Теорема 3. *Пусть задачи $A(0)$ и $B(0)$ разрешимы и множества их решений $X(0)$ и $Y(0)$ ограничены, функции $f_i(x, t)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, дифференцируемы в точке $t = +0$ для любого x из некоторой окрестности X' множества решений задачи $A(0)$, причем производные $\partial f_i(x, 0) / \partial t$ этих функций удовлетворяют условию:*

$$\frac{f_i(x,t)-f_i(x,0)}{t} \to \frac{\partial f_i(x,0)}{\partial t} \quad \text{при} \quad t \to +0$$

равномерно относительно $x \in X'$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

В таком случае функция $v(t)$ имеет правую производную $v'(0)$ в точке $t = 0$, причем

$$v'(0) = \max_{x\in X(0)} \min_{y\in Y(0)} \frac{\partial F(x,y,0)}{\partial t} = \min_{y\in Y(0)} \max_{x\in X(0)} \frac{\partial F(x,y,0)}{\partial t}. \qquad (43)$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить (см. [6], лемма 1), что задача $A(t)$ может быть переписана в эквивалентном виде

$$\varphi(x,t) = \inf_{y\in Y} F(x,y,t) \to \sup, \qquad x \in X,$$

а затем воспользоваться теоремой 2.

Теорема 3 представляет собой обобщение на некоторый класс задач квазивыпуклого программирования, включающий, в частности, задачи выпуклого программирования, известной теоремы о маргинальных значениях для задач линейного программирования. Последняя теорема была сформулирована Х. Милсом [3], который доказал ее для случая прямоугольных матричных игр. Однако предложенное Х. Милсом в [3] доказательство этой теоремы для случая общей задачи линейного программирования содержало ошибку. В дальнейшем оказалось (см. [1, 2]), что для справедливости теоремы о маргинальных значениях общей задачи линейного программирования достаточно предположить ограниченными множества $X(0)$ и $Y(0)$ решений исходной и двойственной задач при $t = 0$. При этом было показано [2, гл. 3, § 5], что требование об ограниченности множеств $X(0)$ и $Y(0)$ является существенным. Таким образом, теорема 3 доказана нами в предельно слабых предположениях и содержит в качестве частного случая теорему о маргинальных значениях задачи линейного программирования, доказанную в [1] и [2]. Отметим, что при существенно более сильных ограничениях (X — ограниченное множество, $Y(t)$ — непусто и равномерно ограничено в некоторой окрестности $\delta(0)$ точки $t = 0$, $X(t) \times Y(t)$ — множество седловых точек функции Лагранжа $F(x, y, t)$ при $t \in \delta(0)$) соотношение (43) было установлено в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Williams. Marginal values in linear programming. J. Soc. Ind. and Appl. Math., 1963, v. 11, № 1.
2. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. «Сов. радио», 1964.
3. Х. Милс. Маргинальные значения матричных игр и задач линейного программирования. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. В. А. Волконский. Схема оптимального перспективного планирования и оценки ресурсов. Сб. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. М., «Мысль», 1965.
5. H. Nicaido. On von Neumann's minimax theorem. Pacific J. Math., 1954, № 4.
6. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, № 3.

Поступила в редакцию
19 IV 1968

ЭКОНОМИКА 1968
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТОМ IV, вып. 6

ОБОБЩЕНИЕ ПОИСКА ФИБОНАЧЧИ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

А. И. КУЗОВКИН

(Москва)

Работа посвящена обобщению одного интересного результата Кифера — Джонсона, изложенного в [1, стр. 55] и [2].

Результат Кифера — Джонсона состоит в следующем.

Пусть $y = f(x)$ — строго выпуклая вниз функция, заданная на отрезке $[0, 1]$. Требуется найти минимальное из чисел ε_N, таких, что для всякого $\delta > 0$ всегда можно указать интервал отрезка длины $\varepsilon_N + \delta$, содержащий точку минимума функции $f(x)$, путем вычисления не более чем N значений этой функции.

Оказывается, что число $\varepsilon_N = 1 / F_N$, где F_N — числа Фибоначчи, определяемые по рекуррентной формуле $F_0 = F_1 = 1$, $F_{N+1} = F_N + F_{N-1}$. Легко проверить, что при* $N \to \infty$ $F_N \sim r^N$, где $r = 1 + \sqrt{5} / 2$.

Пусть $f(x^*) = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. Опишем теперь процедуру, дающую асимптотически точное решение поставленной выше задачи. Эту процедуру называют поиском Фибоначчи [3]. Он состоит в следующем.

Положим $x_1 = 1 - 1 / r$, $x_2 = 1 / r$.

Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_2)$: если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то x^* лежит в интервале $(x_1, 1)$; если $f(x_1) < f(x_2)$, то x^* лежит в интервале $(0, x_2)$.

Пусть для определенности x^* лежит на отрезке $[0, x_2]$. Уменьшаем масштаб в r раз. Тогда отрезок $[0, x_2]$ превратится в единичный и точка x_1 станет точкой x_2. Далее мы повторяем всю процедуру. При повторении всей процедуры N раз отрезок, на котором лежит x^*, сократится до длины r^{-N} (в старом масштабе). Количество вычислений $N(\varepsilon)$, требующееся для нахождения x^* с точностью до ε при таком поиске определяется формулой

$$N(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\ln r} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{1}$$

В настоящей работе рассматривается n-мерный случай.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выпуклая вниз функция, заданная в выпуклой области G. Пусть имеется возможность вычислять значения функции $f(x)$ в любой точке $x \in G$. В работе [4] была дана оценка количества вычислений $N(\varepsilon)$ функции $f(x)$, требующихся для локализации точки минимума $f(x)$ в подобласти объема ε. Оказалось, что при $\varepsilon \to 0$

$$N(\varepsilon) \asymp \ln \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2}$$

т. е. *порядок* величины $N(\varepsilon)$ не зависит от размерности.

Но в задачах минимизации выпуклых функций обычно требуется найти некоторую точку x, мало отличающуюся от точки минимума x^*, т. е. та-

* Мы пользуемся следующими обозначениям эквивалентности функций от некоторого аргумента: $\alpha \sim \beta$, если $\lim \alpha / \beta = 1$, $\alpha \asymp \beta$, если $c\beta \leqslant \alpha \leqslant C\beta$.

кую, что

$$f(x) - f(x^*) \leqslant \alpha, \tag{3}$$

где $f(x^*) = \min\limits_G f(x)$, d — заданная точность.

В настоящей работе мы занимаемся этой задачей в предположении, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Липшица:*

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant K \sum_{i=1}^{n} |x_i'' - x_i'| \tag{4}$$

(константа K часто может быть определена априори).

Итак, мы хотим оценить количество вычислений $N(\alpha)$ функции $f(x)$, требуемое для получения неравенства (3) в предположении, что $f(x)$ — выпуклая функция, удовлетворяющая условию Липшица. В настоящей работе доказывается, что для размерности n

$$A \ln \frac{K}{\alpha} \leqslant N(\alpha) \leqslant C \ln \frac{K}{\alpha} + D, \tag{5}$$

где C и D — константы, зависящие только от n, A — не зависит от n.

Подобная же оценка еще раньше была получена А. Ю. Левиным в работе [5]. Однако там допускались вычисления градиента $f(x)$. Вывод формулы (5) из результатов работы [4] основан на приеме понижения размерности, совпадающем по идее с тем, который осуществлен в [5]. Но так как в [5] подробно рассматривался лишь случай $n = 2$, то представляет интерес рассмотреть общий случай. Выводу формулы (5) посвящен первый раздел. Во втором разделе рассматривается другая попытка обобщения поиска Фибоначчи на многомерный случай — алгоритм покоординатного поиска точки минимума строго выпуклой функции $f(x)$ с точностью до ε по каждой координате. Этот алгоритм изложен в [3, 6]. При написании статьи [4] авторам эти работы были неизвестны. Построением противоречащего примера показывается, что алгоритм, предложенный в [3, 6], не приводит к нахождению точки минимума строго выпуклой функции с точностью до ε по каждой координате.

Алгоритм, предлагаемый в первом разделе, хотя и дает хорошую теоретическую оценку количества вычислений функции $f(x)$, которое требуется для минимизации выпуклых функций, удовлетворяющих условию Липшица, тем не менее мало пригоден для практического счета. Поэтому важной задачей является построение более конструктивных алгоритмов, пригодных для практического использования, пусть даже и имеющих теоретическую оценку необходимого количества вычислений функции $f(x)$, худшую, чем в алгоритме первого раздела. Два таких алгоритма предлагаются в третьем разделе работы.

Важно отметить, что предлагаемые алгоритмы относятся к классу алгоритмов для решения задач выпуклого программирования с функциями, заданными в произвольном виде: аналитическими выражениями, при помощи алгоритмов, таблиц, полученных экспериментально или методом статистического моделирования.

Как известно, многие производственные и экономические задачи решаются с помощью статистического моделирования (см., например [7]). Причем аналитические методы часто вообще неприменимы при оптимизации таких задач, так как функции, описывающие производственные процессы, известны лишь алгоритмически, а их аналитические выражения получить не удается. Большинство же алгоритмов оптимизации выпуклых функций применимо лишь в случае функций, заданных аналитическими выражениями или, по крайней мере, допускающих легкое вычисление градиента.

Н. П. Бусленко и Г. А. Соколов в работе [8] предлагают алгоритм оптимизации выпуклых непрерывно дифференцируемых функций, заданных в произвольном виде и определенных на выпуклом множестве, и доказывают его сходимость. Другие алгоритмы оптимизации функций, заданных в произвольном виде, см. в [9].

В данной работе рассматривается задача минимизации выпуклых функций, определенных на n-мерном кубе. Если функция определена на произвольной выпуклой области, то, используя прием, предложенный в [8], можно свести первоначальную задачу к задаче минимизации выпуклой функции, заданной на n-мерном кубе. Алгоритмы, предлагаемые в данной работе, по-видимому, в известном смысле дополняют алгоритм Бусленко — Соколова. Можно ожидать, что при $n = 5 \div 10$ для некоторого класса выпуклых функций, для которых алгоритм Бусленко и Соколова дает медленную сходимость, предлагаемый алгоритм будет сходиться быстрее и, наоборот, при большой размерности ($n > 10$) предлагаемый алгоритм будет сходиться очень медленно, так что более эффективным окажется алгоритм Бусленко и Соколова.

Некоторые вычислительные эксперименты по алгоритму Бусленко — Соколова проделаны В. А. Старосельским (см. [10, 11]). По предлагаемым алгоритмам эксперименты еще не проводились.

1. О КОЛИЧЕСТВЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Неравенство $N(\alpha) \geqslant A \ln (K / \alpha)$ следует сразу из результата Кифера — Джонсона. Для доказательства обратного неравенства нам потребуется дополнительное предположение. Мы предположим, что функция $f(x)$ определена и удовлетворяет условию Липшица [5] в выпуклой области P, являющейся *расширением* области G. Точнее, область P состоит из всех точек, расстояние которых до области G не превосходит δ *.

Лемма 1. *Пусть h — наименьшая ширина выпуклого тела G, V — объем тела $G \in E^n$. Тогда $h^n \leqslant n!V$.*

Доказательство. 1) Доказательство вытекает из следующего результата теории выпуклых тел (см., например, [12]):

Пусть V — объем выпуклого тела $G \subset E^n$, $V(P)$ — объем наименьшего параллелепипеда P, содержащего G. Тогда: $V(P) \leqslant n!V$.

2) Пусть h_1 — наименьшая ширина P. Тогда, очевидно, имеем:

$$h_1{}^n \leqslant n!V.$$

Так как $h \leqslant h_1$, то $h^n \leqslant n!V$.

Лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству формулы (5) для случая, когда допускается только вычисление значений функции $f(x)$ в отдельных точках, а непосредственное вычисление градиента функции $f(x)$ невозможно. Для случая, когда допускается непосредственное вычисление градиента $f(x)$, доказательство аналогично.

1) Оценим количество вычислений, достаточное для того, чтобы наименьшая ширина h подобласти G, содержащей точку минимума $f(x)$, была не больше $\gamma(\alpha / K)$, где γ — некоторое число. По лемме 1, тело, имеющее

---

* Если использовать прием понижения размерности, предложенный в [5] для $n = 2$ (замена выпуклой фигуры малой площади «аппроксимирующим» отрезком) в общем случае, то можно было бы обойтись без этого предположения. Однако такой путь менее конструктивен, чем излагаемый в данной работе.

объем $V \leqslant (\alpha / K)^n (\gamma^n / n!)$, имеет ширину $h \leqslant \sqrt[n]{n! V} \leqslant \gamma(\alpha / K)$. Следовательно, нам достаточно сократить объем до величины $\gamma^n (\alpha / K)^n (1 / n!)$. По [4] для этого потребуется не больше вычислений, чем

$$C_n \ln n! \left(\frac{K}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\gamma^n} = D_n \ln \frac{K}{\alpha} + E_n, \tag{6}$$

где константы D_n и E_n зависят только от n, но не зависят от α. Область, которая получится после этих вычислений, обозначим G_α.

2. Пусть наименьшая ширина h области G_α удовлетворяет неравенству $h \leqslant [1 / (3n-2)] (\alpha / K)$. Проводим семейство гиперплоскостей $\{L\}$, $L \cap G_\alpha \neq \Lambda$ и L перпендикулярны отрезку h. Обозначим через L_i^* сечение $L_i \cap P_\alpha$, где $L_i \in \{L\}$, P_α — проекция G_α на некоторую гиперплоскость L. Переходим к новой системе прямоугольных координат, начало которой находится на одном из концов отрезка h, а ось x_n совпадает с направлением отрезка h.

Пусть на L_1^* $(x_n = x_n')$ $\min f(x) = f(x_1', x_2', \ldots, x_n')$; на L_2^* $(x_n = x_n'')$ $\min f(x) = f(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$.

В силу выбора h имеем

$$|f(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n'') - f(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n')| \leqslant \alpha / 3n-2, \tag{7}$$

$$|f(x_1'', x_2'', \ldots, x_{n-1}'', x_n') - f(x_1'', x_2'' \ldots, x_{n-1}'', x_n'')| \leqslant \alpha/3n-2. \tag{8}$$

Точки $(x_1', x_2', \ldots, x'_{n-1}, x_n'')$ и $(x_1'', x_2'', \ldots, x_{n-1}'', x_n')$ могут, вообще говоря, не принадлежать области G. Однако, как легко видеть, эти точки принадлежат области P при $\alpha / [3n-2)K] < \delta$, и, следовательно, неравенства (7) — (8) выполняются.

Сложив два предыдущих неравенства, получим

$$|[f(x_1'', x_2'', \ldots, x_{n-1}'', x_n') - f(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_n')] +$$
$$+ [f(x_1', \ldots, x_{n-1}', x_n'') - f(x_1'', \ldots, x_{n-1}'', x_n'')]| \leqslant 2\alpha/3n-2.$$

Так как оба слагаемых под модулем в неравенстве положительны, то

$$f(x_1'', x_2'', x_{n-1}'', x_n') - f(x_1', \ldots, x_{n-1}', x_n') \leqslant 2\alpha/3n-2. \tag{9}$$

Сложив (8) и (9), получим

$$|f(x_1'', \ldots, x_{n-1}'', x_n'') - f(x_1', \ldots, x_{n-1}', x_n')| \leqslant 3\alpha / 3n-2.$$

Итак, мы показали, что минимумы $f(x)$ на семействе L_i^*, $i = 1, 2, \ldots$, отличаются друг от друга меньше чем на $3\alpha / 3n-2$. Отсюда легко получить алгоритм нахождения точки x, удовлетворяющей неравенству (3). Воспользуемся следующей процедурой. Построим некоторую гиперплоскость $L_1 \in \{L\}$. Применяя алгоритм статьи [4] к $[n-1]$-мерной выпуклой области L_1^*, локализуем точку минимума в подобласти G_α^{n-1} наименьшей ширины h, не большей $\alpha / K(3n-2)$.

Повторяя процедуру $(n-1)$ раз, приходим к одномерной области — интервалу длины, не большей $\alpha / K(3n-2)$. В итоге получим неравенство

$$f(x) - f(x^*) \leqslant (n-1) 3\alpha / 3n-2 + \alpha / 3n-2 = \alpha,$$

где $f(x)$ — вычисленное значение функции в точке x. При этом количество вычислений $N(\alpha)$ функции $f(x)$, достаточное для выполнения неравенства (3), определится так

$$N(\alpha) \leqslant (C_n + C_{n-1} + \ldots + C_1) \ln \frac{K}{\alpha} + D.$$

Отсюда следует справедливость формулы (5) для произвольного n.

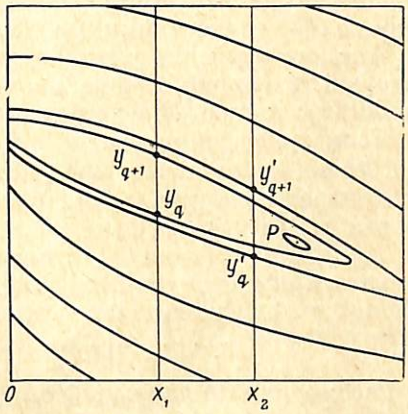
Аналогично доказывается формула (5) для случая, когда допускается вычисление *градиента* $f(x)$, только здесь вместо алгоритма статьи [4] будет применяться алгоритм, изложенный в [5].

2. ОБ ОДНОЙ ПОПЫТКЕ ОБОБЩЕНИЯ ПОИСКА ФИБОНАЧЧИ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В статье [3] осуществлена попытка обобщить поиск Фибоначчи для нахождения точки минимума строго выпуклой функции с точностью до ε по каждой координате, используя одно известное свойство строго выпуклых функций.

Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $f(x, y)$ — строго выпуклая функция, определенная на выпуклой области G,— для простоты предполагается, что G есть единичный квадрат

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$



Опеределим теперь функцию $g(x)$ следующим образом: $g(x) = \min\limits_{0 \leqslant y \leqslant 1} f(x, y)$. Зафиксируем x, тогда $f(x, y)$ является строго выпуклой функцией y.

При этом $g(x)$, которая есть минимум строго выпуклой функции y для каждого значения x, может быть определена с любой точностью одномерным поиском Фибоначчи. Заметим, что для каждого x, $g(x)$ обладает следующим известным свойством: $g(x)$ является строго выпуклой функцией. Аналогично, для выпуклой функции $f(x, y)$ функция $g(x)$ является выпуклой.

Пусть $g(x_1) = f(x_1, y_1)$, $g(x_2) = f(x_2, y_2)$.

В работе [3] предлагается следующий двумерный поиск Фибоначчи:

1. Положим $x_1 = 1 - 1/r$, $x_2 = 1/r$.

2. Определяем $g(x_1)$ и $g(x_2)$ одномерным поиском Фибоначчи, локализуя y_1 и y_2 на интервалах l_k' и l_k'' длины ε. Пусть $y_k' \in l_k'$ и $y_k'' \in l_k''$.

3. Сравниваем вычисленные значения $f(x_1, y_k')$ и $f(x_2, y_k'')$: если $f(x_1, y_k') < f(x_2, y_k'')$, тогда точку минимума $f(x, y)$ содержит прямоугольник $[0, x_2] \times [0, 1]$; если $f(x_1, y_k') \geqslant f(x_2, y_k'')$, тогда точку минимума $f(x, y)$ содержит прямоугольник $[x_1, 1] \times [0, 1]$.

Уменьшаем масштаб по оси x в r раз и повторяем процедуру, например для прямоугольника $[x_2, 1] \times [0, 1]$, если он содержит точку минимума $f(x, y)$. При повторении процедуры q раз отрезок Δx_q, на котором лежит точка минимума $g(x)$, сократится до длины r^{-q} в первоначальном масштабе. Так как по условию мы локализуем точку минимума $f(x, y)$ по координатам x и y с точностью до ε, то q определяется из этого условия так: $r^{-q} = \Delta x_q = \varepsilon$.

Общее количество вычислений $N(\varepsilon)$, требующееся для определения точки минимума $f(x, y)$ с точностью до ε по каждой координате x и y, имеет порядок $\ln^2(1/\varepsilon)$. Это следует из того, что количество вычислений функции $f(x, y)$ при каждом фиксированном x имеет порядок $\ln(1/\varepsilon)$, а количество выбираемых точек по оси x также имеет порядок $\ln(1/\varepsilon)$.

Однако изложенный выше алгоритм покоординатного поиска не дает возможности определить точку минимума $f(x, y)$ с точностью до ε для каждой координаты x и y.

Действительно, рассмотрим семейство линий уровня произвольной строго выпуклой функции $f(x, y)$, минимум которой достигается в точке $P(x^*, y^*)$ (см. рисунок).

Применяя правило 2 алгоритма, мы получили интервалы l_q и l_q' длины ε. Пусть вычислены значения

$$f(x_1, y_q) = f(x_1, y_{q+1}) \text{ и } f(x_2, y_q') = f(x_2, y_{q+1}'),$$

где

$$y_q \in l_q, \quad y_{q+1} \in l_q, \quad y_q', \quad y_{q+1}' \in l_{q'}.$$

На основе правила 3 алгоритма отбрасываем прямоугольник $[x_2, 1] \times \times [0, 1]$ и продолжаем поиск точки минимума $f(x, y)$ на прямоугольнике $[0, x_2] \times [0, 1]$, так как $f(x_2, y_q') > f(x_1, y_q)$. Но, как видно из рисунка, точка P находится в прямоугольнике $[x_2, 1] \times [0, 1]$ и, применяя дальше алгоритм к прямоугольнику $[0, x_2] \times [0, 1]$, мы не приближаемся к точке P — точке минимума $f(x, y)$.

Аналогичный алгоритм предлагается в [3, 6] и для n-мерного случая, который, очевидно, также не приводит к нахождению точки минимума функции с точностью до ε по каждой координате.

Если же рассматривать изложенный алгоритм как алгоритм нахождения точки x, удовлетворяющей условию (3), то в работах [3, 6] не рассматривается вопрос о том, с какой точностью будет получено значение минимума выпуклой функции, если поиск производится с точностью до ε по каждой координате. Алгоритмы минимизации выпуклых функций, удовлетворяющих условию Липшица, предлагаемые в третьем разделе, являются модификацией вышеизложенного алгоритма.

3. АЛГОРИТМЫ ПОКООРДИНАТНОГО ПОИСКА

Рассмотрим *двумерный случай*. Пусть $f(x, y)$ — выпуклая функция, определенная на выпуклой области G. Для простоты предположим, что G есть единичный квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Положим, $x_1 = 1 - 1/r$, $x_2 = 1/r$.

Пусть $g(x_1) = f(x_1, y_1)$, $g(x_2) = f(x_2, y_2)$, $g(x^*) = f(x^*, y^*)$. Для функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условию Липшица, можно построить алгоритмы нахождения такой точки (x, y), что $f(x, y) - f(x^*, y^*) \leqslant \alpha$.

Определяем $g(x_1)$ и $g(x_2)$ одномерным поиском Фибоначчи. Пусть на каждой итерации этого поиска на отрезках длины 1, принадлежащих линиям $x = x_1$ и $x = x_2$, точки y_1 и y_2 локализуются на интервале ε_k. Пусть $f(x_1, y_k')$ и $f(x_1, y_k'')$ — соответствующие значения $f(x, y)$, полученные на k-й итерации этого поиска. Прежде чем описывать алгоритмы, рассмотрим некоторые свойства выпуклых функций, которые мы формулируем в леммах 2—5 *.

Лемма 2. 1) *Если* $f(x_1, y_k') - f(x_2, y_k'') \geqslant K\varepsilon_k$, *то точка минимума* $f(x, y)$ *принадлежит прямоугольнику* $[x_1, 1] \times [0, 1]$.

2) *Если* $f(x_2, y_k'') - f(x_1, y_k') \geqslant K\varepsilon_k$, *то точка минимума* $f(x, y)$ *принадлежит прямоугольнику* $[0, x_2] \times [0, 1]$.

Лемма 3. 1) *Если* $0 \leqslant f(x_1, y_k') - f(x_2, y_k'') < K\varepsilon_k$ *и* $\varepsilon_k < \alpha | (1 + + r)K$, *то* а) *либо точка минимума* $f(x, y)$ *принадлежит прямоугольнику* $[x_1, 1] \times [0, 1]$; б) *либо* $f(x^*, y^*) - f(x_2, y_k'') < \alpha$.

* Доказательства лемм 2—5 ввиду ограниченного размера статьи не приводятся.

2) *Если* $0 \leqslant f(x_2, y_k'') - f(x_1, y_k') < K\varepsilon_k$ *и* $\varepsilon_k \leqslant \alpha/(1+r)K$, *то*: а) *либо точка минимума* $f(x, y)$ принадлежит прямоугольнику $[0, x_2] \times [0, 1]$; б) *либо* $f(x^*, y^*) - f(x_1, y_k') \leqslant \alpha$.

Рассмотрим задачу нахождения минимума выпуклой функции одной переменной на отрезке $[0, 1]$. Пусть $f(x^*) = \min\limits_{x \in [0,1]} f(x)$. Для нахождения точки x^* применяем одномерный поиск Фибоначчи. Имеет место следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть в двух последовательных точках* x_1 *и* x_2 $(x_1 < x_2)$, *полученных при поиске Фибоначчи, имеем*

$$0 < f(x_2) - f(x_1) < \alpha / r.$$

Тогда, если в следующей выбранной точке x_3 *вычисленное значение* $f(x_3)$ *таково, что* $f(x_1) \geqslant f(x_3)$, *либо* $0 < f(x_3) - f(x_1) < \alpha/r$, *то* $f(x_1) - f(x^*) < \alpha$.

Рассмотрим задачу нахождения минимума выпуклой функции $f(x, y)$.

Функции $g(x_1)$, $g(x_2)$ и $g(x_3)$ определяются одномерным поиском Фибоначчи. Пусть $g(x_i) = f(x_i, y_i)$, $f(x_i, y_i^k)$ — вычисленные значения $f(x_i, y_i)$, $i, k = 1, 2, 3$.

Лемма 5. 1) *Пусть* $0 < f(x_i, y_i^2) - f(x_i, y_i^1) < \alpha / r(r+2)$, $i = 1, 2, 3$. *Тогда, если* $f(x_i, y_i^3) \geqslant f(x_i, y_i^1)$ *либо* $0 < f(x_i, y_i^1) - f(x_i, y_i^3) < \alpha / r(r+2)$, *то* $f(x_i, y_i^1) - g(x_i) < \alpha / r + 2$.

2) *Пусть вычисленные значения* $f(x_i, y_i^1)$ *таковы, что* $f(x_i, y_i^1) - g(x_i) < \alpha / r + 2$. *Тогда, если* $0 < f(x_2, y_2^1) - f(x_1, y_1^1) < \alpha / r(r+2)$, $f(x_3, y_3^1) < f(x_1, y_1^1)$ *либо* $0 < f(x_3, y_3^1) - f(x_1, y_1^1) < \alpha / r(r+2)$, *то* $f(x_1, y_1^1) - f(x^*, y^*) \leqslant \alpha$.

Переходим теперь к изложению двух алгоритмов покоординатного поиска.

Опишем *первый алгоритм покоординатного поиска*. Положим $x_1 = 1 - 1/r$, $x_2 = 1/r$.

Пусть $g(x_i) = f(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Определяем $g(x_1)$ и $g(x_2)$ одномерным поиском Фибоначчи.

Пусть после одного шага одномерного поиска точка y_1 локализована на интервале ε_1, точка y_2 локализована на интервале ε_2.

Сравним вычисленные значения $f(x_1, y_1^1)$ и $f(x_2, y_2^1)$:

1) если $f(x_2, y_2^1) - f(x_1, y_1^1) \geqslant K\varepsilon_2$, тогда из утверждения леммы 2 следует, что точка минимума $f(x, y)$ принадлежит прямоугольнику $[0, x_2] \times [0, 1]$;

2) если $f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2^1) \geqslant K\varepsilon_1$, тогда из утверждения леммы 2 следует, что точка минимума $f(x, y)$ принадлежит прямоугольнику $[x_1, 1] \times [0, 1]$;

3) если $|f(x_1, y_1^1) - f(x_2, y_2^1)| < K\delta$, где $\delta = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то сравниваем $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\alpha/(1+r)K$:

а) если $\varepsilon > \alpha/(1+r)K$, то сравниваем ε_1 и ε_2: при $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$ продолжаем поиск точки (x_1, y_1), при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ продолжаем поиск точки (x_2, y_2);

б) если $\varepsilon \leqslant \alpha/(1+r)K$, то сравниваем $f(x_1, y_1^1)$ и $f(x_2, y_2^1)$: при $f(x_1, y_1^1) \geqslant f(x_2, y_2^1)$ продолжаем поиск на прямоугольнике $[x_1, 1] \times [0, 1]$; при $f(x_1, y_1^1) < f(x_2, y_2^1)$ продолжаем поиск на прямоугольнике $[0, x_2] \times [0, 1]$.

Уменьшая масштаб по оси x в r раз, повторяем процедуру для вновь полученного прямоугольника. Повторяем всю процедуру q раз, где q определяется из условия:

$$r^{-q} \leqslant \alpha / 4K.$$

Оценим *скорость сходимости алгоритма*. Из описания алгоритма видно, что при фиксированном x_i одномерный поиск на отрезке длины 1, принадлежащем линии $x = x_i$, осуществляется до получения интервала длины $\varepsilon \leqslant \alpha / (1 + r)K$. Отсюда $m(\alpha)$ — количество вычислений функции, требующееся для локализации y_i, определяется следующей формулой: $m(\alpha) \backsim (1 / \ln r) \ln (1 / \alpha)$.

Пусть $g(x^*) = \min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} g(x)$. Докажем, что если осуществлять двумерный поиск Фибоначчи до интервала (x_1, x_2) длины $\alpha / 4K$, то неравенство (3) будет выполняться. Действительно, если $x^* \notin (x_1, x_2)$, то, как следует из доказательства леммы 3, неравенство (3) будет выполняться. Пусть $x^* \in (x_1, x_2)$, тогда из результатов первого раздела известно, что $g(x) - g(x^*) \leqslant 3\alpha / 4$. Так как $x_2 - x_1 = \alpha / 4K$, то достаточно локализовать точку (x_1, y_1) на интервале $\varepsilon_1 = \alpha / 4K$, чтобы получить $f(x_1, y_1^1) - g(x)^* \leqslant \alpha$.

Количество q выбранных согласно алгоритму точек для получения интервала (x_1, x_2) длины, не большей $\alpha / 4K$, определяется формулой

$$q \backsim \frac{1}{\ln r} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда получаем результат, который сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выпуклая функция* $f(x, y)$, *определенная на квадрате, удовлетворяет условию Липшица. Тогда с помощью первого алгоритма покоординатного поиска можно найти такую точку* x, *что будет выполняться условие* (3). *При этом требующееся количество вычислений* $N(\alpha)$ *функции* $f(x, y)$ *определяется формулой*

$$N(\alpha) \backsim \frac{1}{\ln^2 r} \ln^2 \frac{1}{\alpha}.$$

Рассмотрим *второй алгоритм координатного поиска*. Основываясь на леммах 4 и 5, можно построить второй алгоритм поиска точки x, удовлетворяющей условию (3). При этом алгоритме явное задание константы K не требуется. Он состоит в следующем:

1. Согласно одномерному поиску Фибоначчи, выбираем точки x_i на оси x, $i = 1, 2$.

2. Определяем $g(x_i)$ одномерным поиском по оси y до тех пор, пока не получим три последовательных значения $f(x_i, y_i^k)$, $(k = 1, 2, 3)$, таких, что

$$|f(x_i, y_i) - f(x_i, y_i^2)| < \alpha / r(r + 2),$$

$$|f(x_i, y_i^1) - f(x_i, y_i^3)| < \alpha / r(r + 2).$$

Здесь $f(x_i, y_i^1) = \min\limits_{k=1,2,3} f(x_i, y_i^k)$.

3. Сравниваем $f(x_1, y_1^1)$ и $f(x_2, y_2^1)$: при $f(x_1, y_1^1) \geqslant f(x_2, y_2^1)$ продолжаем поиск на прямоугольнике $[x_1, 1] \times [0, 1]$; при $f(x_1, y_1^1) < f(x_2, y_2^1)$ продолжаем поиск на прямоугольнике $[0, x_2] \times [0, 1]$.

4. Продолжаем поиск по оси x до тех пор, пока не получим три последовательные точки x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, такие, что

$$|f(x_q, y_q^1) - f(x_{q+1}, y_{q+1}^1)| < \alpha/r(r + 2),$$

$$|f(x_q, y_q^1) - f(x_{q+2}, y_{q+2}^1)| < \alpha/r(r + 2),$$

где $f(x_q,\ y_q^1)$, $f(x_{q+1},\ y_{q+1}^1)$ и $f(x_{q+2},\ y_{q+2}^1)$ — вычисленные значения при одномерных поисках на линиях $x = x_q$, $x = x_{q+1}$ и $x = x_{q+2}$ и $f(x_q, y_q^1)$ — наименьшее из них. Очевидно, что вышеуказанные неравенства будут выполняться через конечное число шагов двумерного поиска Фибоначчи.

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выпуклая функция* $f(x,\ y)$, *определенная на квадрате, удовлетворяет условию Липшица. Тогда с помощью второго алгоритма покоординатного поиска можно найти такую точку* x, *что будет выполняться условие* (3). *При этом требующееся количество вычислений* $N(\alpha)$ *функции* $f(x,\ y)$ *определяется формулой*

$$N(\alpha) \backsim \frac{1}{\ln^2 r} \ln^2 \frac{1}{\alpha}.$$

Если константа K известна достаточно точно, то для ускорения сходимости можно построить третий алгоритм, объединяющий первый и второй алгоритмы.

Обратимся к многомерному случаю. Пусть $f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ — выпуклая функция, определенная в выпуклой области G. Для простоты предположим, что G есть единичный n-мерный куб: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определим функцию $g(x_i)$:

$$g(x_i) = \min_{0 \leqslant x_j \leqslant 1} f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n),$$

$$j = 1,\ 2, \ldots\ i-1,\ i+1, \ldots n;\ i = 1, \ldots, n.$$

Легко доказать, что $g(x_i)$ — выпуклая функция.

Предполагая, что выпуклая функция $f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию Липшица, построим алгоритм для нахождения точки x, удовлетворяющей условию (3). Пусть

$$g(x_{i1}) = f(x_{11},\ x_{21}, \ldots, x_{i1}, \ldots, x_{n1}),\quad g(x_{i2}) =$$
$$= f(x_{12},\ x_{22}, \ldots, x_{i2}, \ldots, x_{n2}).$$

Приведем *первый алгоритм покоординатного поиска.*

1) Выбираем некоторую координату, например координату x_n.

2) Определяем x_{n1} и x_{n2} по формулам $x_{n1} = 1 - 1/r$, $x_{n2} = 1/r$.

3) Определяем $g(x_{n1})$ и $g(x_{n2})$ $(n-1)$-мерным поиском Фибоначчи на $(n-1)$-мерных единичных кубах — сечениях $x_n = x_{n1}$ и $x_n = x_{n2}$ n-мерного единичного куба, локализуя точки $(x_{11},\ x_{21}, \ldots, x_{n1})$ и $(x_{12},\ x_{22}, \ldots, x_{n2})$ на $(n-1)$-мерных параллелепипедах с наименьшей шириной $h = \alpha / (3n-2)K$ и т. д.

Отметим, что при первом алгоритме n-мерный поиск осуществляется до получения $x_{n2} - x_{n1} = \alpha / (3n-2)K$. Причем, по координатам $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ поиск осуществляется всякий раз до получения интервала длины $\varepsilon \leqslant \alpha / (r+1)^{n-1}K$.

Аналогично двумерному случаю можно доказать, что тогда будет найдена точка x, удовлетворяющая неравенству (3). Требующееся при этом количество вычислений

$$N(\alpha) \leqslant \frac{1}{\ln^n r} \ln^{n-1} \frac{(r+1)^{n-1}K}{\alpha} \ln \frac{(3n-2)K}{\alpha}.$$

Отсюда

$$N(\alpha) \backsim \frac{1}{\ln^n r} \ln^n \frac{1}{\alpha}.$$

Аналогично двумерному случаю строится *второй алгоритм покоординатного поиска* для n-мерного случая.

1. Выбираем некоторую координату, например x_n. Определяем x_{n1} и x_{n2} согласно поиску Фибоначчи.

2. Определяем $g(x_{n1})$ и $g(x_{n2})$ $(n-1)$-мерным поиском Фибоначчи на $(n-1)$-мерных единичных кубах — сечениях $x = x_{n1}$ и $x = x_{n2}$ n-мерного единичного куба.

3. По каждой координате производим поиск всякий раз до получения трех последовательных значений функции $f(x)$: f_1, f_2 и f_3, таких, что

$$|f_1 - f_2| < \beta; \quad |f_1 - f_3| < \beta; \quad f_1 = \min(f_1, f_2, f_3).$$

Тогда в результате применения второго алгоритма значение минимума $f(x)$ будет найдено с точностью β_n, где β_n определяется из следующего рекуррентного соотношения: $\beta_n = (1 + r)\beta_{n-1} + r\beta$, $\beta_1 = r\beta$. Выбирая β из условия $\beta_n = \alpha$, мы получаем решение задачи. Требующееся при втором алгоритме количество вычислений $N(\alpha)$ в n-мерном случае определяется по формуле

$$N(\alpha) \backsim \frac{1}{\ln^n r} \ln^n \frac{1}{\alpha}.$$

В заключение отметим, что оба описанных алгоритма покоординатного поиска применимы и в дискретном случае, только точность поиска по каждой координате не может превышать наименьшего расстояния между точками сетки. Оценка количества вычислений та же, что и в непрерывном случае.

Выражаю благодарность В. А. Волконскому, Г. А. Соколову и В. М. Тихомирову за ценные замечания, высказанные при обсуждении результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. I. Kiefer. Sequential minimax search for a maximum. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, v. 4,
3. Naboru Sugie. An extension of Fibonaccian searching to multidementional cases. Bull. Electrotech. Lab., 1962, v. 26, № 2 (Tokyo).
4. А. И. Кузовкин, В. М. Тихомиров. О количестве вычислений для нахождения минимума выпуклой функции. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 1.
5. А. Ю. Левин. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 6.
6. P. Crolak, L. Cooper. An extension of Fibonaccian search to several variables. Comm. ACM, 1963, v. 6, № 10.
7. Н. П. Бусленко. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., «Наука», 1964.
8. Н. П. Бусленко, Г. А. Соколов. Об одном классе задач оптимального распределения. Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, вып. 1.
9. Д. Дж. Уайлд. Методы поиска экстремума. М., «Наука», 1967.
10. В. А. Старосельский. Об оптимизации функционалов, заданных статистической моделью. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 3.
11. В. А. Старосельский. К вопросу об оптимизации некоторых систем массового обслуживания. Кибернетика, Киев, 1967, № 3.
12. R. P. Bambach. Polar receprocal convex domains. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, № 5.

Поступила в редакцию
3 XI 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1968
том IV, вып. 6

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

МЕТОДОЛОГИЯ РАЗРАБОТКИ МОДЕЛИ ТЕКУЩЕГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ НЕФТЕПЕРЕРАБАТЫВАЮЩЕГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Н. Г. ГОРБАТЕНКО

(Москва)

Применение экономико-математических методов в планировании нефтеперерабатывающей промышленности имеет давнюю историю. Первые исследования в этой области начались 15—20 лет назад. Материальной основой для этих исследований явилось появление электронно-вычислительных машин. Сейчас в нефтепереработке с помощью экономико-математических методов и ЭВМ могут быть решены самые разнообразные задачи, начиная с тех, которые возникают при проведении технологического процесса на установке, и кончая задачами планирования всей отрасли как составной части топливно-энергетического баланса страны на перспективу. Мы рассмотрим только вопросы, связанные с текущим планированием производства на нефтеперерабатывающем заводе (НПЗ).

Интерес к нефтепереработке и, в частности, к НПЗ не случаен. Дело в том, что при решении задач текущего планирования производства на уровне НПЗ или комплекса заводов наибольшее значение с точки зрения моделирования приобретают такие особенности, как непрерывный характер технологических процессов и наличие в общем случае довольно большой вариантности в выборе технологических способов производства (режимов работы установок и рецептов смешения товарных продуктов). Это позволяет применить хорошо разработанные математические методы, которые не дают целочисленного решения, но обеспечивают выбор оптимального сочетания технологических способов производства.

Опыт показал, что разработкой моделей в наших условиях должны заниматься инженерно-технические работники самих НПЗ под методологическим руководством специалистов в области экономико-математических методов. Это позволяет наилучшим образом сочетать знания технологических особенностей производства с подлинно научной методологией экономико-математического моделирования.

Существует мнение, что процесс разработки модели является в основном интуитивным и что любая система правил в лучшем случае может иметь очень ограниченное применение, в худшем же — быть серьезной помехой. В действительности дело обстоит иначе. При разработке модели не требуется изобретать все заново. Накоплен уже большой опыт, который подтверждает, что в разработке моделей различных НПЗ имеется много общего.

В чем же заключается разработка модели НПЗ? Выделив ряд этапов такой разработки, рассмотрим подробно содержание и значение каждого из них. Хотя такое разделение на этапы условно, оно полезно с точки зрения выявления конкретных задач, стоящих перед исследователем при разработке модели.