

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСА РАБОТ

О. М. КОЗЛОВ, Е. И. ФИЛИПОВИЧ, А. И. ЭСКИНА

(Москва, Киев)

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена аналитическим методам расчета функции распределения времени выполнения комплекса работ. Предлагаемая в ней методика является, на наш взгляд, более эффективной с точки зрения возможностей построения машинных алгоритмов приближенного расчета вероятностей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан сетевой график G , ориентированный на события, т. е. ориентированный граф, дугами которого являются операции A_{ij} комплекса, а вершинами — события p_i , $i, j = 0, \dots, N$. Среди вершин одна p_0 является начальной (не имеющей входящих дуг) и одна p_N — конечной (не имеющей выходящих дуг).

Предполагается, что продолжительности выполнения отдельных работ являются независимыми случайными величинами с заданными распределениями вероятностей $E_{ij}(t)$. Требуется по $F_{ij}(t)$ продолжительностей выполнения работ A_{ij} найти распределение $F(t)$ продолжительности выполнения всего комплекса работ в целом.

В дальнейшем принадлежность распределений классу законов β -распределения или другому подобному классу не требуется, однако на $F_{ij}(t)$ накладываются некоторые не очень жесткие ограничения, которым, в частности, удовлетворяют нормальное распределение, β -распределение и любое распределение с конечным интервалом возможных значений случайной величины.

Сформулированная задача рассматривается для сетевых графиков следующего специального вида.

2. ОГРАНИЧЕНИЯ НА СТРУКТУРУ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Допустим, что сетевой график можно представить в виде последовательно или параллельно соединенных независимых блоков, из которых каждый, в свою очередь, может быть представлен в виде последовательно или параллельно соединенных субблоков и т. д. до таких, которые могут быть представлены в виде последовательно или параллельно соединенных элементарных работ.

Определение. Совокупность последовательно выполняемых работ, не являющаяся частью другой такой совокупности, назовем блоком нулевого порядка; блоком работ k -го порядка — совокупность блоков порядка менее k , соединенных только последовательно или только параллельно, не являющуюся частью другой такой совокупности. Максимальный порядок

блока, содержащегося в сети, назовем порядком сети. Очевидно, единственным блоком максимального порядка является вся сеть. Таким образом, предполагается, что заданная сеть может быть представлена как блок n -го порядка.

Из независимости продолжительностей элементарных работ вытекает, что продолжительности выполнения любых двух блоков работ независимы при условии, что ни один из этих блоков не является частью другого.

3. ОБЩАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Если два блока (в частности, две работы) выполняются последовательно, то время выполнения объединения этих блоков равно сумме времен выполнения отдельных блоков, а если параллельно, то максимуму этих времен. Поскольку времена выполнения блоков работ, из которых ни один не является частью другого, независимы, то функция распределения для продолжительности объединения последовательных блоков равна композиции функций распределения для продолжительности отдельных блоков, а функция распределения для продолжительности объединения параллельных блоков равна произведению соответствующих функций распределения. Следовательно, при сделанных предположениях о структуре сетевого графика функцию распределения для продолжительности выполнения всего комплекса работ можно получить как конечный результат рекуррентного процесса, в котором функции распределения для блоков k -го порядка вычисляются по функциям распределения для составляющих блоков меньших порядков путем суперпозиции операций свертки и умножения.

4. ЗАТРУДНЕНИЯ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ

Два рода трудностей возникает при выполнении указанных операций на ЭВМ. Во-первых, ограниченный объем памяти (в особенности, оперативной) накладывает ограничения на объем информации, хранимой в процессе вычислений. Во-вторых, ограниченное (хоть и очень высокое) быстродействие ЭВМ ставит определенные рамки для количества вычислительных операций при решении задачи.

С этой точки зрения затруднения вызывает операция свертки, тогда как умножение функций не составляет особого труда. Для вычисления значения свертки двух функций в одной точке требуется проинтегрировать их произведение. Число таких точек для достижения приемлемой точности представления свертки должно быть достаточно велико.

Предлагаемый ниже алгоритм учитывает эти трудности и дает возможность в определенной мере обойти их. Он основан на использовании разложений плотностей распределения в обобщенный ряд Грамма — Шарлье типа A , т. е. по функциям Эрмита. Каждая плотность аппроксимируется отрезком такого ряда. Это дает возможность хранить в памяти машины информацию о плотности в «сжатом» виде: требуется хранить некоторое число первых коэффициентов ряда и еще два параметра (см. ниже). Кроме того, с помощью леммы 1 удастся свести трудоемкую операцию свертки функции к несложным алгебраическим операциям над коэффициентами разложения и параметрами рядов. Каждая операция сопровождается оценкой точности ее результата. Заметим, что в [1] для приближенного представления плотностей распределения на интервалах продолжительности предлагается использовать полиномы.

По-видимому, класс функций Эрмита является более естественным для представления функции распределения, чем класс полиномов. Использование обобщенных, а не обычных разложений Грамма — Шарлье позволяет более точно представлять плотности распределения при том же количестве членов аппроксимации.

5. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ РАБОТ

Рассмотрим класс K функций, где для каждой функции $f(x) \in K$ существуют такие вещественные числа $a, \sigma > 0$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} [f(x)]^2 dx < \infty.$$

Иначе говоря, класс K представляет собой теоретико-множественное объединение по всем вещественным a, σ всех функций из пространств $L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))$, функций, квадратично суммируемых с весом $\psi_0^{-1}(x, a, \sigma)$, причем

$$\psi_0(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Предполагается, что для распределений $F_{ij}(x)$ продолжительностей работ A_{ij} существуют плотности $f_{ij}(x) = F_{ij}'(x)$, $f_{ij}(x) \in K$.

Поскольку каждая функция $f(x)$ класса K принадлежит некоторому пространству $L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))$, ее можно разложить в ряд по функциям

$$\psi_n(x, a, \sigma) = \frac{(-1)^n \sigma^n}{\sqrt{n!}} \psi_0^{(n)}(x, a, \sigma),$$

образующим полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))$

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \psi_h(x, a, \sigma), \quad (1)$$

где

$$a_h = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_h(x, a, \sigma) \psi_0^{-1}(x, a, \sigma) dx. \quad (2)$$

Ряд (1) при $a = 0, \sigma = 1$ называется рядом Грамма — Шарлье типа A . При произвольном a, σ будем считать его обобщенным рядом Грамма — Шарлье.

6. АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Для вычислений на ЭВМ плотности распределения аппроксимируются конечным отрезком обобщенного ряда Грамма — Шарлье. Отметим некоторые свойства таких аппроксимаций. Пусть

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \psi_h(x, a, \sigma),$$

$$f_N(x) = \sum_{h=0}^N a_h \psi_h(x, a, \sigma),$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятности. Тогда: 1) коэффициент a_0 равен 1; 2) имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx = 1;$$

3) все моменты функций $f(x)$ и $f_N(x)$ до N -го порядка совпадают, какими бы ни были a и σ ;

4) норма погрешности аппроксимации $f(x)$ функцией $f_N(x)$ равна

$$\varepsilon_N^2 = \|f - f_N\|_{L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))}^2 = \|f\|_{L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))}^2 - \sum_{k=0}^N a_k^2.$$

Утверждение 1) следует непосредственно из (2) для $k = 0$ и из того, что $f(x)$ — плотность распределения.

Утверждение 2) вытекает из 1) и равенств $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) dx = 0 (k > 0)$.

Чтобы убедиться в справедливости 3, заметим, что произведение $\psi_0^{-1} \psi_k$ являются полиномами степени не выше k ; в силу (2) коэффициенты a_k являются линейными комбинациями моментов k -го порядка с коэффициентами, равными коэффициентам соответствующих полиномов Эрмита. Ввиду невырожденности матрицы, составленной из коэффициентов полиномов Эрмита, совпадение линейных комбинаций a_k моментов для функций f и f_N влечет за собой совпадение самих моментов.

Наконец, убедимся в справедливости 4).

Ввиду ортонормированности $\psi_k(x, a, \sigma)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|_{L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2, \tag{3}$$

причем

$$\|f_N\|_{L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))}^2 = \sum_{k=0}^N a_k^2,$$

поэтому

$$\varepsilon_N^2 = \|f - f_N\|^2 = \|f\|^2 - \|f_N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^N a_k^2.$$

При последовательном вычислении коэффициентов можно на каждом шаге получать норму погрешности $\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_n^2 - a_{n+1}^2$, где $\varepsilon_0^2 = \|f\|^2 - a_0 = \|f\|^2 - 1$.

В силу (3) при достаточно большом N погрешность ε_n^2 становится меньше любого наперед заданного числа при любом $n > N$.

Близость плотности f и f_N в смысле метрики $L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))$ влечет за собой близость функции распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ и функции

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^x f_N(t) dt.$$

Действительно, имеет место

Лемма 1. Если $\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_{L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))} \leq \varepsilon$, то для $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$,

$\tilde{F}(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{f}(t) dt$ имеет место равномерно по x

$$|F(x) - \tilde{F}(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Доказательство.

$$|F(x) - \bar{F}(x)| = \left| \int_{-\infty}^x [f(t) - \bar{f}(t)] dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \bar{f}(t)| \psi_0^{-1/2} \psi_0^{1/2} dt.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f - \bar{f}| \psi_0^{-1/2} \psi_0^{1/2} dt \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (f - \bar{f})^2 \psi_0^{-1} dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0 dt},$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0 dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f - \bar{f}|^2 \psi_0^{-1} dt = \|f - \bar{f}\|^2.$$

Таким образом, $|F(x) - \bar{F}(x)| \leq \|f - \bar{f}\| \leq \varepsilon$.

7. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ СВЕРТКИ

Приведенные ниже формулы дают выражение для коэффициентов свертки и произведения двух функций плотности через коэффициенты их разложения в обобщенный ряд Грамма — Шарлье.

Лемма 2. Пусть $f_1 \in K(a_1, \sigma_1)$; $f_2 \in K(a_2, \sigma_2)$, где $K(a, \sigma) = L_2(\psi_0^{-1}(x, a, \sigma))$. Тогда свертка $f_1 * f_2$ принадлежит $K(a_3, \sigma_3)$, где $a_3 =$

$$= a_1 + a_2, \sigma_3 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \text{ и если } f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \psi_n(x, a_1, \sigma_1), f_2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \psi_n(x, a_2, \sigma_2),$$

то

$$f_1 * f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \psi_n(x, a_3, \sigma_3),$$

причем

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{k!(n-k)!}} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$f_3(x) = f_1(x) * f_2(x). \quad (5)$$

Разложим $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в обобщенный ряд Грамма — Шарлье и применим к выражению (5) преобразование Фурье (см., например, [2]). Преобразование Фурье функции $\psi_n(x, a, \sigma)$ имеет вид

$$\tilde{\psi}_n(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x, a, \sigma) e^{ix\xi} dx = \frac{\sigma^n (-i\xi)^n e^{ia\xi} e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

В результате преобразования Фурье (5) получим

$$\tilde{f}_3 = \sum_{n,k=0}^{\infty} \alpha_n \beta_k \frac{\sigma^{n+k} (-i\xi)^{n+k} e^{i\xi(a_1+a_2)} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2}{2}}}{\sqrt{k!} \sqrt{n!}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{\sigma^l (-i\xi)^l e^{ia\xi} e^{-\frac{\sigma_3^2 \xi^2}{2}}}{\sqrt{l!}}, \quad (6)$$

где $a_3 = a_1 + a_2$; $\sigma_3 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$,

$$c_l = \sum_{k=0}^l \frac{\sqrt{l!}}{\sqrt{k!(l-k)!}} \alpha_k \beta_{l-k}.$$

Последнее выражение представляет собой преобразование Фурье ряда $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \psi_l(x, a_3, \sigma_3)$.

Лемма 2 доказана.

Следствие. Если

$$f_1^{(k_1)}(x) = \sum_{n=0}^{k_1} \alpha_n \psi_n(x, a_1, \sigma_1), \quad f_2^{(k_2)}(x) = \sum_{h=0}^{k_2} \beta_h \psi_h(x, a_2, \sigma_2),$$

то

$$f_1^{(k_1)} * f_2^{(k_2)}(x) = \sum_{l=0}^{k_3} c_l \psi_l(x, a_3, \sigma_3), \tag{7}$$

где $a_3 = a_1 + a_2$; $\sigma_3 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$; $k_3 = k_1 + k_2$;

$$c_l = \sum_{k=0}^l \frac{\sqrt{l!}}{\sqrt{k!(l-k)!}} \alpha_k \beta_{l-k}.$$

(7) следует непосредственно из (6) при $\alpha_n = 0$ ($n > k_1$); $\beta_k = 0$ ($k > k_2$).

8. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Если для всех $x \in (-\infty, \infty)$ выполнены неравенства

$$|F_1(x) - \bar{F}_1(x)| < \varepsilon_1, \quad |F_2(x) - \bar{F}_2(x)| < \varepsilon_2,$$

где $F_i(x)$, $\bar{F}_i(x)$, $i = 1, 2$ — функции распределения, то для произведений функций $F_3(x) = F_1(x)F_2(x)$, $\bar{F}_3(x) = \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(x)$ и для композиций $\bar{F}_4(x) = F_1(x) * F_2(x)$, $\bar{F}_4(x) = \bar{F}_1(x) * \bar{F}_2(x)$ имеют место неравенства $|F_3(x) - \bar{F}_3(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $|F_4(x) - \bar{F}_4(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Действительно,

$$|F_3(x) - \bar{F}_3(x)| \leq |F_1(x)[F_2(x) - \bar{F}_2(x)]| + |\bar{F}_2(x)[F_1(x) - \bar{F}_1(x)]| \leq \leq |F_2(x) - \bar{F}_2(x)| + |F_1(x) - \bar{F}_1(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$\begin{aligned} |F_4(x) - \bar{F}_4(x)| &< \left| \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-y) dF_1(y) - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_2(x-y) d\bar{F}_1(y) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) dF_1(y) - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_2(x-y) dF_1(y) \right| + \\ &+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-y) d\bar{F}_2(y) - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_1(x-y) d\bar{F}_2(y) \right| < \\ &< \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_2 dF_1(y) + \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1 d\bar{F}_2(y) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

9. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ (АЛГОРИТМ А)

Полученные выше формулы и оценки позволяют построить следующий алгоритм приближенного расчета функции распределения времени выполнения комплекса работ, представленного сетевым графиком.

При описании алгоритма для простоты будем считать, что машинными погрешностями округления, погрешностями, возникающими при вычислении значений элементарных функций и при численном интегрировании, можно пренебречь. Соответственно усложнив алгоритм, можно учесть и эти погрешности.

Пусть задана точность ε , с которой требуется получить искомое приближение $F_T^{(\varepsilon)}(x)$ функции распределения $F_T(x)$

$$|F_T(x) - F_T^{(\varepsilon)}(x)| < \varepsilon. \quad (8)$$

Алгоритм А состоит в следующем.

1. Определяем границу погрешности, соблюдение которой при каждой операции свертки, умножения или аппроксимации функции конечным отрезком ряда Грамма — Шарлье обеспечивает заданную точность результата, т. е. (8). Для этого достаточно выбрать $\delta = \varepsilon / N$, где N — суммарное количество работ и блоков всех порядков в сети.

2. Вычисляем коэффициенты аппроксимации функций распределения продолжительностей работ отрезком ряда Грамма — Шарлье (аппроксимация с точностью до δ , за исключением работ, составляющих самостоятельные блоки нулевого порядка). С этой целью выполняем операции по вычислению: 1) математического ожидания продолжительности работ $a_{ij} =$

$$= \int_L x f_{ij}(x) dx, \text{ где } L \text{ — отрезок оси, на которой } f_{ij}(x) > 0; \text{ 2) дисперсии}$$

$$\text{продолжительности } \sigma_{ij}^2 = \int_L x^2 f_{ij}(x) dx - a_{ij}^2; \text{ 3) нормы } \|f_{ij}\|_{L_2(\psi_0^{-1}(x, a_{ij}, \sigma_{ij}))}^2 =$$

$$= \int_L f_{ij}^2 \psi_0^{-1}(x, a_{ij}, \sigma_{ij}) dx; \quad 4) [\varepsilon_{ij}^{(0)}]^2 = \|f\|^2 - 1.$$

Если $[\varepsilon_{ij}^{(0)}]^2 < \delta^2$, то аппроксимация f_{ij} ограничивается одним лишь членом $\psi_0(x, a_{ij}, \sigma_{ij})$. В противном случае полагаем $k = 1$ и переходим к 5); вы-

числяем коэффициент $a_{ij}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(x) \psi_k(x, a, \sigma) \psi_0^{-1}(x, a, \sigma) dx$; 6) вычисляем

$$[\varepsilon_{ij}^{(k)}]^2 = [\varepsilon_{ij}^{(k-1)}]^2 - [a_{ij}^{(k)}]^2.$$

Если $\varepsilon_{ij}^{(k)} < \delta$, то число членов аппроксимации f_{ij} равно k ; запоминаем коэффициенты $a_{ij}^{(1)}, \dots, a_{ij}^{(k)}$; в противном случае увеличиваем k на 1 и переходим к 5).

Поскольку ряд Грамма — Шарлье сходится, то $\varepsilon_{ij}^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ и описанный цикл операций завершается при некотором конечном k .

3. Вычисляем коэффициенты разложений в обобщенный ряд Грамма — Шарлье и параметры ряда для функций распределения продолжительностей выполнения блоков нулевого порядка. Поскольку каждый блок нулевого порядка является объединением элементарных работ, выполняемых последовательно, то это вычисление может быть выполнено с помощью (7) для параметров и коэффициентов разложения свертки.

После вычисления коэффициентов последней свертки для блока отбрасывается группа последних коэффициентов, определяемых при условии, чтобы сумма их квадратов не превосходила δ^2 .

4. Полагаем $s = 1$.

5. Вычисляем коэффициенты разложения в обобщенный ряд Грамма — Шарлье для блоков s -го порядка.

Если очередной блок s -го порядка является объединением последовательно выполняемых блоков меньших порядков, то вычисления производятся с помощью (7) для свертки. Отбрасывание коэффициентов производится так же, как и в п. 3. Если же блок s -го порядка является объединением блоков меньших порядков, выполненных параллельно, то с помощью

$$(2) \text{ и } f^{(k)}(x) = \sum_{h=0}^{k_s} \alpha_h \psi_h \text{ вычисляются значения функций распределения}$$

и производится их умножение, а затем аппроксимация с точностью до δ в порядке, описанном в п. 2.

6. Увеличиваем s на 1, и если $s \leq n$, то переходим к п. 5. В противном случае вычисления закончены.

10. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АЛГОРИТМА

Теорема. При вычислении приближений функции распределения $F_T(x)$ по алгоритму A погрешность аппроксимации не превышает ε : $|F_T(x) - \bar{F}_T(x)| < \varepsilon$, где $F_T(x)$ — функция распределения времени выполнения комплекса работ; $\bar{F}_T(x)$ — результат вычислений по алгоритму A .

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по порядку сети. Если сеть представляет собой блок нулевого порядка, то погрешность вычислений по алгоритму A не превышает ε . Действительно, общее количество работ и блоков равно в этом случае $M + 1$, где M — число работ.

Погрешность аппроксимации каждой работы отрезком ряда Грамма — Шарлье, согласно алгоритму, не превышает δ . При выполнении операции свертки в силу леммы 1 эти погрешности складываются. Следовательно, погрешность вычисления последней свертки равна $M\delta$. Кроме того, дополнительная погрешность возникает при обрыве полученного отрезка ряда. Таким образом, общая погрешность $M\delta + \delta = N\delta$.

Предположим, что для блоков порядка не выше k погрешность не превышает $N\delta$. Докажем, что это справедливо и для блоков порядка $(k + 1)$. Действительно, блок порядка $(k + 1)$ представляет собой объединение некоторого количества s блоков меньших порядков, выполняемых последовательно или параллельно.

Если через N_i , $i = 1, \dots, s$, обозначить число всех работ и субблоков i -го блока, то, согласно предположению индукции, погрешность вычисления функции распределения i -го блока равна $N_i\delta$. При выполнении операций умножения или свертки погрешность результата не будет превышать

$$\sum_{i=1}^s N_i\delta = \delta \sum_{i=1}^s N_i. \text{ Затем при обрыве отрезка ряда Грамма — Шарлье добавится погрешность } \delta, \text{ и в результате погрешность вычисления функции}$$

распределения для продолжительности рассматриваемого блока не превы-

сит $\delta \left(\sum_{i=1}^s N_i + 1 \right)$. Но $\sum_{i=1}^s N_i + 1 = N$ — общее число всех работ и

субблоков рассматриваемого блока $(k + 1)$ -го порядка. Таким образом, и для блока $(k + 1)$ -го порядка оценка $N\delta$ для погрешности справедлива.

Для всей сети, представляющей блок n -го порядка, погрешность аппроксимации не превосходит

$$N\delta = N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

В алгоритме A , очевидно, можно принять иную систему «распределения» погрешностей по операциям, при которой погрешность конечного результата также не будет превышать ε .

Например, можно погрешность вычисления функций распределения для продолжительностей блоков поставить в зависимость от порядка блока: чем больше порядок блока, тем больше и погрешность, вносимая при отбрасывании «остаточного члена».

В частности, можно принять следующую систему, для которой описанная выше является частным случаем (при $q = 1$): работы аппроксимировать с точностью до δ , а блоки k -го порядка — с точностью до $q^{k+1}\delta$. Доказанная выше теорема остается в силе, если в формуле $\delta = \varepsilon / N$ под N пони-

мать величину $\sum_{k=1}^n q^{k+1}N_k$, где N_k — число блоков k -го порядка, а через

N_{-1} обозначено число работ. Например, при $q = 2$ погрешность аппроксимации блоков нулевого порядка вдвое превышает погрешность аппроксимации работ и т. д. Вместо q^{k+1} можно взять любую другую возрастающую по k последовательность $q(k)$.

Аналогичный алгоритм преобразований с аппроксимациями и оценками погрешностей можно построить для полиномов Чебышева вместо функций $\psi_n(x, a, \sigma)$, если предположить, что плотности исходных распределений являются финитными функциями, а полиномы Чебышева рассматриваются на переменном интервале.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Martin. Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network. Oper. Res., 1965, vol. 13, N 1.
2. Г. Е. Ш и л о в. Математический анализ. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
16 V 1968