

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

А. С. КОРХИН

(Днепропетровск)

Предлагаемый способ построения динамических моделей производственных процессов, основанный на связи некоторых идей теории автоматического регулирования (ТАР) и теории вероятностей, позволяет составить дифференциальные уравнения для производственного процесса.

Идеи ТАР для моделирования предприятий, анализа систем управления ими и разработки алгоритмов управления применялись в [1—3]. В [1, 2] даются такие фундаментальные понятия ТАР, как обратная связь, самонастройка и т. д., а производственный процесс описывается методами, приведенными в [4]. В [3] предприятие рассматривается как детерминированная система автоматического регулирования. Основное внимание здесь обращено на выбор законов и критериев управления, анализ качества управления предприятием с привлечением понятий ТАР, а не на математическое описание производственного процесса (рассматриваются линейные уравнения), которое сильно упрощено; определение коэффициента усиления и длительности переходного процесса отлично от нашего.

Метод описания производственных процессов, излагаемый в статье, позволит учесть все основные черты производства: нелинейность, ограничения, накладываемые на емкость складов полуфабрикатов, производительность и т. д. Кроме того, дается способ вычисления коэффициентов уравнений динамической модели производственного процесса по статистическим данным.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Станки* в цехе (предприятии) можно условно объединить в производственный комплекс (ПК), назначением которого является выпуск продукции с определенными характеристиками. Такой комплекс имеет один или несколько основных станков одного и того же типа и закрепленный за ними ряд вспомогательных станков**.

ПК часто и организационно выделяется в структуре завода или цеха как отдельный участок. Все виды его делятся на два основных в соответствии с характером производственного потока [5]: простой, состоящий из одного основного станка, и комбинированный — из двух и более основных станков одного и того же типа.

* Станками мы будем называть оборудование, на котором обработка каждой последующей единицы продукции может начаться после окончания обработки предыдущей единицы продукции.

** Основные станки — оборудование, производительность которого определяет производительность ПК.

ПРОСТОЙ ПК

1. Простой ПК, как и комбинированный, можно представить в виде совокупности склада полуфабрикатов (входного склада) и станков. Будем для определенности считать, что простой ПК содержит только по одному станку каждого типа и производство осуществляется по одной линии (рис. 1). Несколько станков одного и того же типа всегда можно рассматривать как один станок с соответственно увеличенной производительностью.

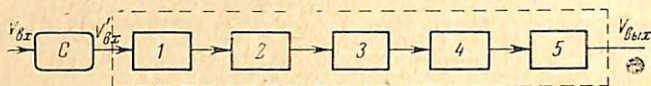


Рис. 1. С — склад, 1—5 — станки

Таким образом, простой ПК производит изделия только по одному маршруту: в каждый момент времени в него входят и из него выходят только одноименные изделия в отличие от комбинированного, где одновременно могут обрабатываться изделия различных наименований.

2. Производительность P (назовем ее планируемой) простого ПК определяется пропускной способностью основного станка: $P = g / \tau_t$, где g — объем изделий, обрабатываемых за цикл производственного процесса; τ_t — длительность такта, $\tau_t = \tau - q$, где τ — длительность производственного цикла; q — длительность перекрытия.

Рассмотрим график запуска в производство изделий $V_{вх}'(t)$ (рис. 2). Аналогичный вид имеет и график выпуска изделий $V_{вых}(t)$, являющийся выходом ПК. В том случае, когда ступенчатую функцию $V_{вх}'(t)$ можно заменить непрерывной, запишем

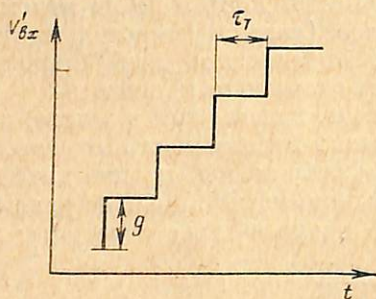


Рис. 2

$$V_{вх}'(t) = \int_0^t P' dt, \quad (1)$$

где $P'(t)$ — скорость запуска изделий в производство (входная производительность).

Запись (1), как и все дальнейшее изложение, справедлива при

$$\tau_t \ll T, \quad g \ll G, \quad (2)$$

где T — длительность отрезка моделирования; G — объем выпущенной продукции за время моделирования.

Входом ПК $V_{вх}$ является график поставок полуфабрикатов, объем поставок на складе: $V(t) = V_{вх}(t) - V_{вх}'(t)$. Входная производительность определяется в зависимости от объема склада: $P' = Ph$, где

$$h = h(V) = \begin{cases} 1, & V \geq g, \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0 < V < g, \frac{dV}{dt} < 0, \\ 0 \leq V < g, \frac{dV}{dt} > 0. \end{array} \right. \end{cases} \quad (3)$$

Вид (3) объясняется дискретностью производственного процесса: пока объем склада не достигнет величины g , полуфабрикаты не могут быть запущены в производство.

В связи с тем, что G и τ_r — случайные величины, P является случайной функцией времени. Случайный характер τ_r и G объясняется их отклонениями от планируемых значений под действием неконтролируемых факторов (случайных простоев и т. д.). Следует отметить, что вполне правомерна такая модель производственного процесса, когда можно рассматривать величины τ_r , G и, следовательно, P — как детерминированные величины, а τ — как случайную. Это возможно, когда $\tau_r \ll \tau$.

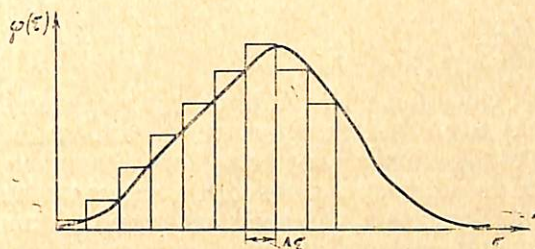


Рис. 3

Установим зависимость между выходом ПК и графиком запуска при условии, что известна плотность распределения длительности цикла производственного процесса $\varphi(\tau)$ (рис. 3). Разобьем интервал изменения τ на r отрезков величиной $\Delta\tau$. Если длительность цикла заключена в пределах $(i-1)\Delta\tau \leq \tau \leq i\Delta\tau$, то $\tau_i = i\Delta\tau$, $i = 1, \dots, r$. Запишем выражение, связывающее график запуска изделий со средним значением выхода ПК, которое будем называть просто выходом

$$V_{\text{вых}}(t) \cong k \sum_{i=1}^r V_{\text{вх}}'(t - i\Delta\tau) \varphi(i\Delta\tau) \Delta\tau,$$

где k — величина, обратная расходу коэффициенту, определяется только отходами производства, $k \leq 1$.

Переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, окончательно получим

$$V_{\text{вых}}(t) = k \int_0^t V_{\text{вх}}'(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Интегралом (4) в теории автоматического регулирования описывается связь входной величины с выходной для динамических систем. Поэтому плотность распределения можно рассматривать как импульсную переходную функцию динамической системы — производственного процесса

$$\varphi(t) = \int_0^t V_{\text{вх}}'(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$$

при $V_{\text{вх}}'(t - \tau) = \delta(t - \tau)$, где $\delta(t - \tau)$ — дельта-функция, или функция Дирака.

Преобразуя по Лапласу обе части (1) и (4) при нулевых начальных условиях, получим

$$\tilde{V}_{\text{вх}}'(s) = \frac{1}{s} \tilde{P}'(s), \quad (5)$$

$$\tilde{V}_{\text{вых}}(s) = W_{\text{п.п.}}(s) \tilde{V}_{\text{вх}}'(s), \quad (6)$$

где s — комплексная переменная.

$$\begin{aligned} L\{k\varphi(t)\} &= W_{nn}(s), \\ L\{P'(t)\} &= \bar{P}'(s), \quad L\{V_{\text{вх}}'(t)\} = \bar{V}_{\text{вх}}'(s), \\ L\{V_{\text{вых}}(t)\} &= \bar{V}_{\text{вых}}(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Символ $L\{f(t)\}$ означает изображение по Лапласу функции $f(t)$:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Выражение (6), связывающее график запуска изделий (вход производственного процесса) и его выход, аналогично записям в ТАР в изображениях по Лапласу связи между входом и выходом динамической системы. Тогда изображение по Лапласу плотности распределения $\varphi(\tau)$, умноженное на k , можно рассматривать как передаточную функцию; назовем ее передаточной функцией производственного процесса.

Далее будем рассматривать такие производственные процессы, для которых $W_{nn}(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию от s .

Рассмотрим случай, когда вход $V_{\text{вх}}'(t)$ представляет собой единичную ступенчатую функцию, т. е.

$$V_{\text{вх}}'(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда $\bar{V}_{\text{вх}}'(s) = 1/s$, $\bar{V}_{\text{вых}}(s) = W_{nn}(s)1/s$.

Реакция системы на единичную функцию времени называется переходной функцией системы $H(t)$. Таким образом, $\bar{H}(s) = \bar{V}_{\text{вых}}(s)$ при $V_{\text{вх}}'(t) = 1(t)$. Изображение по Лапласу функции распределения длительности производственного цикла $\bar{F}(s) = 1/k s W_{nn}(s)$. Следовательно, ее можно рассматривать как переходную функцию производственного процесса ПК, измененную в $1/k$ раз. В связи с тем, что $H(t) = kF(t)$ — монотонная, то полюсы $W_{nn}(s)$ должны быть вещественными (различными или кратными) и лежать в левой полуплоскости [6]. Наличие нулей у $W_{nn}(s)$ ведет к перерегулированию, т. е. $H(t)$ может быть немонотонной. Поэтому мы будем рассматривать передаточную функцию производственного процесса вида

$$W_{nn} = \frac{k}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + 1}. \quad (8)$$

Система уравнений в операторной форме, описывающая простой ПК, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= P(t) h[V(t)], \\ V_{\text{вх}}'(t) &= \frac{1}{D} P'(t), \\ V(t) &= V_{\text{вх}}(t) - V_{\text{вх}}'(t), \\ V_{\text{вых}}(t) &= W_{nn}(D) V_{\text{вх}}'(t), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $D = d/dt$ — символ дифференцирования.

Передаточная функция $W_{nn}(D)$ в операторной форме образуется из передаточной функции в форме преобразования Лапласа заменой $s \rightarrow D$.

На основании (9) можно построить структурную схему ПК аналогично тому, как это делается для систем автоматического управления (рис. 4). Нелинейная часть ПК характеризует динамику входного склада; линейная часть, имеющая передаточную функцию $W_{\text{ПК}}(s) = \bar{H}(s) = 1/s W_{nn}(s)$.

характеризует свойства собственно процесса производства. Величины $V_{вх}$ и P являются управлениями для ПК. ПК можно рассматривать (рис. 4) как своеобразную следящую систему автоматического регулирования, так как имеется обратная связь по количеству изделий, запущенных в производство. Отличие структурной схемы (рис. 4) от обычной структурной схемы следящей системы заключается в том, что сигнал обратной связи подается не с выхода объекта, а с промежуточного звена. Однако это не имеет

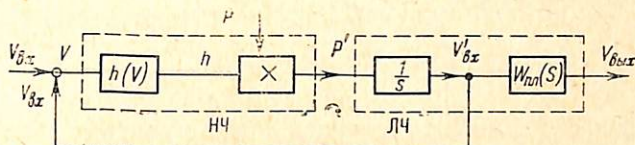


Рис. 4

принципиального значения, так как и в данном случае выход ПК следует за входом $V_{вх}$. В технике встречаются подобные типы следящих систем, у которых сигнал обратной связи снимается не с выхода объекта, например системы управления электроприводами некоторых прокатных станов. Рассмотрим далее способ вычисления коэффициентов передаточной функции $W_{nn}(s)$.

3. Пусть для каждого из станков, входящих в ПК, известна плотность распределения длительности цикла $\varphi_i(\tau)$, $i = 1, \dots, v$. Для длительности цикла ПК имеем

$$\tau = \sum_{i=1}^v \tau_i.$$

Под τ_i , таким образом, понимается суммарное время обработки и длительности пролеживания на складе перед станком.

Докажем следующее утверждение: передаточная функция производственного процесса комплекса равна произведению передаточных функций производственных процессов каждого станка. Согласно [7], сумме независимых случайных величин соответствует произведение изображений плотностей их распределений

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^v \varphi_i(s). \quad (10)$$

Учитывая, что $k = \prod_{i=1}^v k_i$, где k_i — величина, обратная расходу ко-
эффициенту для i -го станка, получим из (7) и (10)

$$W_{nn} = \prod_{i=1}^v W_i(s). \quad (11)$$

Из (10) вытекает

$$M\{\tau\} = \sum_{i=1}^v M\{\tau_i\}, \quad (12)$$

$$\sigma^2\{\tau\} = \sum_{i=1}^v \sigma^2\{\tau_i\}, \quad (13)$$

где $M\{\tau_i\}$ — математическое ожидание τ_i , $\sigma^2\{\tau_i\}$ — дисперсия τ_i . Выражение (11) облегчает вычисление коэффициентов $W_{nn}(s)$, так как часто проще экспериментально или теоретически установить законы распределения длительности цикла для каждого станка.

Выведем формулы для вычисления коэффициентов передаточных функций производственных процессов, длительности цикла которых описываются некоторыми наиболее распространенными законами распределения.

Экспоненциальный закон. $\varphi(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$,

$$\varphi(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad W_{nn}(s) = \frac{k}{(1/\lambda s + 1)}.$$

Назовем дифференциальным уравнением производственного процесса уравнение, которому соответствует дифференциальный оператор $W_{nn}(D)$.

Имеем

$$T(dV_{\text{вых}}/dt) + V_{\text{вых}} = kV_{\text{вх}}',$$

где $T = 1/\lambda$ — постоянная времени.

Таким образом, производственный процесс, длительность цикла которого подчиняется экспоненциальному закону, можно рассматривать как аperiodическое звено. Для такого звена известно, что длительность переходного процесса (времени, когда $V_{\text{вых}}$ достигает установившегося значения) $\tau_{\text{пер}} \approx 3T$.

Длительность цикла — постоянная величина τ_0 . В этом случае можно считать, что распределение $\varphi(\tau)$ — дельта-функция:

$$\varphi(\tau) = \delta(\tau - \tau_0), \quad \varphi(s) = e^{-s\tau_0}, \quad W_{nn}(s) = ke^{-s\tau_0}.$$

Таким образом, этому закону распределения соответствует звено с постоянным запаздыванием. Проводя аналогичные вычисления, получим следующую таблицу.

Т а б л и ц а

Название звена	Плотность распределения (импульсная переходная функция)	Передаточная функция	Постоянные времени	Математическое ожидание и дисперсия
Звено с постоянным запаздыванием	$\delta(\tau - \tau_0)$	$ke^{-s\tau_0}$		$M\{\tau\} = \tau_0,$ $\sigma^2\{\tau\} = 0$
Аperiodическое звено	Показательный закон $\lambda e^{-\lambda\tau}$	$\frac{k}{Ts + 1}$	$T = \frac{1}{\lambda}$	$M\{\tau\} = T,$ $\sigma^2\{\tau\} = T^2$
Звено 2-го порядка (полюсы различные)	Гиперэкспоненциальный закон $(\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1\tau} - \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2\tau}) \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$	$\frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$	$T_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ $T_2 = \frac{1}{\lambda_2}$	$M\{\tau\} = T_1 + T_2$ $\sigma^2\{\tau\} = T_1^2 + T_2^2$
Звено 2-го порядка (полюсы кратные)	Поток Эрланга 2-го порядка $\lambda^2 \tau e^{-\lambda\tau}$	$\frac{k}{T^2 s^2 + 2Ts + 1}$	$T = \frac{1}{\lambda}$	$M\{\tau\} = 2T,$ $\sigma^2\{\tau\} = 2T^2$

4. Из таблицы и (11) следует выражение для передаточной функции W_{nn} для общего случая, когда для какого-либо станка длительность цикла — детерминированная величина (оно обобщает (8))

$$W_{nn} = \frac{ke^{-s\tau_0}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + 1}. \quad (14)$$

Выражению (14) соответствует плотность распределения

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{u_i-1} A_{ij} \frac{\lambda_i^{j+1}}{j!} (\tau - \tau_0)^j e^{-\lambda_i(\tau - \tau_0)}, \quad (15)$$

где λ_i — полюс u_i -й кратности $W_{nn}(s)$; A_{ij} — постоянный коэффициент. Из (12) и (13) следует

$$M\{\tau\} = \sum_{i=1}^m \frac{u_i}{\lambda_i} = \sum_{\rho=1}^n T_{\rho}, \quad \sigma^2\{\tau\} = \sum_{i=1}^m \frac{u_i}{\lambda_i^2} = \sum_{\rho=1}^n T_{\rho}^2, \quad (16)$$

где T_{ρ} — постоянная времени, $T_{\rho} = 1/\lambda_{\rho}$.

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{u_i-1} A_{ij} = 1. \quad (17)$$

Проинтегрировав обе части (15), получим

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau = 1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{u_i-1} Q_{ij} A_{ij},$$

где

$$Q_{ij} = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\lambda_i^{j+1}}{j!} (\tau - \tau_0)^j e^{-\lambda_i(\tau - \tau_0)} d\tau.$$

Но $Q_{ij} = 1$, и, следовательно, утверждение (17) доказано. Отсюда вытекает, что A_{ij} можно рассматривать как вероятность появления соответствующего распределения в (15). Получение величины τ , подчиняющейся закону распределения (15), например с помощью ЭВМ, представляется следующим образом. Разыгрывается случайное число $\xi \in [0, 1]$, и тем самым по A_{ij} выбирается соответствующий вариант производственного процесса (его структура) из всех возможных вариантов. Затем по распределению длительности цикла для данного варианта производственного процесса разыгрывается длительность цикла τ , снова вырабатывается ξ и т. д.

Назовем закон распределения с плотностью (15) обобщенным показательным законом. Из него можно получить различные законы распределения, изменяя параметры m , u , τ_0 .

1) При $\tau_0 = 0$, $m = n$ (все полюсы различные) получаем гиперэкспоненциальный закон

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i e^{-\lambda_i \tau}.$$

2) При $\tau_0 = 0$, $m = 1$, $u = n$ (все полюсы кратные) получаем закон Эрланга n -го порядка

$$\varphi(\tau) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} e^{-\lambda \tau}.$$

3) При $\tau_0 \neq 0$, $m = 1$, $u = n$ получаем закон распределения Пирсона III типа

$$\varphi(\tau) = C(\tau - \tau_0)^{n-1} e^{-\lambda(\tau - \tau_0)},$$

где

$$C = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}.$$

Таким образом, при известном аналитическом описании закона распределения длительности производственного цикла ПК или отдельных его станков можно всегда определить коэффициенты W_{nn} , если закон относится к типу (15). В противном случае коэффициенты W_{nn} могут быть найдены по импульсной переходной функции (см., например, [8]), т. е. по гистограмме.

Переходя от операторной записи (9) к дифференциальным уравнениям с учетом (14), получим систему уравнений, описывающих простой ПК,

$$\left. \begin{aligned} P' &= Ph(V), & (a) \\ \frac{dV_{\text{вх}}'}{dt} &= P'(t), & (б) \\ V(t) &= V_{\text{вх}}(t) - V_{\text{вх}}'(t), & (в) \\ a_n \frac{d^n V_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} V_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + V_{\text{вых}}(t) &= kV_{\text{вх}}'(t - \tau_0) & (г) \end{aligned} \right\} (18)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение производственного процесса (18 г) при $\tau_0 = 0$ (это можно сделать, не теряя общности)

$$a_n \frac{d^n V_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} V_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + V_{\text{вых}}(t) = kV_{\text{вх}}'(t). \quad (19)$$

Решение (19), т. е. график выпуска изделий, представим в виде суммы

$$V_{\text{вых}} = V_{\text{вых}}^{\text{пер}} + V_{\text{вых}}^{\text{уст}},$$

где $V_{\text{вых}}^{\text{пер}}$ — общее решение однородного дифференциального уравнения соответствующего неоднородному (19), определяется полюсами W_{nn} — переходная составляющая $V_{\text{вых}}$; $V_{\text{вых}}^{\text{уст}}$ — частное решение уравнения (19), определяется полюсами $\bar{V}_{\text{вх}}'(s)$ — установившаяся составляющая $V_{\text{вых}}$.

Установившийся режим наступает в ПК после затухания переходного процесса, длительность которого определяется постоянными времени T_ρ . Можно приближенно считать [6], что

$$\tau_{\text{пер}} \approx 3 \max\{T_\rho\}.$$

$$1 \leq \rho \leq n$$

Рассмотрим установившиеся режимы для различных функций $V_{\text{вх}}'$.

1) $P' = c = \text{const}$, $V_{\text{вх}}' = ct$.

Легко показать, что в этом случае

$$V_{\text{вых}}^{\text{уст}} = kV_{\text{вх}}'(t - \tau_{\text{уст}}), \quad (20)$$

где $\tau_{\text{уст}} = M\{\tau\}$. Из (20) следует, что коэффициент k может быть передаточным коэффициентом производственного процесса.

Формула (20) является математической записью соотношений, которые используются на практике при планировании производства. Они справедливы только для $P' = \text{const}$.

$$2) P' = ct, \quad V_{\text{вх}}' = ct^2.$$

Функция $V_{\text{вых}}^{\text{уст}}$ будет в данном случае иметь вид: $V_{\text{вых}}^{\text{уст}} = kc(t^2 + l_1 t + l_2)$. Для того чтобы определить коэффициенты l_1 и l_2 , подставим выражение для $V_{\text{вых}}^{\text{уст}}$ и $V_{\text{вх}}'$ в (19). После ряда преобразований получим: $l_1 = -2a_1$, $l_2 = -2a_2 + 2a_1^2$.

С учетом (16) и

$$a_1 = \sum_{\rho=1}^n \frac{1}{\lambda_{\rho}}, \quad a_2 = \sum_{\substack{\rho, j=1 \\ \rho \neq j}}^n \frac{1}{\lambda_{\rho} \lambda_j}$$

окончательно получим

$$\hat{V}_{\text{вых}}^{\text{уст}}(t) = kc(t - M\{\tau\})^2 + kc\sigma^2\{\tau\}. \quad (21)$$

Очевидно, выражение (21) справедливо при $t \geq M\{\tau\}$. Обозначим

$$\bar{V}_{\text{вых}}^{\text{уст}}(t) = kV_{\text{вх}}'(t - M\{\tau\}) = kc(t - M\{\tau\})^2. \quad (22)$$

Тогда можно записать соотношение

$$V_{\text{вых}}^{\text{уст}}(t) = \hat{V}_{\text{вых}}^{\text{уст}}(t + \tau_n), \quad (23)$$

где τ_n — функция времени.

Из (22) и (23) вытекает, что

$$V_{\text{вых}}^{\text{уст}}(t) = kV_{\text{вх}}'[t - (M\{\tau\} - \tau_n)] \quad (24)$$

и, следовательно, $\tau_{\text{уст}} = M\{\tau\} - \tau_n$.

Согласно (21) и (24), после преобразований

$$\tau_n^2 + 2\tau_n(t - M\{\tau\}) = \sigma^2\{\tau\}. \quad (25)$$

Выражение (25) позволяет определить значение τ_n и, значит, $\tau_{\text{уст}}$ в любой момент времени t после окончания переходного процесса. Максимальное и минимальное значения τ_n определяются из (25): при $t = M\{\tau\}$ $\tau_n = \sigma\{\tau\}$, при $t = \infty$ $\tau_n = 0$.

КОМБИНИРОВАННЫЙ ПК

Как видно из определения ПК, их выделение из общей структуры предприятия не может быть сделано однозначно — все зависит от необходимой степени детализации, вытекающей из постановки задачи моделирования. Однако для комбинированного ПК можно указать условие, которому он должен обязательно удовлетворять: изготовление изделий в ПК этого типа должно происходить по одинаковым или сходным технологическим маршрутам. Определение сходных технологических маршрутов имеется в [9]. Мы его несколько изменим, т. е. отнесем к изделиям со сходными технологическими маршрутами такие, которые проходят обработку на различных станках в одной и той же последовательности. При этом имеется по крайней мере один тип станков (основные), на которых обрабатываются изделия всех маршрутов. В качестве примера комбинированного ПК на рис. 5 приведена схема с тремя технологическими маршрутами (основным агрегатом является третий станок).

Комбинированные ПК далее нами рассматриваются при предположении, что выполняются условия (2) для каждого маршрута (потока) изделий. В этом случае справедливо считать, что как запуск, так и выпуск изделий различных наименований могут происходить одновременно*. Отсюда следует, что на входные производительности по каждому маршруту P_i' необходимо наложить ограничение

$$\sum_{i=1}^n P_i' l_i \leq P^{\text{ПК}}, \quad (26)$$

где $P^{\text{ПК}}$ — производительность ПК, приведенная к производительности по j -му изделию, если только оно производится ПК ($P^{\text{ПК}} = P_j^{\text{ПК}}$), $l_i = P^{\text{ПК}} / P_{ij}^{\text{ПК}}$ — так называемый коэффициент трудности.

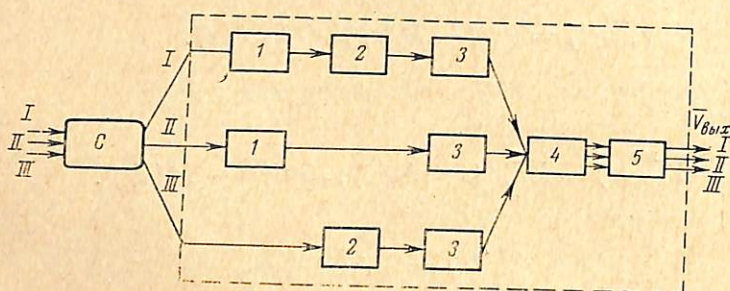


Рис. 5. I—III — маршруты, 1—5 — станки, С — склад

Знак неравенства в (26) означает, что в некоторые моменты времени ПК может быть полностью или частично незагружен при отсутствии полуфабрикатов на складе, а также из-за невозможности перераспределения потоков изделий между основными станками, например при недостаточной пропускной способности вспомогательного оборудования, во избежание частных переналадок и др.

Из (26) вытекает, что величина P_i' зависит от наличия на складе изделий всех μ наименований и величин планируемых производительностей P_i по всем μ маршрутам:

$$P_i' = R_i[P_1 h(V_1), \dots, P_\mu h(V_\mu)],$$

где V_i — количество изделий i -го наименования на входном складе ПК; $h(V_i)$ находится по (3).

Определим передаточную функцию i -го маршрута как отношение преобразований Лапласа графиков запуска и выпуска i -го изделия при нулевых начальных условиях: $W_{M_i}(s) = L\{V_{\text{вых } i}\} / L\{V_{\text{вх } i}\}$.

Теперь по аналогии с простым можем построить структурную схему комбинированного ПК (на рис. 6 приведена структурная схема ПК, изображенного на рис. 5). Комбинированный ПК является многомерной си-

* Когда количество наименований изделий превышает количество основных станков, необходимо при моделировании производственного процесса как единого целого учитывать очередность обработки изделий различных наименований. Та же задача может возникнуть и для простого ПК.

стей, поэтому для его описания удобно применять аппарат теории матриц. В общем случае для μ маршрутов комбинированный ПК описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}' &= \bar{R}(\bar{P}, \bar{V}), \\ \frac{d\bar{V}'_{\text{BX}}}{dt} &= \bar{P}', \\ \bar{V} &= \bar{V}_{\text{BX}} - \bar{V}'_{\text{BX}}, \\ \bar{V}_{\text{ВЫХ}} &= \bar{W}_{nn}(D) \bar{V}'_{\text{BX}}, \\ \bar{l}\bar{P} &\leq \bar{P}^{\text{ПК}}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где R — алгоритм перераспределения потоков в ПК; $\bar{P}$, $\bar{P}'$, $\bar{V}_{\text{BX}}$, $\bar{V}'_{\text{BX}}$, $\bar{V}$, $\bar{V}_{\text{ВЫХ}}$ — вектор-столбцы соответственно планируемой, входной производи-

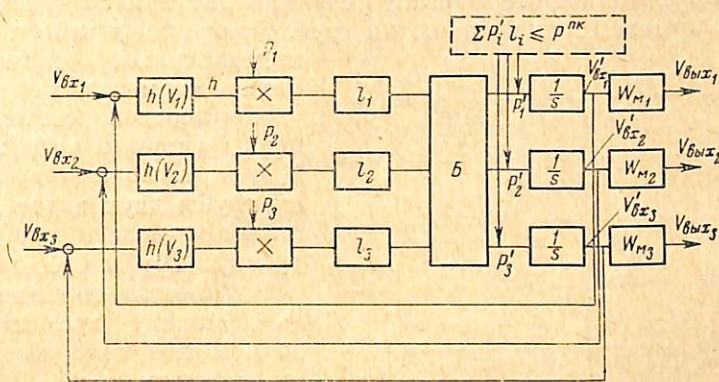


Рис. 6. Б — блок перераспределения потоков

тельности, входа, графика запуска, объема склада полуфабрикатов и выхода ПК;

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_\mu \end{bmatrix}, \quad \bar{P}' = \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ \vdots \\ P'_\mu \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_{\text{BX}} = \begin{bmatrix} V_{\text{BX}1} \\ V_{\text{BX}2} \\ \vdots \\ V_{\text{BX}\mu} \end{bmatrix}, \quad \bar{V}'_{\text{BX}} = \begin{bmatrix} V'_{\text{BX}1} \\ V'_{\text{BX}2} \\ \vdots \\ V'_{\text{BX}\mu} \end{bmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_\mu \end{bmatrix}, \quad V_{\text{ВЫХ}} = \begin{bmatrix} V_{\text{ВЫХ}1} \\ V_{\text{ВЫХ}2} \\ \vdots \\ V_{\text{ВЫХ}\mu} \end{bmatrix};$$

$\bar{l}$ — вектор-строка коэффициентов трудности $\bar{l} = \|l_1, l_2, \dots, l_\mu\|$, $W_{nn}(D)$ — передаточная матрица производственного процесса ПК,

$$W_{nn}(D) = \begin{bmatrix} W_{M1}(D) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & W_{M2}(D) & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & W_{M\mu}(D) \end{bmatrix}.$$

Передаточная матрица линейной части ПК, согласно (27),

$$\bar{W}_{\text{ПК}}(D) = \frac{1}{D} \bar{W}_{\text{nn}}(D).$$

На основе (27) получим структурную схему комбинированного ПК (рис. 7), где каждая переменная представляет собой вектор-столбец, аналогичную схеме одномерной системы (рис. 4).

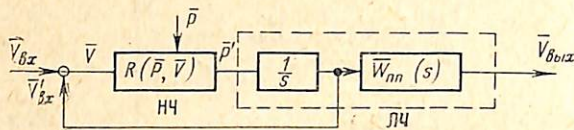
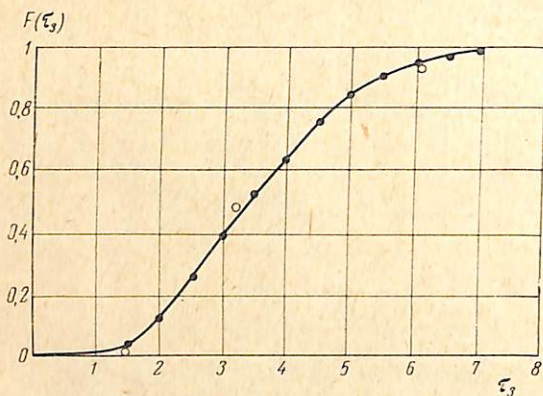


Рис. 7

Изложенные выше методы были использованы при создании динамической модели цеха горячей прокатки труб. В качестве примера приведем модель только одного участка цеха — термоотдела.

Термоотдел состоит из 24 печи одного и того же типа. В нем проходят термообработку трубы двух видов, отличающиеся технологическими маршрутами. Трубы обоих видов обрабатываются партиями, в каждый момент времени в одной печи может находиться только одна партия труб. Технология обработки и, следовательно, длительность цикла не зависят от вида труб, поэтому $W_{M_1}(s) = W_{M_2}(s) = W_M(s)$. Термоотдел можно рассматривать как двадцатидвухканальную систему

Рис. 8. Точка означает экспериментальные данные, кружок — аппроксимацию $W_3(s)$



му массового обслуживания, которая обрабатывает заявки (партии) двух видов (по нашей терминологии, это комбинированный ПК, имеющий два одинаковых технологических маршрута). Поэтому $\bar{l} = \|1,1\|$. В данном случае возможно всегда перераспределение потоков труб.

Цикл термообработки труб состоит из следующих этапов: разогрева печи, нагрева партии труб, выдержки при заданной температуре и охлаждения. В результате обработки статистических данных установлено, что длительность цикла τ можно представить в виде

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad (28)$$

где τ_1 — суммарная длительность разогрева и выдержки, равна 3,5 час.; τ_2 — минимальное суммарное время нагрева и охлаждения, равное 12 час.; τ_3 — отклонение суммы длительности нагрева и охлаждения от величины τ_2 . На рис. 8 приведена функция распределения τ_3 . На основании (11) и (28) имеем

$$W_M(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s) = 0,994e^{-15,5s}W_3(s).$$

Передаточная функция $W_3(s)$ была определена по методу [8]

$$W_3(s) = \frac{e^{-1,47s}}{1,34s^2 + 2,32s + 1}.$$

Таким образом, передаточная функция

$$W_M(s) = 0,994 \frac{e^{-16,97s}}{1,34s^2 + 2,32s + 1}.$$

С учетом возможности перераспределения потоков труб в любой момент времени и выражения (27) получаем уравнения термоотдела во временной области

$$P_i' = [P^{\text{ПК}} - P_i h(V_i)] h(V_i),$$

$$dV_{\text{вх}i}'/dt = P_i',$$

$$V_i = V_{\text{вх}i} - V_{\text{вх}i}',$$

$$1,34 \frac{d^2 V_{\text{вх}i}}{dt^2} + 2,32 \frac{dV_{\text{вх}i}}{dt} + V_{\text{вх}i} = V_{\text{вх}i}'(t - 16,97),$$

$$\bar{i} = \begin{cases} 1, & i = 2, \\ 2, & i = 1, \end{cases}$$

где $P^{\text{ПК}}$ — производительность термоотдела. Величины P_i планируются планово-распределительным бюро цеха.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Ш. Маргулис, Г. Я. Фридман. Статистическое моделирование некоторого класса сложных систем. Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 2.
2. А. С. Корхин, П. С. Бондаренко. Использование имитационной модели производственного процесса для оперативного управления участком металлургического завода. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 2.
3. М. П. Осенчук. Некоторые вопросы анализа систем управления предприятия-ми. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.
4. Н. П. Бусленко. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., «Наука», 1964.
5. И. А. Приймак, Б. Я. Рябинский, Е. И. Мошквич. Организация металлургического производства. М., Металлургиздат, 1960.
6. А. А. Красовский и Г. С. Поспелов. Основы автоматизации и технической кибернетики. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
7. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.
8. О. М. Минина. Определение динамических характеристик и параметров типовых регулируемых объектов. М., Изд-во АН СССР, 1963.
9. А. Н. Климов, И. Д. Оленев, С. А. Соколицын. Организация и планирование машиностроительного завода. М.—Л., Машгиз, 1961.

Поступила в редакцию
21 I 1969