ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1971
том VII, вып. 2

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕРА НАБОРА ЗАПАСНЫХ ЧАСТЕЙ

Ю. И. РЫЖИКОВ

(Ленинград)

Одной из важнейших проблем теории эксплуатации технических систем является задача рационального комплектования ЗИП (набора запасных частей и принадлежностей). Сложность ее состоит в отыскании наивыгоднейшего компромисса между противоречивыми требованиями экономии на запасах и надежного обеспечения потребителей.

Наиболее перспективным подходом к расчету ЗИП следует признать методы теории управления запасами [1, 2].

Например, если на срок T создается невосполняемый запас y, то ожидаемые затраты за период, как показано в [1], могут быть подсчитаны согласно

$$L_T(y) = s_T \sum_{x=0}^{y} (y-x)P_x + p_T \sum_{x=y+1}^{\infty} (x-y)P_x + c(y-z), \tag{1}$$

где x — случайны спрос за период; z — начальный запас; y — планируемый запас, $y \geqslant z$; P_x — вероятность спроса x за период, $x = 0, 1, \ldots$; s_T, p_T, c — соответственно цена хранения (недостачи, поставки) единицы запаса.

Эти затраты минимальны при выборе $y = y^*$, отвечающего условию

$$\sum_{x=0}^{y-1} P_x \leqslant \frac{p_T - c}{p_T + s_T} \leqslant \sum_{x=0}^{y} P_x. \tag{2}$$

Если ЗИП восстанавливается хотя бы частично, необходимо это учесть. Практическая важность такой постановки следует из того, что восстановлению подвергаются наиболее дорогостоящие элементы техники, запас которых следует планировать особенно тщательно. Целью настоящей работы является получение соотношений типа (2) для ЗИП с восстановлением. В качестве основного расчетного аппарата используется теория массового обслуживания.

1. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАПАСА ПРИ ПОЛНОСТЬЮ ВОССТАНАВЛИВАЕМОМ ЗИП

Будем считать, что «штраф» за недостачу ЗИП пропорционален среднему числу потребителей, простаивающих в единицу времени. Очевидно, вложенные в ЗИП средства омертвлены независимо от того, исправны ли элементы ЗИП или находятся в ремонте. Таким образом, функция затрат в единицу времени принимает вид

$$L(y) = sy + p \sum_{x=y+1} (x-y)P_x, \tag{3}$$

где s и p определяются как цены хранения и штрафа в единицу времени, а P_x — стационарная вероятность снижения запаса относительно максимума на величину x, $x = 0, 1, \ldots$.

Заменим в (3) y на $y+1$. Можно показать, что

$$L(y+1) = s(y+1) + p\sum_{x=y+1}^{\infty}(x-y)P_x - p\sum_{x=y+1}^{\infty}P_x. \tag{4}$$

Аналогичное соотношение может быть записано и для $L(y-1)$. Очевидным условием оптимальности запаса y^* является одновременное выполнение неравенств

$$L(y^*+1) - L(y^*) \geqslant 0,$$
$$L(y^*-1) - L(y^*) \geqslant 0,$$

которые с помощью (4) преобразуются в

$$s - p\sum_{x=y^*+1}^{\infty}P_x \geqslant 0,$$

$$p\sum_{x=y^*}^{\infty}P_x - s \geqslant 0.$$

Следовательно, искомое условие имеет вид

$$\sum_{x=y^*+1}^{\infty}P_x \leqslant \frac{s}{p} \leqslant \sum_{x=y^*}^{\infty}P_x. \tag{5}$$

Неравенства (5) были получены безотносительно к организации ремонта и характеристикам потока заявок и в этом смысле являются универсальными.

Конкретный вид распределения $\{P_x\}$ существенно зависит от организации ремонта и может быть получен известными методами теории массового обслуживания. Мы ограничимся исследованием однолинейной пуассоновской системы, для которой окончательные результаты удается получить в явном виде.

Известно [3], что при пуассоновском потоке отказов интенсивности μ и экспоненциально (со средним $1/\lambda$) распределенном времени восстановления вероятности состояний $\{P_x\}$ определяются согласно

$$P_0 = 1 - \mu/\lambda,$$

$$P_x = P_0(\mu/\lambda)^x, \qquad x = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Следовательно,

$$\sum_{x=y}^{\infty}P_x = P_0\sum_{x=y}^{\infty}(\mu/\lambda)^x = P_0\frac{(\mu/\lambda)^y}{1-\mu/\lambda} = (\mu/\lambda)^y,$$

и (5) может быть представлено в виде

$$(\mu/\lambda)^{y^*+1} \leqslant s/p \leqslant (\mu/\lambda)^{y^*}.$$

Логарифмируя члены этого неравенства, с учетом естественного условия $\mu/\lambda < 1$ получаем

$$(y^*+1)\ln(\mu/\lambda) \geqslant \ln(s/p) \geqslant y^*\ln(\mu/\lambda),$$

откуда y^* определяется как целая часть

$$\tilde{y} = \frac{\ln(p/s)}{\ln(\lambda/\mu)} \tag{7}$$

(здесь в числителе и знаменателе взяты обратные отношения, чтобы иметь дело с логарифмами чисел, больших единицы).

Поскольку в (7) фигурирует отношение логарифмов, натуральные логарифмы могут быть заменены десятичными. Оптимальный y^*, подсчитанный согласно (7), является медленно меняющейся функцией упомянутых отношений, что позволяет ограничиться приближенным определением исходных параметров p, s, λ, μ.

Найдем более удобное выражение для функции затрат. Очевидно,

$$\sum_{x=y+1}^{\infty}(x-y)P_x = P_0\sum_{x=y+1}^{\infty} x\nu^x - yP_0\sum_{x=y+1}^{\infty}\nu^x,$$

где $\nu = \mu/\lambda$. Применяя формулу суммы членов арифметико-геометрической прогрессии [4], имеем для первой суммы выражение

$$S_1 = P_0\frac{\nu^{y+1}}{1-\nu}\left(y+1+\frac{\nu}{1-\nu}\right).$$

Вторая сумма — обычная геометрическая прогрессия

$$S_2 = P_0\frac{\nu^{y+1}}{1-\nu}y.$$

Алгебраически сложив эти результаты, получаем

$$S_1 - S_2 = P_0\frac{\nu^{y+1}}{(1-\nu)^2}.$$

Наконец, подставляя значение P_0 из (6), имеем для функции затрат

$$L(y) = sy + p\frac{(\mu/\lambda)^{y+1}}{1-\mu/\lambda}.$$

Пример. Предположим, требуется оценить экономичность оборотного запаса $y = 10$ штук восстанавливаемых узлов авиационного двигателя при стоимости детали 600 руб., среднем времени восстановления $1/\lambda = 12$ дней и интенсивности потока отказов $\mu = 0{,}02$ в день. Стоимость хранения в теории запасов принято определять как 20—25% полной стоимости детали в год. Примем $s = 150$ руб. В [5] «штраф» за простой самолета определен как стоимость аренды нового в сумме 1000 долл. в день, или 365 тыс. долл. в год. Примем $p = 350$ тыс. руб. Тогда годовые ожидаемые затраты при плановом запасе 10 штук

$$L(10) = 150\cdot 10 + 350\cdot 10^3\frac{(0{,}02\cdot 12)^{11}}{1-0{,}02\cdot 12} =$$

$$= 1500 + 0{,}35\cdot 10^6\frac{1{,}52\cdot 10^{-7}}{0{,}76} = 1500{,}07 \text{ руб.}$$

При этих же данных оптимальный ЗИП составит целую часть

$$\tilde{y} = \frac{\lg(350\cdot 10^3/150)}{\lg(0{,}0833/0{,}02)} = \frac{\lg 2330}{\lg 4{,}16} = \frac{3{,}367}{0{,}620} = 5{,}44,$$

т. е. 5 штук. Ожидаемые затраты

$$L(5) = 150\cdot 5 + 350\cdot 10^3 \frac{(0{,}02\cdot 12)^6}{1-0{,}02\cdot 12} =$$

$$= 750 + 0{,}35\cdot 10^6 \frac{1{,}91\cdot 10^{-4}}{0{,}76} = 750 + 88 = 838 \text{ руб.},$$

т. е. в 1,79 раза меньше. Заметим, что дальнейшее снижение запаса на единицу приведет к экономии на запасах 150 руб. при увеличении суммы штрафов с 88 до 367 руб., т. е. оказывается невыгодным.

2. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО ЗИП ПО МИНИМУМУ ЗАТРАТ ЗА ВРЕМЯ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Выше минимизация затрат проводилась в единицу времени (год). При малом сроке службы техники приходится принимать в расчет и начальные затраты. Критерием, наиболее обоснованным с экономических позиций, является взвешенная сумма затрат за весь срок эксплуатации

$$L_\Sigma = \sum_{k=0}^{N} \alpha^k L_k, \tag{8}$$

где L_0 — затраты на создание ЗИП; L_k — затраты в последующие годы эксплуатации, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Коэффициент α — так называемый «дисконт-фактор», учитывающий экономическую выгоду от рассрочки платежей и равный единице минус нормативная эффективность капиталовложений. Практически α лежит в пределах 0,85—0,90. При таком подходе все затраты приводятся к начальному моменту времени.

Представим L_0 в виде

$$L_0 = b + cy, \tag{9}$$

где составляющая b не зависит от объема заказываемого ЗИП, и примем $L_1 = L_2 = \ldots = L_N = L(y)$. Тогда

$$L_\Sigma = L_0 + L \sum_{k=1}^{N} \alpha^k. \tag{10}$$

Развернув L_0 и L согласно (9) и (3), убеждаемся, что

$$L_\Sigma(y) = b + cy + \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha^N)\left(sy + p\sum_{x=y+1}^{\infty} P_x\right). \tag{11}$$

При выборе оптимального объема ЗИП составляющая b может не приниматься во внимание.

Введем подстановки

$$\tilde{s} = c + \frac{\alpha s}{1-\alpha}(1-\alpha^N),$$

$$\tilde{p} = \frac{\alpha p}{1-\alpha}(1-\alpha^N).$$

Теперь функция затрат (11) может быть записана аналогично (3) с заменой s на $\tilde{s}$ и p на $\tilde{p}$. Следовательно, для ее минимизации вновь может быть использована формула (7) с теми же подстановками.

Пример. Оценим изменение оптимального запаса для исходных данных примера, разобранного в п. 2, при $\alpha = 0{,}9$, $N = 7$ и $c = 600$ (полная стоимость детали). В этом случае

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha^N) = \frac{0{,}9}{0{,}1}(1-0{,}9^7) = 4{,}3,$$

так что $\tilde{s} = 600 + 4{,}3 \cdot 150 = 1245$ *руб.*; $\tilde{p} = 350 \cdot 10^3 \cdot 4{,}3 = 1{,}505 \cdot 10^6$ *руб.*

Вновь обращаясь к (7), имеем

$$\tilde{y} = \frac{\lg(1{,}505 \cdot 10^6/1245)}{\lg(0{,}0833/0{,}02)} = \frac{\lg 1210}{\lg 4{,}16} = \frac{3{,}082}{0{,}620} = 4{,}97,$$

так что оптимальный запас должен быть снижен до четырех единиц.

3. ПЛАНИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНО ВОССТАНАВЛИВАЕМОГО ЗИП

Отказы, наблюдаемые в сложной технике, по условиям восстановления элементов, можно разбить на три группы: а) восстановление в порядке рекламаций, б) восстановление в условиях эксплуатации, в) восстановление невозможно.

Обозначим интенсивности соответствующих отказов через μ_p, μ_b и μ_H, а восстановлений — через λ_p и λ_b. Тогда стационарные вероятности распределения числа элементов в системе рекламаций $\{P_x\}$ и ремонта $\{B_x\}$ могут быть получены по формулам, аналогичным (6). Стационарное распределение числа элементов, находящихся в системе восстановления в целом, может быть получено в результате свертки

$$R_x = \sum_{k=0}^{x} P_k B_{x-k}, \qquad x = 0, 1, \ldots . \tag{12}$$

Для пуассоновских однолинейных систем

$$R_x = P_0 B_0 \sum_{k=0} \left(\frac{\mu_p}{\lambda_p}\right)\left(\frac{\mu_b}{\lambda_b}\right)^{x-k} = P_0 B_0 \left(\frac{\mu_b}{\lambda_b}\right)^x \sum_{k=0}^{x} \left(\frac{\mu_p \lambda_b}{\lambda_p \mu_b}\right)^k . \tag{13}$$

Распределение числа недостающих элементов может быть получено сверткой распределения $\{R_x\}$ с пуассоновским

$$H_x(T) = \frac{(\mu_H T)^x}{x!} e^{-\mu_H T}, \tag{14}$$

так что распределение окончательного снижения запаса имеет вид

$$W_x(T) = \sum_{k=0}^{x} R_k H_{x-k}(T), \qquad x = 0, 1, \ldots . \tag{15}$$

Все указанные свертки без труда могут быть выполнены на ЭВМ.

Получим функцию затрат. Естественно определить сумму штрафов пропорционально ожидаемому числу недостач к концу периода. Плату за хранение следует исчислять по остатку, включая в него элементы, находящиеся в системе восстановления. Следовательно, общие затраты

$$L_T(y) = c(y-z) + s_T \sum_{x=0}^{y-1} (y-x) H_x(T) + p_T \sum_{x=y+1}^{\infty} (x-y) W_x(T). \tag{16}$$

Применив условия оптимальности типа указанных в п. 1, можно показать, что для оптимального запаса y^* должны выполняться неравенства

$$
\begin{gathered}
c+s_T\sum_{x=0}^{y^*}H_x(T)-p_T\sum_{x=y^*+1}^{\infty}W_x(T)\geqslant 0,\\
-p_T\sum_{x=y^*}^{\infty}W_x(T)+s_T\sum_{x=0}^{y^*-1}H_x(T)+c\leqslant 0.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Очевиден способ расчета y^*: задавшись $y_0=1$ и последовательно увеличивая его, вычисляем левую часть второго неравенства (17). Первый же y, для которого результат окажется положительным, и будет оптимальным.

Таким образом, сочетание подхода теории управления запасами с методами теории массового обслуживания позволяет эффективно решать задачи о восстанавливаемом ЗИП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Рыжиков. Управление запасами. М., «Наука», 1969.
2. Дж. Букан, Э. Кенигсберг. Научное управление запасами. М., «Наука», 1967.
3. В. Я. Розенберг, А. И. Прохоров. Что такое теория массового обслуживания, М., «Сов. радио», 1962.
4. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
5. H. W. Karr. A method of estimating spare-part essentuality. Naval Research Logistics Quarterly, 1958, v. 5, N 1.

Поступила в редакцию
21 IV 1969