

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕВОЗОК ГРУЗОВ ПО ЧАСОВЫМ ГРАФИКАМ

Л. В. ЦАРФИН

(Москва)

Рассматривается специфическая задача оптимизации перевозочного процесса на автомобильном транспорте, возникшая в связи с новой технологией жилищного строительства. Особенность задачи состоит в том, что каждый потребитель указывает в заявке не только наименование и объем требуемой продукции, но и время ее доставки в течение суток.

ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Задано: N — пункт расположения автомобилей; I — множество пунктов производства; J — множество пунктов потребления.

Предполагаем, что в пункт потребления i совершается одна поездка автомобиля с грузом. Если же необходимо выполнить f_i , $f_i > 1$, ездки, то i -й пункт разбивается на f_i условных пунктов потребления.

Введем единую нумерацию для всех пунктов производства, потребления и расположения автомобилей. Пусть пункт расположения автомобилей будет иметь номер 0; $[T_i', T_i'']$ — интервал времени доставки груза в точку i , $i \in J$; Q_i — количество груза, необходимое в точке i , $i \in J$; $Z = \|z_{ij}\|$, $i \in I$; $j \in J$; $z_{ij} \in \{0, 1\}$, — нуль-единичная матрица, с помощью которой задаются все ездки автомобилей с грузом. $z_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда задана ездка с грузом из пункта производства i в пункт потребления j . Исходя из приведенного выше предположения: $\sum_{i \in I} z_{ij} = 1$;

$j \in J$; V — количество используемых автомобилей; t_{ij} — кратчайшее время движения из пункта i в пункт j , причем, если $i \in I$, то $j \in J$; если же $i \in I \cup \{0\}$, то $j \in I \cup \{0\}$. Естественно, $t_{00} = 0$; τ_j — время погрузки в пункте i таком, что $z_{ij} = 1$, $i \in I$; $j \in J$; τ_i — время разгрузки в пункте i , $i \in J$; c_{ij} — стоимость пробега автомобиля без груза, если $i \in J \cup \{0\}$; $j \in I \cup \{0\}$; $c_{00} = 0$, или стоимость пробега автомобиля с грузом, если $i \in I$, $j \in J$; $c(y)$ — стоимость простоя автомобиля в течение y единиц времени; $c(0) = 0$.

Маршрутом $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2k-1}, r_{2k}, r_0)$ назовем последовательность точек $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2k-1}, r_{2k}, r_0$, где $r_0 \in \{0\}$, $r_{2i-1} \in I$, $r_{2i} \in J$, $i = 1, \dots, k$.

Каждому маршруту соответствует движение автомобиля из автохозяйства r_0 в пункт производства r_1 , из него в пункт потребления r_2 , затем в очередной пункт производства и т. д. с возвратом из пункта потребления r_{2k} в автохозяйство r_0 ; k определяет звенность маршрута.

Допустимым будем считать маршрут, удовлетворяющий условиям

$$T_{r_{2i+2}}' - h \leq T_{r_{2i}} + (t_{r_{2i} \rightarrow r_{2i+1}} + t_{r_{2i+1} \rightarrow r_{2i+2}} + \bar{c}_{r_{2i+2}} + \tau_{r_{2i}}) \leq T_{r_{2i+2}}'' \quad (1)$$

$$i = 0, \dots, k-1,$$

где $T_{\tau_{2i}}$ — фактическое время прибытия в точку r_{2i} , если $i \neq 0$; или время выезда из автохозяйства, если $i = 0$; h — величина допустимого простоя в случае прибытия автомобиля в точку r_{2i+2} ранее момента $T'_{\tau_{2i+2}}$

$$\max(T_{\tau_{2h}} T_{\tau_{2h}}) + \tau_{\tau_{2h}} + t_{\tau_{2h} \tau_0} - T_{\tau_0} \leq T, \quad (2)$$

где T — максимальная продолжительность рабочей смены водителя,

$$k \leq k_{\max}, \quad (3)$$

где $k_{\max}$ — максимальная звенность маршрута.

Требуется построить систему допустимых маршрутов $\{R_j\}$, обеспечивающую точное выполнение плана перевозок и минимизирующую суммарные транспортные издержки $\sum_j c_j$; c_j — затраты на выполнение маршрута R_j

$$c_j = \sum_{i=0}^{2h} c_{\tau_i \tau_{i+1}}^{(j)} + c \left(\sum_{i=1}^h [\max(T'_{\tau_{2i}}^{(j)}, T_{\tau_{2i}}^{(j)}) - T_{\tau_{2i}}^{(j)}] \right)^*.$$

Будем считать, что $r_{2h+1} = r_0$.

Поскольку суммарные затраты на выполнение автомобилями ездки с грузом предопределены, эти составляющие затрат c_j в дальнейшем рассматриваться не будут. Тогда c_j определяется

$$c_j = \sum_{i=0}^h c_{\tau_{2i} \tau_{2i+1}}^{(j)} + c \left(\sum_{i=1}^h [\max(T'_{\tau_{2i}}^{(j)}, T_{\tau_{2i}}^{(j)}) - T_{\tau_{2i}}^{(j)}] \right), \quad (4)$$

$$r_{2h+1} = r_0.$$

ДРУГИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим модель, представляющую собой начальный этап разработки методов решения описанной задачи**. Модель отражает частный случай вырождения интервала времени доставки груза $[T'_i, T''_i]$ в момент времени T_i , т. е. случай, когда $T_i = T'_i = T''_i$.

Обозначим через: a_i — количество автомобилей, освобождающихся в пункте i , $i \in J \cup \{0\}$ (a_0 — количество автомобилей в автохозяйстве, выделенных для перевозок); b_j — количество автомобилей, требующихся в пункте j , $j \in J \cup \{0\}$ (b_0 — количество автомобилей, возвращающихся в автохозяйство после выполнения перевозок); x_{ij} — количество автомобилей, направленных из пункта i в пункт j ; $i, j \in J \cup \{0\}$.

Задача может быть сформулирована как транспортная линейного программирования

$$\sum_{j \in J \cup \{0\}} x_{ij} = a_i, \quad i \in J \cup \{0\}; \quad a_i = \begin{cases} V, & i = 0, \\ 1, & i \neq 0. \end{cases}$$

* Здесь и в дальнейшем добавления к введенным ранее обозначениям верхнего индекса j указывают на то, что используемая в них нумерация пунктов относится к маршруту R_j .

** Модель предложена Т. М. Великановой.

Количество автомобилей, выходящих из пункта i , должно быть равно a_i

$$\sum_{i \in J \cup \{0\}} x_{ij} = b_j, \quad j \in J \cup \{0\}; \quad b_j = \begin{cases} V, & j = 0, \\ 1, & j \neq 0. \end{cases}$$

Количество автомобилей, прибывающих в пункт j , должно равняться b_j

$$x_{ij} \geq 0, \quad L = \sum_{i \in J \cup \{0\}} \sum_{j \in J \cup \{0\}} \bar{c}_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

Здесь

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} 0, & i, j = 0, \\ c_{0j}, & i = 0, \\ c_{i0}, & j = 0, \\ c_{ip} + c(y), & y \geq 0 \text{ и } i, j \neq 0, \\ M, & y < 0 \text{ и } i, j \neq 0, \end{cases}$$

где p удовлетворяет условию $z_{pj} = 1$, $p \in I$, $j \in J$, и $y = T_j - (T_i + \tau_i + \bar{\tau}_j + t_{ip} + t_{pj})$.

После решения транспортной задачи значение x_{00} покажет число неиспользованных автомобилей, а количество x_{0j} , равных единице, — число полученных маршрутов.

Для построения маршрута нужно запомнить такое j , чтобы $x_{0j} = 1$; такое l , чтобы $x_{jl} = 1$ и т. д. до тех пор, пока не встретится элемент $x_{i0} = 1$.

Преимуществом модели является ее простота и возможность реализации на существующих ЭВМ. Однако нет никакой гарантии, что все маршруты будут допустимыми — ограничения (2), (3) в модели не учитываются. Маршруты строятся уже после решения транспортной задачи и некоторые из них могут быть либо слишком продолжительными, либо состоящими из числа звеньев, больше максимального. Эти недостатки и то, что модель отражает лишь частный случай, когда $T_i = T'_i = T''_i$, существенно ограничивают сферу ее применения.

Рассмотрим другую модель.

Пусть $H = \{R_j\}$ — множество заранее построенных допустимых маршрутов. Каждому маршруту поставим в соответствие вектор $\bar{R}_j$ размерности $|J|$ так, что i -я компонента $\bar{R}_{ij}$ этого вектора, $i \in J$, удовлетворяет условию $\bar{R}_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда маршрут R_j включает в себя точку i .

Следует найти план выбора подмножества множества маршрутов H , т. е. совокупность переменных $\{x_j\}$ таких, что $x_j \in \{0, 1\}$. Причем

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } R_j \text{ включен в оптимальный план,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача сводится к целочисленной задаче линейного программирования с нуль-единичными переменными: $\sum_j x_j \bar{R}_{ij} = 1$, $i \in J$ — груз должен

быть доставлен во все пункты потребления; $\sum_j x_j \leq V$ — количество

маршрутов не должно превышать числа имеющихся автомобилей

$$L = \sum_j c_j x_j \rightarrow \min. \text{ Величина } c_j \text{ определяется по (4).}$$

Описанная модель полностью отражает постановку задачи. Более того, она дает возможность учесть самые разнообразные ограничения, налагаемые на маршруты. К сожалению, в настоящее время нет эффективных способов решения целочисленной задачи больших размеров (на практике $|J| = 300-400$ и более).

ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Учитывая недостатки рассмотренных моделей, возникает два возможных пути дальнейших исследований в решении этой задачи: 1) создание специальных методов решения целочисленных задач с нуль-единичными переменными, в которых бы учитывались как большое число переменных, так и разреженность исходной матрицы ограничений; 2) поиск методов решения, близкого к оптимальному, на основе более ограниченного перебора.

Одним из них является модификация алгоритма Кларка — Райта.

Вначале строится наихудший план, который затем улучшается до определенного предела. Наихудшим считается такой план, который включает в себя систему однозвенных маршрутов $\{R_j\}$, $R_j = (r_0, r_1, r_2, r_0)$.

Затраты на реализацию множества маршрутов $\{R_j\}$ равна

$$c^{(0)} = \sum_j c_{r_0 r_1}^{(j)} + \sum_j c_{r_2 r_0}^{(j)}.$$

Улучшение плана ведется на основе максимальной оценки путем объединения маршрутов и получения таким образом новых с большим числом звеньев. Все оценки вычисляются заранее по формуле: $d_{ij} = c_{r_0 r_1} + c_{r_2 r_0} - c_{r_j r_j} - c(y)$, где r_i — последняя из точек маршрута R_i такая, что $r_i \in J$; r_j — первая из точек маршрута R_j такая, что $r_j \in I$; $c(y)$ — стоимость простоя.

Действительно, объединенные в один маршрут R_i и R_j не требуют затрат на подачу одного автомобиля в пункт r_j , возврата другого автомобиля из пункта r_i . Зато возникают затраты на пробег автомобиля без груза из пункта r_i в пункт r_j . Суммарные затраты в результате такого объединения маршрутов станут $c^{(h)} = c^{(h-1)} - d_{ij}$.

Поскольку алгоритм как бы «следит» за изменением маршрутов, то всегда можно добиться условия их допустимости.

Метод обладает большой простотой, дает возможность учесть множество различных ограничений. При использовании ЭВМ с его помощью можно решать задачи большой размерности за приемлемое для оперативного планирования время.

По данному алгоритму написана программа на языке АЛГОЛ-60. Расчеты, проведенные на ЭВМ «БЭСМ-3М» для решения практических задач (в частности, задачи доставки грузов по монтажным графикам), показали большую перспективность метода.

Поступила в редакцию
5 I 1970

* Здесь и в дальнейшем верхний индекс суммарных затрат c означает номер итерации.