ

$$\lim_{t \rightarrow q} \sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t) \geq v_q. \quad (14)$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что этот факт неверен. Зафиксируем произвольное $\sigma > 0$. Тогда найдутся $\delta > 0$ и последовательность $t_k \rightarrow q$, такие, что

$$\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t_k) < v_q - \delta, \quad \forall k.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t_k) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X_\sigma} f(x, y, t_k) < v_q - \delta,$$

т. е. найдется такая последовательность y_k , что

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_k, t_k) < v_q - \delta, \quad \forall k. \quad (15)$$

Покажем, что $|y_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Действительно, в противном случае можно, не уменьшая общности, считать, что $y_k \rightarrow y^*$, $y^* \in Y$, т. е.

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y^*, q) \leq v_q - \delta.$$

Из последнего неравенства с учетом (13) получаем невозможное соотношение

$$v_q = \sup_{x \in X_\sigma} \inf_{y \in Y} f(x, y, q) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X_\sigma} f(x, y, q) \leq \sup_{x \in X_\sigma} f(x, y^*, q) \leq v_q - \delta,$$

которое и доказывает справедливость нашего утверждения.

Рассмотрим теперь произвольную точку $y_0 \in Y(q)$.

Для нее $\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_0, q) = v_q$.

Вследствие непрерывности левой части последнего равенства по t для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $k(\varepsilon)$, что для всех $k \geq k(\varepsilon)$

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_0, t_k) < v_q + \varepsilon. \quad (16)$$

Для произвольного $l > |y_0|$ определим последовательность

$$y_k^{(l)} = \frac{l}{|y_k|} y_k + \left(1 - \frac{l}{|y_k|}\right) y_0, \quad |y_k| \geq l,$$

которая имеет бесконечное число элементов, так как $|y_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Очевидно,

$$l - |y_0| \leq |y_k^{(l)}| \leq l + |y_0|. \quad (17)$$

Из квазивыпуклости вниз функции $\sup_{X_\sigma} f(x, y, t_k)$ по $y \in Y$ и соотношений (15) и (16) следует, что

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_k^{(l)}, t_k) < v_q + \varepsilon. \quad (18)$$

Не ограничивая общности, можно считать последовательность $y_k^{(l)}$, сходящейся к элементу $y^{(l)}$ (см. (17)).

Отметим явным образом зависимость $y^{(l)}$ от σ , положив $y^{(l)} = y^{(l)}(\sigma)$. Тогда из неравенства (18) получаем

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y^{(l)}(\sigma), q) \leq v_q + \varepsilon$$

или в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y^{(l)}(\sigma), q) \leq v_q. \quad (19)$$

Из соотношения (17) получаем

$$l - |y_0| \leq |y^{(l)}(\sigma)| \leq l + |y_0|. \quad (20)$$

В соответствии с (20) без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} y^{(l)}(\sigma) = \bar{y}^{(l)}.$$

Тогда из (19) имеем

$$\psi(\bar{y}^{(l)}, q) = \sup_{x \in X} f(x, \bar{y}^{(l)}, q) \leq v_q. \quad (21)$$

Из (21) вытекает, что $\bar{y}^{(l)} \in Y(q)$ при любом $l > |y_0|$. Но в соответствии с (20)

$$|\bar{y}^{(l)}| \geq l - |y_0|.$$

Итак, мы получили, что множество $Y(q)$ содержит элементы со сколь угодно большой нормой, что противоречит ограниченности $Y(q)$. Тем самым утверждение (14) доказано.

2. Мы доказали, что для некоторого $\sigma > 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\delta'(q)$ точки q , что

$$\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t) \geq v_q - \varepsilon, \quad t \in \delta'(q). \quad (22)$$

Установим теперь существование окрестности $\delta''(q)$ точки q и $\varepsilon > 0$, таких, что

$$\varphi(x, t) < v_q - \varepsilon, \quad x \notin X_\sigma, \quad t \in \delta''(q). \quad (23)$$

Введем множество $\Gamma_\sigma = \{x: x \in X, \sigma \leq \rho(x, X(q)) \leq 2\sigma\}$.

В силу леммы 2

$$\max_{x \in \Gamma_\sigma} \varphi(x, q) = \varphi(x', q), \quad x' \in \Gamma_\sigma.$$

Учитывая, что $X(q) \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, отсюда получаем

$$\max_{x \in \Gamma_\sigma} \varphi(x, q) < v_q - \varepsilon \quad (24)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 1 можно выбрать такой компакт $F \subset Y$, что из (24) будет вытекать неравенство

$$\inf_{y \in F} f(x, y, q) < v_q - \varepsilon, \quad x \in \Gamma_\sigma,$$

которое в силу непрерывности сохранится для некоторой окрестности $\delta''(q)$ точки q , т. е.

$$\varphi(x, t) \leq \inf_{y \in F} f(x, y, t) < v_q - \varepsilon, \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad t \in \delta''(q). \quad (25)$$

Искомое неравенство (23) может быть получено из соотношений (22) и (25) при помощи рассуждений, использованных при доказательстве леммы 3 для вывода неравенства (9) из соотношений (7), (8).

Положим $\delta_X(q) = \delta'(q) \cap \delta''(q)$. Из (22) и (23) с учетом леммы 2 имеем, что множество $X(t)$ непусто, причем $X(t) \subset X_\sigma$ для всех $t \in \delta_X(q)$.

Аналогичный факт для множеств $Y(t)$, $t \in \sigma_Y(q)$ может быть установлен точно таким же образом.

Тем самым утверждение 1 теоремы доказано, а утверждение 2 непосредственно следует из леммы 3, причем $\delta(q) = \delta_X(q) \cap \delta_Y(q)$.

3. Для доказательства полунепрерывности сверху отображений $X(t)$ и $Y(t)$ в точке $t = q$ воспользуемся неравенствами

$$f(x, y_t, t) \leq f(x_t, y_t, t) \leq f(x_t, y, t), \quad (26)$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $x_t \in X(t)$, $y_t \in Y(t)$, $t \in \delta(q)$.

Если бы утверждение 3 теоремы было неверно, например, применительно к отображению $X(t)$, то нашлись бы последовательности $t_k \rightarrow q$, $t_k \in \delta(q)$ и $x_k \in X(t_k)$, такие, что

$$\rho(x_k, X(q)) \geq \varepsilon > 0, \quad \forall k. \quad (27)$$

Пусть y_k — произвольная точка $Y(t_k)$. В силу равномерной ограниченности множеств $X(t_k)$ и $Y(t_k)$ можно без ограничения общности считать, что

$$x_k \rightarrow x^*; \quad y_k \rightarrow y^* \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда из (26) вытекает

$$f(x, y^*, q) \leq f(x^*, y^*, q) \leq f(x^*, y, q),$$

где $x \in X$, $y \in Y$, т. е. $x^* \in X(q)$, что противоречит (27). Теорема доказана.

5°. Остановимся на одном из возможных применений теоремы 1 — для доказательства теорем о маргинальных значениях. Рассмотрим функцию $f(x, y, t)$, определенную на $X \times Y \times T$, где $T = [0, t_0]$. Если считать выполненными предположения теоремы 1 ($q = 0$), то согласно теореме для некоторого $t' > 0$ множества $X(t)$ и $Y(t)$ непусты при $0 \leq t \leq t'$, причем $X(t) \times Y(t)$ — множество седловых точек функции $f(x, y, t)$. Введем обозначение

$$\varphi(t) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y, t) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y, t) = f(x_t, y_t, t),$$

где $x_t \in X(t)$, $y_t \in Y(t)$, $0 \leq t \leq t'$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1, функция $f(x, y, t)$ дифференцируема по t в точке $t = +0$ при любых (x, y) из некоторой окрестности Ω множества $X(0) \times Y(0)$, причем ее производная $f'_t(x, y, 0)$ удовлетворяет условию

$$\frac{f(x, y, t) - f(x, y, 0)}{t} \rightarrow f'_t(x, y, 0) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0$$

равномерно относительно $(x, y) \in \Omega$.

Тогда существует правая производная $\varphi'(0)$ функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$, причем

$$\varphi'(0) = \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0) = \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0). \quad (28)$$

Доказательство. Пусть $t \leq t'$. Тогда множества $X(t)$ и $Y(t)$ непусты, причем

$$f(x_0, y_t, t) \leq f(x_t, y_t, t) \leq f(x_t, y_0, t), \quad (29)$$

где

$$(x_0, y_0) \in X(0) \times Y(0), \quad (x_t, y_t) \in X(t) \times Y(t).$$

Положим

$$\mu(x, y, t) = f(x, y, t) - f(x, y, 0) - tf'_t(x, y, 0), \quad (x, y) \in \Omega.$$

По условию теоремы

$$|\mu(x, y, t)| \leq \mu(t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (30)$$

где $\mu(t)$ не зависит от x, y и таково, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \mu(t) = 0. \quad (31)$$

Без ограничения общности можно считать, что $X(t) \times Y(t) \subset \Omega$, если $t \leq t'$. Поэтому соотношение (29) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} f(x_0, y_t, 0) + tf'_t(x_0, y_t, 0) - \mu(t) &\leq f(x_t, y_t, t) \leq \\ &\leq f(x_t, y_0, 0) + tf'_t(x_t, y_0, 0) + \mu(t). \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку $(x_0, y_0) \in X(0) \times Y(0)$, то

$$f(x_t, y_0, 0) \leq f(x_0, y_0, 0) \leq f(x_0, y_t, 0).$$

Учитывая последние неравенства и соотношение (30), получаем следующие оценки для относительного приращения функции $\varphi(t)$

$$f'_t(x_0, y_t, 0) - \frac{\mu(t)}{t} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq f'_t(x_t, y_0, 0) + \frac{\mu(t)}{t} \quad (33)$$

Оценки (33) выведены для произвольных седловых точек

$$(x_0, y_0) \in X(0) \times Y(0) \quad \text{и} \quad (x_t, y_t) \in X(t) \times Y(t).$$

Следовательно, из (33) вытекает

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y(t)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x_0, y_t, 0) - \frac{\mu(t)}{t} &\leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq \\ &\leq \max_{x \in X(t)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x_t, y_0, 0) + \frac{\mu(t)}{t}. \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть по-прежнему X_ε и Y_ε — ε -окрестности множеств $X(0)$ и $Y(0)$ соответственно. При любом $t > 0$ через $\varepsilon(t)$ обозначим минимальное из чисел ε , при которых $X(t) \subset X_\varepsilon$, $Y(t) \subset Y_\varepsilon$.

По теореме 1

$$\lim_{t \rightarrow +0} \varepsilon(t) = 0. \quad (35)$$

С учетом введенного обозначения оценки (34) приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y_{\varepsilon(t)}} \max_{x \in X(0)} f'_t(x_0, y, 0) - \frac{\mu(t)}{t} &\leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq \\ &\leq \max_{x \in X_{\varepsilon(t)}} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y_0, 0) + \frac{\mu(t)}{t}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из соотношений (30) и (31) вытекает непрерывность функции $f'_t(x, y, 0)$ на Ω . Следовательно, непрерывны также функции

$$\max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0); \quad \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \min_{y \in Y_{\varepsilon(t)}} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0) &= \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \max_{x \in X_{\varepsilon(t)}} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0) &= \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Оценки (36) и соотношения (31), (35), (37) приводят к неравенствам

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0),$$

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0),$$

из которых с учетом известного неравенства

$$\max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0) \leq \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0)$$

получаем искомое равенство (28). Теорема доказана.

Рассмотрим семейство задач квазивыпуклого программирования, зависящее от параметра $t \in [0, t_0]$

$$f_0(x, t) \rightarrow \sup, \quad (38)$$

$$f_i(x, t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (39)$$

$$x \in X, \quad (40)$$

где $f_i(x, t)$ — квазивыпуклые функции x , определенные и непрерывные на выпуклом множестве X , $t \in [0, t_0]$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Пусть $v(t)$ — значение верхней грани (38) при условиях (39), (40).

Введем функции Лагранжа задач (38) — (40).

$$F(x, y, t) = f_0(x, t) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x, t)$$

и положим

$$Y = \{y: y = (y_1, \dots, y_m), \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Предполагается, что $F(x, y, t)$ — квазивыпуклая функция $x \in X$ при любых $y \in Y$ и $t \in [0, t_0]$.

Задача, двойственная к (38) — (40) при фиксированном значении t , имеет вид

$$\psi(y, t) = \sup_{x \in X} F(x, y, t) \rightarrow \inf, \quad (41)$$

$$y \in Y. \quad (42)$$

Обозначим задачи (38) — (40) и (41), (42) при фиксированном значении $t \in [0, t_0]$ через $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.

В качестве следствия из теоремы 1 получаем следующую теорему о маргинальных значениях задачи (38) — (40).

Теорема 3. Пусть задачи $A(0)$ и $B(0)$ разрешимы и множества их решений $X(0)$ и $Y(0)$ ограничены, функции $f_i(x, t)$, $i = 0, 1, \dots, m$, дифференцируемы в точке $t = +0$ для любого x из некоторой окрестности X' множества решений задачи $A(0)$, причем производные $\partial f_i(x, 0) / \partial t$ этих функций удовлетворяют условию:

$$\frac{f_i(x, t) - f_i(x, 0)}{t} \rightarrow \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial t} \quad \text{при} \quad t \rightarrow +0$$

равномерно относительно $x \in X'$, $i = 0, 1, \dots, m$.

В таком случае функция $v(t)$ имеет правую производную $v'(0)$ в точке $t = 0$, причем

$$v'(0) = \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} \frac{\partial F(x, y, 0)}{\partial t} = \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} \frac{\partial F(x, y, 0)}{\partial t}. \quad (43)$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить (см. [6], лемма 1), что задача $A(t)$ может быть переписана в эквивалентном виде

$$\varphi(x, t) = \inf_{y \in Y} F(x, y, t) \rightarrow \sup, \quad x \in X,$$

а затем воспользоваться теоремой 2.

Теорема 3 представляет собой обобщение на некоторый класс задач квазивыпуклого программирования, включающий, в частности, задачи выпуклого программирования, известной теоремы о маргинальных значениях для задач линейного программирования. Последняя теорема была сформулирована Х. Милсом [3], который доказал ее для случая прямоугольных матричных игр. Однако предложенное Х. Милсом в [3] доказательство этой теоремы для случая общей задачи линейного программирования содержало ошибку. В дальнейшем оказалось (см. [1, 2]), что для справедливости теоремы о маргинальных значениях общей задачи линейного программирования достаточно предположить ограниченными множества $X(0)$ и $Y(0)$ решений исходной и двойственной задач при $t = 0$. При этом было показано [2, гл. 3, § 5], что требование об ограниченности множеств $X(0)$ и $Y(0)$ является существенным. Таким образом, теорема 3 доказана нами в предельно слабых предположениях и содержит в качестве частного случая теорему о маргинальных значениях задачи линейного программирования, доказанную в [1] и [2]. Отметим, что при существенно более сильных ограничениях (X — ограниченное множество, $Y(t)$ — непусто и равномерно ограничено в некоторой окрестности $\delta(0)$ точки $t = 0$, $X(t) \times Y(t)$ — множество седловых точек функции Лагранжа $F(x, y, t)$ при $t \in \delta(0)$) соотношение (43) было установлено в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Williams. Marginal values in linear programming. J. Soc. Ind. and Appl. Math., 1963, v. 11, № 1.
2. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. «Сов. радио», 1964.
3. Х. Милс. Маргинальные значения матричных игр и задач линейного программирования. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. В. А. Волконский. Схема оптимального перспективного планирования и оценки ресурсов. Сб. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. М., «Мысль», 1965.
5. H. Nicaído. On von Neumann's minimax theorem. Pacific J. Math., 1954, № 4.
6. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, № 3.

Поступила в редакцию
19 IV 1968

ОБОБЩЕНИЕ ПОИСКА ФИБОНАЧЧИ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

А. И. КУЗОВКИН

(Москва)

Работа посвящена обобщению одного интересного результата Кифера — Джонсона, изложенного в [1, стр. 55] и [2].

Результат Кифера — Джонсона состоит в следующем.

Пусть $y = f(x)$ — строго выпуклая вниз функция, заданная на отрезке $[0, 1]$. Требуется найти минимальное из чисел ε_N , таких, что для всякого $\delta > 0$ всегда можно указать интервал отрезка длины $\varepsilon_N + \delta$, содержащий точку минимума функции $f(x)$, путем вычисления не более чем N значений этой функции.

Оказывается, что число $\varepsilon_N = 1/F_N$, где F_N — числа Фибоначчи, определяемые по рекуррентной формуле $F_0 = F_1 = 1$, $F_{N+1} = F_N + F_{N-1}$. Легко проверить, что при $N \rightarrow \infty$ $F_N \sim r^N$, где $r = 1 + \sqrt{5}/2$.

Пусть $f(x^*) = \min_{x \in [0,1]} f(x)$. Опишем теперь процедуру, дающую асимптотически точное решение поставленной выше задачи. Эту процедуру называют поиском Фибоначчи [3]. Он состоит в следующем.

Положим $x_1 = 1 - 1/r$, $x_2 = 1/r$.

Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_2)$: если $f(x_1) \geq f(x_2)$, то x^* лежит в интервале $(x_1, 1)$; если $f(x_1) < f(x_2)$, то x^* лежит в интервале $(0, x_2)$.

Пусть для определенности x^* лежит на отрезке $[0, x_2]$. Уменьшаем масштаб в r раз. Тогда отрезок $[0, x_2]$ превратится в единичный и точка x_1 станет точкой x_2 . Далее мы повторяем всю процедуру. При повторении всей процедуры N раз отрезок, на котором лежит x^* , сократится до длины r^{-N} (в старом масштабе). Количество вычислений $N(\varepsilon)$, требующееся для нахождения x^* с точностью до ε при таком поиске определяется формулой

$$N(\varepsilon) \leq \frac{1}{\ln r} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1)$$

В настоящей работе рассматривается n -мерный случай.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — выпуклая вниз функция, заданная в выпуклой области G . Пусть имеется возможность вычислять значения функции $f(x)$ в любой точке $x \in G$. В работе [4] была дана оценка количества вычислений $N(\varepsilon)$ функции $f(x)$, требующихся для локализации точки минимума $f(x)$ в подобласти объема ε . Оказалось, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$N(\varepsilon) \asymp \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (2)$$

т. е. порядок величины $N(\varepsilon)$ не зависит от размерности.

Но в задачах минимизации выпуклых функций обычно требуется найти некоторую точку x , мало отличающуюся от точки минимума x^* , т. е. та-

* Мы пользуемся следующими обозначениями эквивалентности функций от некоторого аргумента: $\alpha \sim \beta$, если $\lim \alpha / \beta = 1$, $\alpha \asymp \beta$, если $c\beta \leq \alpha \leq C\beta$.