Ориентировочный расчет объема продаж телевизоров в СССР на перспективу (в % к 1967 г.)

№ п.п.	Показатели	1970 г.	1975 г.	1980 г.
1	Парк телевизоров на конец года	148	214,8	266,8
2	Прирост парка по сравнению с предыдущим годом	87,2	74,4	53,8
3	Продажа телевизоров на замену устаревших	147,7	214,6	265,8
4	Общий объем продаж телевизоров	93,5	89,1	76,1

еще будут пользоваться спросом. Однако для более или менее точного прогноза необходимо специальное исследование динамики структуры спроса. В ближайшие годы на структуру спроса станут оказывать заметное влияние цветные телевизоры, что также требует специального исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Cournot. Recherches sur les principes mathématiques de la theory des richesses. Paris, 1838.
2. Г. Тинтнер. Введение в эконометрию. М., «Статистика», 1965.
3. О. Ланге. Введение в эконометрику. М., «Прогресс», 1964.
4. D. Möring. Neue Technologien erfordern neue Unternehmenskonzeptionen. Bürotechn. und Automation. 1965, № 7.
5. B. Weblus. Zur langfristigen Absatzprognosen gehobener Gebrauchsgüter. Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 1965, № 9.

Поступила в редакцию
5 IV 1968

О МОДЕЛИРОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИ ЗАВИСИМЫХ РАБОТ В СЕТЕВЫХ МОДЕЛЯХ РАЗРАБОТОК

Ю. Г. ПОЛЛЯК

(Москва)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сложность анализа сетевого плана с вероятностными оценками времени выполнения работ * приводит к необходимости статистического исследования сетевых графиков методом Монте-Карло [2, 3]. При этом естественно возникает задача моделирования случайного вектора $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$, статистически зависимые компоненты ϑ_i которого представляют продолжительности соответствующих работ. Практически оказывается возможным задать лишь одномерные плотности вероятностей $w_\vartheta\ (t_i)$ компонент вектора ϑ и коэффициенты корреляции r_{ij} между компонентами η_i и η_j; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ [3]. Это приводит к неоднозначности при моделировании: может быть построен целый класс векторов ϑ с различными (негауссовыми) плотностями $w_{n,\vartheta}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и одинаковыми *заданными* $w_\vartheta\ (t_i)$ и r_{ij}. Уместно поставить задачу о построении какого-то одного, удобного для моделирования вектора ϑ этого класса [4]. Излагаемый ниже метод решения основан на идеях имитации негауссовых случайных процессов, развитых в [5].

---

* Будем для определенности говорить о временны́х планах, аналогичных системе PERT — Time [1], хотя обсуждаемый подход справедлив и для других видов плана.

2. МЕТОД БЕЗЫНЕРЦИОННЫХ ОДНОМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1°. Рассмотрим нормальный случайных вектор $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, компоненты ν_i которого имеют плотности вероятностей

$$w_{\nu_i}(z_i) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z_i^2/2) \tag{1}$$

и функции распределения

$$F_{\nu_i}(z_i) = \int\limits_{-\infty}^{z_i} (2\pi)^{-1/2} \exp(-z_i^2/2)\, dz_i. \tag{2}$$

Двумерные плотности вероятностей компонент ν_i и ν_j $i, j = 1, 2, \ldots, n$ равны

$$w_2(z_i z_j) = (2\pi)^{-1}(1-\rho_{ij}^2)^{-1/2} \exp\{-[2(1-\rho_{ij}^2)]^{-1}(z_i^2 - 2\rho_{ij}z_iz_j + z_j^2), \tag{3}$$

где ρ_{ij} — неопределенные пока коэффициенты корреляции.

2°. Строим функции

$$\vartheta_i = f_i(\nu_i) = F_{\vartheta_i}^{-1}\{F_{\nu_i}(\nu_i)\}, \tag{4}$$

преобразующие компоненты ν_i в компоненты ϑ_i искомого вектора ϑ с плотностями вероятностей $w_{\vartheta i}(t_i)$ и функциями распределения $F_{\vartheta}{}^i(t_i)$. (Внутреннее преобразование в (4) дает равномерно распределенную на (0,1) величину, внешнее — реализует обычный метод обратной функции [6], преобразующей равномерно распределенную величину в величину с заданным распределением $F_{\vartheta}{}^i(t_i)$. Функция $f_i(\nu_i)$ может быть получена и непосредственно.)

3°. Выражаем заданный коэффициент корреляции r_{ij} между компонентами ϑ_i и ϑ_j формулой

$$r_{ij} = \frac{M\{\vartheta_i\vartheta_j\} - M\{\vartheta_i\}M\{\vartheta_j\}}{\sqrt{D\{\vartheta_i\}D\{\vartheta_j\}}} = \varphi(\rho_{ij}), \tag{5}$$

где

$$M\{\vartheta_i\vartheta_j\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i(z_i)f_j(z_j)w_2(z_iz_j)\,dz_i\,dz_j, \tag{6}$$

$$M\{\vartheta_i\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t_i w_{\vartheta_i}(t_i)\,dt_i, \tag{7}$$

$$D\{\vartheta_i\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t_i^2 w_{\vartheta_i}(t_i)\,dt_i - [M\{\vartheta_i\}]^2. \tag{8}$$

4°. Разрешаем уравнение (5) относительно ρ_{ij} (если это возможно. Жесткость принятой здесь простой схемы преобразования (4) не гарантирует наличия решения).

5°. После того, как операции пп. 2°—4° выполнены для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, моделирование вектора ϑ сводится к имитации нормального вектора ν с найденными по п. 4° коэффициентами корреляции, нулевыми средними и единичными дисперсиями компонент [6] и к вычислению компонент ϑ_i по формуле (4).

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ-НОРМАЛЬНОГО ВЕКТОРА ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ РАБОТ

Задавая в соответствии с рекомендациями [3, стр. 92] логарифмически-нормальные одномерные плотности продолжительности работ ϑ_i

$$w_{\vartheta_i}(t_i) = (2/\pi)^{1/2}(t_i - t_{1i})^{-1} \times \\ \times \exp\{-2[\ln(t_i - t_{1i}) - \ln(t_{2i} - t_{1i}) + 1]^2\}, \tag{9}$$

где t_{1i} и t_{2i} — соответственно ранний (оптимистический) и поздний (пессимистический) сроки окончания работы ϑ_i, можно записать формулы (4) в виде

$$\vartheta_i = t_{1i} + (t_{2i} - t_{1i}) \exp(\nu_i/2 - 1), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Вычисления по формулам (6), (7), (8) дают

$$M\{\vartheta_i\} = t_{1i} + (t_{2i} - t_{1i}) \exp(-{}^7/_8) \cong t_{1i} + 0{,}417(t_{2i} - t_{1i}), \tag{7'}$$

$$D\{\vartheta_i\} = (t_{2i} - t_{1i})^2 \exp(-{}^9/_4)[\exp({}^1/_4) - 1] \cong 0{,}0493(t_{2i} - t_{1i})^2, \tag{8'}$$

$$M\{\vartheta_i\vartheta_j\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[t_{1i} + (t_{2i} - t_{1i})\exp(z_i/2 - 1)][t_{1j} + (t_{2j} - t_{1j})\exp(z_j/2 - 1)] \times$$

$$\times (2\pi)^{-1}(1 - \rho_{ij}^2)^{-1/2} \exp\{-[2(1 - \rho_{ij}^2)]^{-1}(z_i^2 - 2\rho_{ij}z_iz_j + z_j^2)\}dz_idz_j =$$
$$= t_{1i}t_{1j} + 0{,}417t_{1j}(t_{2i} - t_{1i}) + 0{,}417t_{1i}(t_{2j} - t_{1j}) + (0{,}417)^2(t_{2i} - t_{1i})^2 \exp(0{,}25\rho_{ij}). \tag{6'}$$

Поэтому формула (5) записывается в виде

$$r_{ij} \cong 3{,}5[\exp(0{,}25\rho_{ij}) - 1] \tag{5'}$$

и

$$\rho_{ij} \cong 4\ln(0{,}284r_{ij} + 1). \tag{11 *}$$

Наименьшее значение r_{ij}, соответствующее $\rho_{ij} = -1$, равно $-0{,}77 > -1$. Это ограничение естественным образом вытекает из несимметрии нелинейного преобразования (10) и иллюстрирует замечание к п. 4° общего описания метода. (При необходимости имитировать работы ϑ_i и ϑ_j с большой *отрицательной* корреляцией $r_{ij} \approx \approx -1$ можно перейти к имитации *положительно*-коррелированной пары работ ϑ_i, $(\tau_j - \vartheta_j)$, где $\tau_j \gg t_{2j}$.)

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Абрамов, М. И. Мариничев, П. Д. Поляков. Сетевые методы планирования и управления. М., «Сов. радио», 1965.
2. R. M. van Slyke. Monte-Carlo methods and the PERT Problem. Oper. Res., 1963, v. 11, № 5.
3. Д. И. Голенко, Н. А. Левин, В. С. Михельсон, Ч. Г. Найдов-Железов. Автоматизация планирования и управления новыми разработками. Рига, «Звайгзне», 1966.
4. Г. Г. Сванидзе, З. А. Пиранашвили. К методу расчета регулирования речного стока с помощью системы водохранилищ. Сообщ. АН ГрузССР, 1963, т. 30, № 6.
5. З. А. Пиранашвили. Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования непрерывных случайных процессов. В сб. Вопросы исследования операций. Тбилиси. «Мецниереба», 1966.
6. Д. И. Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
4 VII 1967

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Л. П. ПАДАЛКО

(Минск)

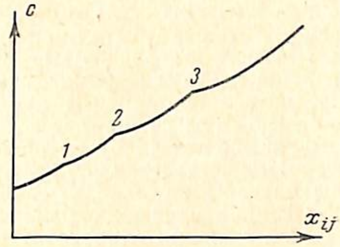
Рассматривается задача построения оптимальной транспортной сети, связывающей пункты производства и пункты потребления однородной продукции.

Предположим, что на пункты производства не наложены ограничения по объему

---

* Заметим в уточнение работы [3], что при малых r_{ij} величина $\rho_{ij} \approx 1{,}136r_{ij} \neq \neq r_{ij}$.

выпускаемой продукции и, кроме того, стоимости производства у всех источников одинаковы. Для потребителей задана величина спроса. Тогда задача формулируется следующим образом: требуется определить значения переменных x_{ij}, которые минимизируют функцию



$$F = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_{ij}) \tag{1}$$

при следующей структуре затрат:

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0, \\ f_{ij}(x_{ij}), & x_{ij} \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь x_{ij} $(i \neq j)$ — величина грузопотока из i-го пункта в j-й. Отметим, что в сети возможны сквозные грузопотоки к потребителям через другие пункты потребления. Дополнительными условиями задачи являются односторонняя направленность грузопотока (если $x_{ij} > 0$, то $x_{ji} = 0$) и возможность истока только от поставщиков $\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 0, \text{ если } j \text{ — поставщик} \right)$. Ограничения задачи таковы:

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = b_j, \tag{4}$$

где b_j — спрос j-го узла. Условие (4) — требование баланса грузопотоков в узлах сети. Функция $f_{ij}(x_{ij})$ является непрерывной и кусочно-выпуклой и имеет следующий вид:

$$f_{ij}(x_{ij}) = d_{ij}^{\nu} + b_{ij}^{\nu} x_{ij}^{2}, \tag{5}$$

где d_{ij} — затраты, не зависящие от объема перевозок, фиксированная доплата: b_{ij} — коэффициент пропорциональности: ν — интервал (ν-й) стандартного типоразмера оборудования. Причем $d_{ij} > 0$, $b_{ij} > 0$ и $d_{ij} / b_{ij} = \text{const}$ для всех коммуникаций при одном и том же ν.

Указанная функция показана на рисунке. Точки *1—3* соответствуют переходу от одного стандартного типоразмера оборудования к другому, причем каждый типоразмер используется в том интервале, где он является экономически наивыгоднейшим.

Сформулированная задача является дискретной [1] и многоэкстремальной [2]. Так как точных методов нахождения глобальных оптимумов таких задач не существует, то для их решения использовались различные приближенные подходы. Если функцию $f_{ij}(x_{ij})$ аппроксимировать линейной или же кусочно-линейной функцией, то можно использовать методы целочисленного линейного программирования [3]. Однако использование частично-целочисленного алгоритма Гомори [4] для задач значительных размеров данного типа оказалось неэффективным [5]. В работе [6] рассматривается приближенный метод, базирующийся на усовершенствовании метода Балинского. Этот метод предполагает линеаризацию функции.

Представляет интерес использование приближенных, специализированных методов, предназначенных для решения конкретных задач и базирующихся на эвристических соображениях. В таком случае задача может быть сформулирована в реальной постановке, без всяких упрощений. Ниже излагается один из таких подходов.

Строим на вершинах, представляющих собой пункты питания и производства, усложненную схему транспортной сети, соответствующую в общем случае полному графу. Найдем величины грузопотоков в такой сети при помощи итерационного приема [7], приближенно минимизирующего *

$$\sum_{i \neq j}^{m} \sum_{j \neq i}^{m} f_{ij}(x_{ij}). \tag{5'}$$

Рассматривая полученное этим способом распределение грузопотоков, будем считать, что величина грузопотока на той или иной ветви сети характеризует сравни-

* Подчеркнем, что мы минимизируем на данном этапе (5′), а не (1), т. е. рассматриваем условную схему, в которой все технически допустимые линии предполагаются построенными.