ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1972 том VIII, вып. 1

МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ ОБОРОТНЫХ ФОНДОВ

Ю. П. КРИВЕНКОВ
(Москва)

Недостатком существующих экономических моделей производства является то, что они плохо описывают величины оборотных фондов, обеспечивающих функционирование экономики. Детальный анализ существующих математических моделей производства приводится в [1]. В данной статье излагаются результаты работы по созданию функциональной модели производства, точно отражающей движение ингредиентов в простейшем производстве, а также результаты по построению серии приближенных математических моделей производства. Эта серия строится с учетом удобства описания разнообразных и больших производственных схем как внутрихозрасчетных структур, так и межхозрасчетных и хорошего обеспечения математическим аппаратом.

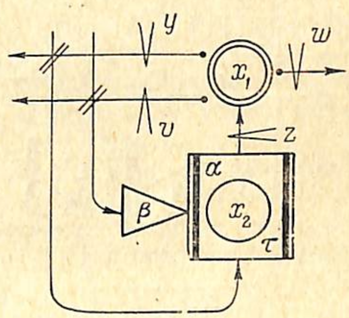

Рис. 1

1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель производства, схема которого изображена на рис. 1. Пусть эта модель определяется *параметрами*: α — коэффициент воспроизводства, β — коэффициент увеличения мощности, τ — длительность цикла производства; ее состояние описывается *показателями*: $x_1(t)$ — количество оборотных средств в распоряжении производства; $x_2(t)$ — производительность производства за цикл τ, а движение ингредиентов функциями: $y(t)$, $z(t)$, $v(t)$, $w(t)$, выражающими общее количество ингредиентов, соответственно поступившее в производство, вышедшее из него, затраченное на увеличение производственной мощности и вывезенное из производства с момента $t=0$.

Составим схему движения ингредиентов внутри цикла производства (рис. 2). Считая $\Delta^\tau x = x(t+\tau) - x(t)$ и принимая во внимание $\Delta^\tau z = \alpha\Delta^\tau y$, можно записать: $x_1(k\tau) = \Delta^\tau v + \Delta^\tau w + \Delta^\tau y$, $x_1(k\tau+\tau) = \Phi + \alpha\Delta^\tau y$, с помощью которых, исключая Φ и учитывая условие $\Phi \geqslant 0$, получим систему

$$\Delta^\tau x_1 = (\alpha-1)\Delta^\tau y + \Delta^\tau v + \Delta^\tau w, \tag{1}$$

$$\Delta^\tau x_2 = \beta\Delta^\tau v, \tag{2}$$

$$\Delta^\tau y + \Delta^\tau v + \Delta^\tau w \leqslant x_1(t), \tag{3}$$

$$\alpha\Delta^\tau y \leqslant x_2(t), \tag{4}$$

$$\Delta^\tau y \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\Delta^\tau v \geqslant 0, \tag{6}$$

описывающую функционирование рассматриваемой модели. Неравенство (3) регламентирует общую величину расхода оборотных ингредиентов, поэтому его можно назвать *ограничением по ресурсам.*

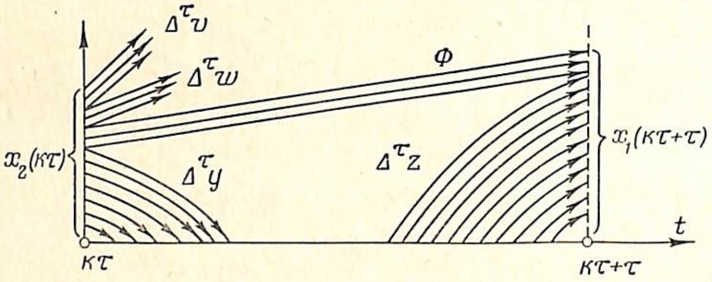

Рис. 2

Если ввести величины $u_1 = \Delta^\tau y / \tau$, $u_2 = \Delta^\tau v / \tau$, $u_3 = \Delta^\tau w / \tau$ — *интенсивности функциональной модели*, выражающие скорости движения средств соответственно в производство, накопление и вывоз, то система (1) — (6) запишется в виде

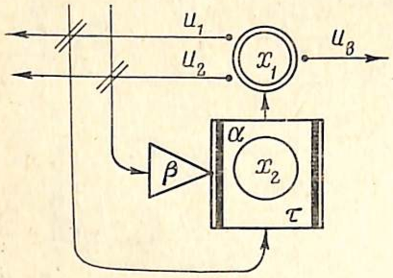

Рис. 3

$$\frac{\Delta^\tau}{\tau} x_1 = (\alpha - 1) u_1 - u_2 - u_3, \quad \frac{\Delta^\tau}{\tau} x_2 = \beta u_2,$$

$\tau u_1 + \tau u_2 + \tau u_3 \leqslant x_1$, $\alpha \tau u_1 \leqslant x_2$, $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$, а схема модели будет изображена, как показано на рис. 3.

Функциональную модель можно рассматривать в качестве *аксиоматической* в том смысле, что она может явиться эталоном или, иначе, мерой точности приближенных моделей.

Необходимость в приближенных моделях возникает ввиду того, что использование функциональной модели для описания достаточно сложных схем производств, обладающих индивидуальными значениями для цикла производства, требует одновременного использования в расчетах множества конечно-разностных операторов с различными τ, что неудобно. Поэтому, аппроксимируя конечно-разностный оператор, во-первых, дифференциальным и, во-вторых, конечно-разностным оператором с другим шагом, получим систему приближенных дифференциальных и соответственно конечно-разностных моделей производства.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МОДЕЛИ

Рассмотренная функциональная модель дискретна в том смысле, что в ней значения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$, $v(t)$, $w(t)$ могут быть только в дискретных точках $t = k\tau$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Решая систему (1) — (6) в классе функций, определенных на интервале $t > 0$, в соответствии с теорией исчисления конечных разностей [2, стр. 307; 3, стр. 804] или обобщенного преобразования Фурье [1, стр. 152], увидим, что эти функции определяются неоднозначно с точностью до функций вида $C \sin(2\pi k \frac{t}{\tau})$, где C — const и $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Но и методы исчисления конечных разностей, и обобщенное преобразование Фурье позволяют при решении системы (1)—(6) ограничиться только главными значениями, приводящими к аналитическим, достаточно гладким, а в рамках переключательного процесса оптимальных задач к кусочно-аналитическим, достаточно гладким функциям: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$, $v(t)$, $w(t)$.

Система (1) — (6) оказывается вполне пригодной для функционального описания поточного и непрерывного производства. Поточным производством здесь названа параллельная работа одинаковых (с одинаковыми параметрами) и одинаково работающих (с одинаковыми показателями и интенсивностями) производств, имеющих сдвиг в начальной фазе на величину $k = \tau / n, k = 0, \ldots, n-1$ (рис. 4).

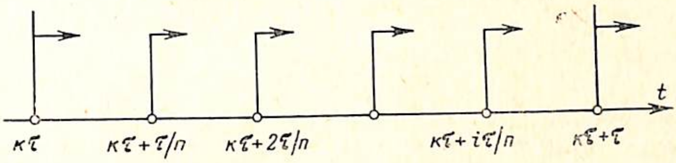

Рис. 4

Непрерывное производство получается предельным переходом из поточного при $n \to \infty$ с учетом ограниченности суммарных значений показателей и интенсивностей.

Рассматривая функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$, $v(t)$, $w(t)$ как кусочно-гладкие, определяем истинные интенсивности $u_1(t) = dy / dt$, $u_2(t) = dv / dt$, $u_3(t) = dw / dt$ движения ингредиентов соответственно в производство, на увеличение мощности и вывоз. В системе (1)—(6) приближенно положим

$$(\Delta^\tau / \tau) x_1 \cong (d / dt) x_1, \quad (\Delta^\tau / \tau) x_2 \cong (d / dt) x_2,$$

$$(\Delta^\tau / \tau) y \cong (d / dt) y, \quad (\Delta^\tau / \tau) v \cong (\Delta^\tau / \tau) w \cong (d / dt) w$$

и получим систему $dx_1 / dt = (\alpha - 1) u_1 - u_2 - u_3$, $dx_2 / dt = \beta u_2$, $\tau u_1 + \tau u_2 + \tau u_3 \leqslant x_1$, $\alpha \tau u_1 \leqslant x_2$, $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$, *описывающую приближенную дифференциальную модель производства.*

Для приближенной *конечно-разностной модели производства* выберем в качестве периода дискретности некоторое число $\sigma > 0$. Определим средние интенсивности по периоду в виде

$$u_1(t) = \Delta^\sigma y / \sigma, \ u_2(t) = \Delta^\sigma v / \sigma, \ u_3(t) = \Delta^\sigma w / \sigma$$

и в системе (1) — (6) приближенно положим

$$\Delta^\tau x_1 / \tau \cong \Delta^\sigma x_1 / \sigma, \ \Delta^\tau x_2 / \tau \cong \Delta^\sigma x_2 / \sigma,$$

$$\Delta^\tau y / \tau \cong \Delta^\sigma y / \sigma, \ \Delta^\tau v / \tau \cong \Delta^\sigma v / \sigma, \ \Delta^\tau w / \tau \cong \Delta^\sigma w / \sigma.$$

Получим систему $(\Delta^\sigma / \sigma) x_1 = (\alpha - 1) u_1 - u_2 - u_3$, $(\Delta^\sigma / \sigma) x_2 = \beta u_2$, $\tau u_1 + \tau u_2 + \tau u_3 \leqslant x_1$, $\alpha \tau u_1 \leqslant x_2$, $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$, описывающую *приближенную конечно-разностную модель.*

Перед тем как строить вторую пару приближенных моделей (назовем их уточненными), рассмотрим кратко исчисление конечных разностей.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ИСЧИСЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Обратимся к схеме исчисления конечных разностей в виде символического метода [2, стр. 289]. Вполне строгое обоснование этого метода может быть проведено на основе обобщенного преобразования Фурье [1, стр. 153]. Примем во внимание, что разложение аналитической функции $\psi(t)$ в ряд Тейлора

$$\psi(t+\sigma)-\psi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^k}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\psi(t)$$

можно символически записать в виде $\psi(t+\sigma)-\psi(t)=\left(e^{\sigma\frac{d}{dt}}-E\right)\psi(t)$, где E — тождественный оператор: $E\psi(t)=\psi(t)$. Отсюда следует, что оператор Δ^σ, применяемый к аналитическим функциям, можно рассматривать как дифференциальный оператор бесконечного порядка и записать в виде

$$\Delta^\sigma=e^{\sigma\frac{d}{dt}}-E=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^k}{k!}\frac{d^k}{dt^k}.$$

Построим дифференциальный оператор, обратный Δ^σ. Для этого исследуем функцию комплексного переменного $z/(e^z-1)$. В круге $|z|<2\pi$ она имеет разложение

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k,$$

где B_k — числа Бернулли, удовлетворяющие условиям: $B_0=1$, $B_1=-{}^1/_2$, $B_2={}^1/_6$, $B_4=-{}^1/_3$, $B_6={}^1/_{42}$, $B_8=-{}^1/_{30}$, $B_{2k+1}=0$, $k\geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}B_kC_n^{\,k}=0,\qquad n\geqslant 2.$$

Исходя из того, что при $|z|<2\pi$ эта функция вместе с функцией $\dfrac{e^z-1}{z}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^{n-1}$ взаимно обратны, рассмотрим дифференциальные операторы

$$\frac{\sigma\dfrac{d}{dt}}{\Delta^\sigma}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\sigma^k\frac{d^k}{dt^k}\qquad\text{и}\qquad\frac{\Delta^\sigma}{\sigma\dfrac{d}{dt}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^{k-1}}{k!}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}},$$

применяемые к некоторому классу не очень сильно изменяющихся аналитических функций. Чтобы оценить допустимую степень изменения функций данного класса, используем эти операторы в функции вида $u(t)=c\gamma^{t/\sigma}$, где c и γ — const. Тогда условие допустимости порождает неравенство $|\ln\gamma|<2\pi$, указывающее на достаточно большую величину области допустимых значений $\gamma: 0{,}0018\sim e^{-2\pi}<\gamma<e^{2\pi}\sim 530$.

Можно показать, что на множестве допустимых функций указанные выше дифференциальные операторы взаимно обратны, т. е. удовлетворяют равенству

$$\frac{\sigma \frac{d}{dt}}{\Delta^\sigma} \frac{\Delta^\sigma}{\sigma \frac{d}{dt}} = \frac{\Delta^\sigma}{\sigma \frac{d}{dt}} \frac{\sigma \frac{d}{dt}}{\Delta^\sigma} = E.$$

4. УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ. РЕЖИМ РЕСУРСОВ

В символах конечно-разностного оператора Δ^σ, $\sigma \neq \tau$, определим уравнения, которым удовлетворяет функциональная модель в режиме ресурсов. Из функциональной модели имеем систему

$$x_1(t+\tau) = \alpha x_1(t) - \alpha\Delta^\tau w_1,\ x_2(t+\tau) = x_2(t) + \beta\Delta^\tau v,$$

$$y(t+\tau) = y(t) + x_1(t) - \Delta^\tau w_1, \text{ где } w_1(t) = v(t) + w(t).$$

Итерируя эту систему, будем иметь

$$x_1(n\tau) = \alpha^n x_1(0) - \tau\alpha^n \psi(n\tau),$$

$$x_2(n\tau) = x_2(0) + \beta v(n\tau) - \beta v(0),$$

$$y(n\tau) = y(0) + (\alpha^n - 1) / (\alpha - 1) x(0) - (\tau / (\alpha - 1))\alpha^n \psi(n\tau) +$$
$$+ (w_1(n\tau) - w_1(0)) / (\alpha - 1),$$

где

$$\psi(n\tau) = {}^1/\tau\ (\Delta^\tau w_1(0) + \ldots + (\Delta^\tau w_1(n\tau - \tau)) / \alpha^{n-1}).$$

Согласно сделанному ранее предположению, значения $x_1(n\tau)$, $x_2(n\tau)$, $v(n\tau)$, $w(n\tau)$, а отсюда и $\psi(n\tau)$ распространяются на непрерывные кусочно-аналитические значения. Поэтому справедливы выражения

$$x_1(t) = \alpha^{t/\tau} x_1(0) - \tau\alpha^{t/\tau}\psi(t),\ x_2(t) = x_2(0) + \beta v(t) - \beta v(0),$$

$$y(t) = y(0) + ((\alpha^{t/\tau} - 1) / (\alpha - 1)) x_1(0) - (\tau / (\alpha - 1))\alpha^{t/\tau}\psi(t) +$$
$$+ (w(t) - w_1(0)) / (\alpha - 1),$$

в которых $\psi(t)$ удовлетворяет условию $\Delta^\tau\psi(t) = \Delta^\tau w_1(t) / \tau\alpha^{t/\tau}$.

Возьмем конечную разность Δ^σ от функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$

$$\Delta^\sigma x_1(t) = \alpha^{t/\tau}(\alpha^{\sigma/\tau} - 1) x_1(0) - \tau\Delta^\sigma(\alpha^{t/\tau}\psi(t)),$$

$$\Delta^\sigma x_2(t) = \beta\Delta^\sigma v(t),$$

$$\Delta^\sigma y(t) = \frac{\alpha^{t/\tau}(\alpha^{\sigma/\tau} - 1)}{\alpha - 1} x_1(0) - \frac{\tau}{\alpha - 1}(\alpha^{t/\tau}\psi(t)) + \frac{\Delta^\sigma w_1(t)}{\alpha - 1}.$$

Исключим $x_1(0)$ из выражения для $\Delta^\sigma x_1(t)$ с помощью $\Delta^\sigma y(t)$ и из выражения для $\Delta^\sigma y(t)$ с помощью $x_1(t)$. Получим систему

$$\Delta^\sigma x_1(t) = (\alpha - 1)\Delta^\sigma y - \Delta^\sigma w_1,\quad \Delta^\sigma x_2(t) = \beta\Delta^\sigma v,$$

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha^{\sigma/\tau} - 1}\Delta^\sigma y + \tau\frac{\alpha^{t/\tau}\alpha^{\sigma/\tau}\Delta^\sigma\psi(t)}{\alpha^{\sigma/\tau} - 1} - \frac{\Delta^\sigma w_1}{\alpha^{\sigma/\tau} - 1} = x_1(t).$$

Вводя обозначения $\frac{\Delta^\sigma}{\sigma} y = u_1(t)$, $\frac{\Delta^\sigma}{\sigma} v = u_2(t)$, $\frac{\Delta^\sigma}{\sigma} w = u_3(t)$ и учитывая, что $w_1(t) = v + w$, данная система приобретает вид: $(\Delta^\sigma/\sigma)x_1(t) = (\alpha - 1)u_1 - u_2 - u_3$, $(\Delta^\sigma/\sigma)x_2(t) = \beta u_2$,

$$\sigma((\alpha - 1)/(\alpha^{\sigma/\tau} - 1))u_1 + \tau(\alpha^{\sigma/\tau}\alpha^{t/\tau}\Delta^\sigma\psi(t))/(\alpha^{\alpha/\tau} - 1) - \sigma(u_2(t) + u_3(t))/(\alpha^{\sigma/\tau} - 1) = x_1(t).$$

Принимая во внимание $\Delta^\tau\psi = \Delta^\tau w_1/\tau\alpha^{t/\tau}$, преобразуем выражение $\alpha^{t/\tau}\Delta^\tau\psi(t)$. Для этого представим его в виде

$$\alpha^{t/\tau}\Delta^\sigma\psi(t) = \frac{\sigma}{\tau}\alpha^{t/\tau}\left(\frac{\Delta^\sigma}{\sigma\frac{d}{dt}}\frac{\tau\frac{d}{dt}}{\Delta^\tau}\alpha^{-t/\tau}\frac{\Delta^\tau}{\tau\frac{d}{dt}}\frac{\sigma\frac{d}{dt}}{\Delta^\sigma}\frac{\Delta^\sigma w_1(t)}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{\sigma}{\tau}\alpha^{t/\tau}\left(\frac{\Delta^\sigma}{\sigma\frac{d}{dt}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\tau^k\frac{d^k}{dt^k}(\alpha^{-t/\tau}\Phi(t))\right)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{\Delta^\tau}{\tau\frac{d}{dt}}\frac{\sigma\frac{d}{dt}}{\Delta^\sigma}(u_2(t) + u_3(t)).$$

Так как $\tau^k\frac{d^k}{dt^k}\alpha^{-t/\tau}\Phi(t) = \alpha^{-t/\tau}\left(\tau\frac{d}{dt} - \ln\alpha E\right)^k\Phi(t)$, выражение для $\alpha^{t/\tau}\Delta^\sigma\psi(t)$ запишем

$$\frac{\sigma}{\tau}\alpha^{t/\tau}\left(\frac{\Delta^\sigma}{\sigma\frac{d}{dt}}\alpha^{-t/\tau}\frac{\tau\frac{d}{dt} - E}{e^{\tau\frac{d}{dt} - E} - E}\Phi(t)\right).$$

Проделав то же для оператора $\Delta^\sigma/\sigma(d/dt)$, окончательно получим

$$\alpha^{t/\tau}\Delta^\sigma\psi(t) = \frac{\sigma}{\tau}\frac{e^{\sigma\frac{d}{dt} - \frac{\sigma}{\tau}\ln\alpha E} - E}{\sigma\frac{d}{dt} - \frac{\sigma}{\tau}\ln\alpha E}\frac{\tau\frac{d}{dt} - \ln\alpha E}{e^{\tau\frac{d}{dt} - \ln\alpha E} - E}\Phi(t).$$

Отсюда третье равенство искомой системы приобретает вид: $\tau A(\alpha, \tau, \sigma)u_1 + \tau B(\alpha, \tau, \sigma, d/dt)u_2 + \tau B(\alpha, \tau, \sigma, d/dt)u_3 = x_1(t)$, в котором $A(\alpha, \tau, \sigma)$ — число, имеющее вид $(\sigma/\tau)[(\alpha - 1)/(\alpha^{\tau/\sigma} - 1)]$, а $B(\alpha, \tau, \sigma, d/dt)$ — дифференциальный оператор, записываемый символически

$$\frac{\sigma}{\tau}\frac{\alpha^{\alpha/\tau}}{\alpha^{\sigma/\tau} - 1}\left[\frac{e^{\sigma\frac{d}{dt} - \frac{\alpha}{\tau}\ln\alpha E} - E}{\sigma\frac{d}{dt} - \frac{\sigma}{\tau}\ln\alpha E}\frac{\tau\frac{d}{dt} - \ln\alpha E}{e^{\tau\frac{d}{dt} - \ln\alpha E} - E}\frac{e^{\tau\frac{d}{dt}} - E}{\tau\frac{d}{dt}}\frac{\sigma\frac{d}{dt}}{e^{\sigma\frac{d}{dt}} - E}\right].$$

Для важного класса задач, в которых $u_2(t)$ и $u_3(t)$ не очень сильно меняются, т. е. в предположении $u_2(t)$, $u_3(t) \sim e\gamma^{t/\tau}$, число γ удовлетворяет условию $0{,}0018 \sim e^{-2\pi} \leqslant \gamma \leqslant e^{2\pi} \sim 530$.

В операторе $B(\alpha, \tau, \sigma, d/dt) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k(\alpha, \tau, \sigma)(d^k/dt^k)$ можно ограничиться только первым членом $B^0(\alpha, \tau, \sigma)$, который получается из $B(\alpha, \tau, \sigma, d/dt)$, в символическом представлении, заменой оператора d/dt на нулевой оператор θ. Окончательно имеем систему

$$\frac{\Delta^\sigma}{\sigma} x_1(t) = (\alpha - 1)u_1 - u_2 - u_3, \qquad (\Delta^\sigma/\sigma)x_2(t) = \beta u_2,$$

$$\tau A u_1 + \tau B u_2 + \tau B u_3 = x_1(t),$$

где

$$A = (\sigma/\tau)[(\alpha - 1)/\alpha^{\sigma/\tau} - 1],$$

$$B = \left(\alpha\frac{\tau}{\sigma}(\alpha^{\sigma/\tau} - 1) - \alpha + 1\right) \Big/ \left(\frac{\tau}{\sigma}(\alpha^{\sigma/\tau} - 1)(\alpha - 1)\right),$$

которая описывает поведение уточненной конечно-разностной модели в режиме ресурсов.

5. УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ. РЕЖИМ МОЩНОСТИ

Конечно-разностная система имеет вид

$$\Delta^\tau x_1(t) = ((\alpha - 1)/\alpha)x_2(t) - \Delta^\tau w_1, \qquad \Delta^\tau x_2(t) = \beta\Delta^\tau v,$$
$$\Delta^\tau y = x_2(t)/\alpha.$$

Используя примененный выше метод, получим систему, описывающую режим мощности конечно-разностной модели

$$(\Delta^\sigma/\sigma)x_1(t) = (\alpha - 1)u_1 - u_2 - u_3,$$

$$(\Delta^\sigma/\sigma)x_2(t) = \beta u_2, \qquad \alpha\tau u_1 + \beta((\tau - \sigma)/2)u_2 = x_2(t).$$

6. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА

Объединяя полученные выше *уточненные* системы в *конечно-разностном* случае для режимов ресурсов и мощности в одну, будем иметь систему

$$(\Delta^\sigma/\sigma)x_1(t) = (\alpha - 1)u_1 - u_2 - u_3,$$

$$(\Delta^\sigma/\sigma)x_2(t) = \beta u_2, \qquad \tau A u_1 + \tau B u_2 + \tau B u_3 \leqslant x_1(t),$$
$$\alpha\tau u_1 + ((\tau - \sigma)/2)\beta u_2 \leqslant x_2(t), \qquad u_1 \geqslant 0, \quad u_2 \geqslant 0,$$

в которой $A = (\sigma/\tau)(\alpha - 1)/(\alpha^{\alpha/\tau} - 1)$,

$$B = \left(\alpha\frac{\tau}{\sigma}(\alpha^{\sigma/\tau} - 1) - \alpha + 1\right) \Big/ \left(\frac{\tau}{\sigma}(\alpha^{\sigma/\tau} - 1)(\alpha - 1)\right).$$

Переходя в этой системе к пределу при $\sigma \to 0$ и понимая под $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ соответствующие истинные интенсивности в момент t, получим систему

$$dx_1/dt = (\alpha - 1)u_1 - u_2 - u_3, \qquad dx_2/dt = \beta u_2,$$

$$\tau A u_1 + \tau B u_2 + \tau B u_3 \leqslant x_1(t), \qquad \alpha\tau u_1 + (\tau/2)\beta u_2 \leqslant$$
$$\leqslant x_2(t), \qquad u_1 \geqslant 0, \qquad u_2 \geqslant 0,$$

описывающую функционирование *уточненной дифференциальной модели*. В этой модели $A = (\alpha - 1)/\ln\alpha$,

$$B = (\alpha\ln\alpha - \alpha + 1)/((\alpha - 1)\ln\alpha).$$

7. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ

Для сравнительного анализа рассмотренных выше приближенных и уточненных моделей достаточно провести количественную оценку в режиме ресурсов по сравнению с функциональной. Обозначая $v + w = w_1$, $u_2 + u_3 = u$ и предполагая показательный рост $w_1(t)$ в виде $w_1(t) = N\gamma^{t/\tau}$, рассмотрим тот случай работы производства, обусловленный соотношениями значений $x_1(0)$ и N, который обеспечивает единообразный темп роста $x_1(t)$ функциональной модели. Этот темп роста является граничным к области, где не обеспечивается бесконечное функционирование производства, и характеризуется условием $(\alpha - \gamma)x_1(0) = \alpha(\gamma - 1)N$.

Определим относительную, по сравнению с функциональной моделью, ошибку в значениях $x_1(t)$, т. е. вычислим значение

$$R = (x_1(t) - x_1^{\Phi}(t)) / (x_1^{\Phi}(t)).$$

Будем иметь соответственно в конечно-разностном и дифференциальном случаях

$$R_{\text{кр}} = \left[1 - \frac{\alpha - \gamma}{\alpha(\gamma - 1)} \frac{[(\alpha - 1)B + A] \dfrac{\tau}{\sigma}(\gamma^{\sigma/\tau} - 1)}{\alpha - 1 - \dfrac{\tau}{\sigma}(\gamma^{\alpha/\tau} - 1)A} \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\left(1 + \dfrac{\sigma}{\tau}\dfrac{\alpha - 1}{A}\right)^{\tau/\sigma}}{\gamma} \right)^{t/\tau} - 1 \right],$$

$$R_{\text{д}} = \left[1 - \frac{\alpha - \gamma}{\alpha(\gamma - 1)} \frac{[(\alpha - 1)B + A]\ln\gamma}{\alpha - 1 - A\ln\gamma} \right] \left[\left(\frac{e^{\frac{\alpha - 1}{A}}}{\gamma} \right)^{t/\tau} - 1 \right]$$

Анализ этих выражений дает безусловное предпочтение уточненным моделям по сравнению с приближенными. Область значений σ, в которой осуществляется преимущество конечно-разностной модели с оператором Δ^{σ} перед дифференциальной моделью, выражается в виде $0 < \sigma < \sigma_2 < 2\tau$.

Для того чтобы полнее представить рост ошибок, получающихся при использовании различных моделей, рассмотрим примеры.

1. Пусть некоторый производственный цикл $\tau = {}^1/_2$ месяца, коэффициенты $\alpha = 1{,}005$, $\gamma = 1{,}001$ и $\sigma = 1$ месяц. Это означает, что темп годового выпуска примерно 12%, темп увеличения оборотных фондов 2,4% и вывоза 9,6%. Через 50 лет относительные ошибки в значении $x_1(t)$ имеют следующий порядок: $R_{\text{кр}}{}^{n} = 50\%$, $R_{\text{д}}{}^{n} = 25\%$, $R_{\text{кр}}{}^{y} = 0{,}05\%$, $R_{\text{д}}{}^{y} = 0{,}016\%$.

2. Для значений $\tau = 6$ месяцев, $\sigma = 1$ год, $\alpha = 1{,}1$, $\gamma = 1{,}08$, что соответствует темпу годового выпуска 20% и приросту оборотных фондов 16%. Через 50 лет относительные ошибки в значениях $x_1(t)$: $R_{\text{кр}}{}^{n} = 153\%$, $R_{\text{д}}{}^{n} = 174\%$, $R_{\text{кр}}{}^{y} = 1{,}17\%$, $R_{\text{д}}{}^{y} = 0{,}4\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Кривенков. Математические и вычислительные вопросы линейного динамического программирования. М., Вычислит. центр АН СССР, 1969.
2. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1959.
3. Ю. П. Кривенков. Использование теории оптимальных процессов для исследования моделей производства. Дифференциальные уравнения, 1968, т. IV, № 5.

Поступила в редакцию
11 IX 1970