

О ЗАДАЧАХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО z -ОКРУГЛЕНИЯ

А. А. ВОТЯКОВ

(Москва)

Рассмотрим задачу: найти $\max (c, x)$ при

$$Ax \leq a, \quad (1)$$

где вектор x — целочисленный.Будем говорить, что (1) имеет вид, удобный для полного округления, если существует $x_0 \in M$ такое, что

$$\max_{x \in M} (e_i, x) = (x_0)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\max_{x \in M} (c, x) = (c, x_0), \quad (3)$$

где

$$M = \{x \in R^n \mid Ax \leq a\}.$$

Вопросы приводимости целочисленной задачи к виду, удобному для полного округления, изложены в [1, 2].

Из (2) можно получить задачу, эквивалентную (1): найти $\max (c, x)$ при

$$Ax \leq a, \quad (4)$$

$$x_i \leq [\max_{x \in M} (e_i, x)], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где вектор x — целочисленный; $[a]$ — целая часть числа a . Отсюда всякое допустимое решение (1) является допустимым решением (4) и наоборот.Обозначим через M_1 множество допустимых решений системы неравенств

$$Ax \leq a, \\ x_i \leq [\max_{x \in M} (e_i, x)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Переход от множества M к M_1 назовем итерацией z -алгоритма. Условия сходимости z -алгоритма в общем случае изложены в [2].В настоящей работе рассматриваются условия, при которых линейная целочисленная задача, имеющая вид, удобный для полного округления, сохраняет его на каждой итерации z -алгоритма. В дальнейшем такая задача будет называться целочисленной, инвариантной относительно z -алгоритма, или просто инвариантной целочисленной задачей там, где это не вызывает недоразумений. В общем случае целочисленная задача неинвариантна, поэтому перед началом каждой итерации z -алгоритма ее необходимо заново приводить к виду, удобному для полного округления.Легко видеть, что точка x_0 определяется однозначно соотношениями (2). Если существует перестановка строк системы $Ax \leq a$, после чего она переходит в

$$Bx \leq Bx_0, \\ B'x \leq B'x_0 + \delta,$$

где $\delta \geq 0$, B — невырожденная квадратная матрица, для которой справедливо матричное неравенство $B^{-1} \geq 0$, то для точки $x_0 \in M$ выполняется

$$(2). \text{ Действительно, } (e_i, x) = \sum_{j=1}^n (B^{-1})_{ij} (B_j, x), \quad B^{-1} \geq 0, \text{ поэтому по теореме}$$

Минковского $\max_{x \in M} (e_i, x) = (x_0)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Будем полагать, что A — квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $a = Ax_0$, $A^{-1} \geq 0$. По определению итерации z -алгоритма $M_1 = \{x \in R^n | Ax \leq Ax_0; x \leq [x_0]\}$, где $[x_0]$ — вектор с компонентами $[(x_0)_1], \dots, [(x_0)_n]$. Точка $\tilde{x} \in M_1$, в которой выполняются соотношения

$$\max_{x \in M_1} (c, x) = (c, \tilde{x}), \quad \max_{x \in M_1} (e_i, x) = (e_i, \tilde{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

лежит, очевидно, на поверхности конуса $x \leq [x_0]$.

Пусть $I = \{i = 1, 2, \dots, n | \tilde{x}_i = [x_0]_i\}$. Множество I при фиксированной матрице A зависит только от выбора точки x_0 и может совпадать с любым непустым подмножеством множества натуральных чисел $\{1, \dots, n\}$. Это свойство приводит к следующему условию: для того чтобы задача (1) была инвариантной относительно z -алгоритма, необходимо, чтобы для каждой подматрицы P , состоящей из полных строк матрицы E_n , существовала подматрица Q , состоящая из полных строк матрицы A , такая, что матрица $B = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ невырождена и $B^{-1} \geq 0$.

Лемма 1. Для инвариантности задачи (1) относительно z -алгоритма необходимо, чтобы для коэффициентов матрицы A после некоторой перестановки строк выполнялись соотношения: $A_{i,i} > 0, i = 1, 2, \dots, n$; $A_{i,j} \leq 0, i \neq j = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Предположим, что матрица P получена из E_n вычеркиванием первой строки. Тогда соответствующая матрица Q состоит из одной строки матрицы A , например, A_{i_1} , $B^{-1} \geq 0$ тогда и только тогда, когда $A_{i_1 i_1} > 0, A_{i_1 j} \leq 0, j = 2, \dots, n$. Аналогично предположим, что матрица P получена вычеркиванием из E_n строки с номером k , и пусть соответствующая предыдущему условию матрица $Q = A_{i_k}$, $B^{-1} \geq 0$ тогда и только тогда, когда $A_{i_k k} > 0, A_{i_k j} \leq 0, k \neq j; j = 1, 2, \dots, n$.

Легко видеть, что в последовательности строк $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ все строки различны и каждая строка A_{i_k} содержит только один строго положительный элемент $A_{i_k k}$, следовательно, перестановка $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ является искомой. Лемма доказана полностью.

С этого момента будем считать, что матрица ограничений задачи (1) имеет вид $(\pm \mp)$, т. е. $A_{i,i} > 0, A_{i,j} \leq 0, i \neq j; i, j = 1, \dots, n$.

Пусть D — подматрица матрицы A . Назовем ее главной подматрицей порядка p , если она имеет размерность $p \times p$ и вид $(\pm \mp)$. Соответствующий минор матрицы A назовем главным минором порядка p .

Лемма 2. Для того чтобы задача (1) была инвариантной относительно z -алгоритма, необходимо, чтобы матричное неравенство $D^{-1} \geq 0$ выполнялось для каждой главной подматрицы D матрицы A .

Доказательство. Рассмотрим условия, при которых матрица $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}^{-1} \geq 0$. Каждая строка матрицы $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ содержит только один строго положительный элемент (строка из P как строка единичной матри-

цы, строка из Q как строка матрицы A). Таким образом, $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}^{-1} \geq 0$

только в том случае, если каждый столбец матрицы $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ содержит не менее одного строго положительного элемента. Следовательно, после некоторой перестановки строк матрица $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ приводится к виду $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$. Обозначим полученную матрицу через B . Легко видеть, что матрица B совпадает с матрицей, полученной из матрицы E_n путем замены каждой строки, не принадлежащей P , на строку матрицы A с тем же номером.

Вычеркнем из матрицы B строки, принадлежащие P , и столбцы с теми же номерами. Обозначим оставшуюся матрицу через D . Легко проверить, что $B^{-1} \geq 0$ только тогда, когда $D^{-1} \geq 0$. Матрица D имеет вид $(\pm \mp)$, следовательно, она является главной подматрицей матрицы A . Ввиду произвольности P лемма доказана полностью.

Следствие. Для того чтобы задача (1) была инвариантна, необходимо, чтобы каждый главный минор матрицы A был строго положителен.

Доказательство. Будем вести его индукцией по порядку минора. По лемме 1 все главные миноры первого порядка строго положительны. Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех главных миноров порядка p , где $p \leq l$. Выберем произвольную главную подматрицу D матрицы A порядка $l+1$. В силу леммы 2 минор $|D|$ отличен от нуля и $D^{-1} \geq 0$. Элемент матрицы

$$(D^{-1})_{11} = \frac{\Delta_{11}}{|D|} \geq 0,$$

где Δ_{11} — главный минор матрицы A порядка l , поэтому $\Delta_{11} > 0$, $|D| \neq 0$, следовательно, $\infty > (D^{-1})_{11} > 0$. Но тогда $|D| > 0$. Следствие доказано полностью.

Лемма 3. Для того чтобы задача (1) была инвариантной относительно z -алгоритма, необходимо, чтобы выполнялось соотношение $c \geq 0$.

Доказательство. Выберем x_0 так, чтобы точка $[x_0]$ была внутренней точкой конуса M . Точка $\tilde{x}$ в этом случае совпадает с $[x_0]$. $\max_{x \in M_1} (c, x) = (c, [x_0])$ только тогда, когда $c \geq 0$. Лемма доказана полностью.

Назовем последовательность главных подматриц матрицы A возрастающей, если каждая последующая матрица содержит подматрицей предыдущую. Соответствующую последовательность определителей будем называть связанной последовательностью главных миноров матрицы A .

Число различных элементов в возрастающей последовательности главных подматриц не превышает, очевидно, n .

Назовем возрастающую последовательность главных подматриц матрицы A максимальной, если она состоит из n различных элементов. Соответствующую последовательность миноров назовем максимальной связанной последовательностью. Будем говорить, что для матрицы A выполняется условие Сильвестра, если существует хотя бы одна максимальная последовательность связанных миноров, каждый из которых строго положителен.

Теорема 1. Задача (1) инвариантна относительно z -алгоритма тогда и только тогда, когда для матрицы A выполняется условие Сильвестра, матрица A имеет вид $(\pm \mp)$ и вектор $c \geq 0$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы вытекает из леммы 1, следствия леммы 2 и из леммы 3. Доказательству достаточности предположим лемму.

Лемма 4. Пусть A — матрица вида $(\pm \mp)$ и существует максимальная последовательность главных подматриц $D_1, D_2, \dots, D_n = A$ матрицы A такая, что $|D_i| > 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $(D_i)^{-1} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что последовательность D_i такова

$$a_{11}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, A.$$

Заметим, что из неравенств

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, a_{11} > 0, a_{12} \leq 0, a_{21} \leq 0,$$

$a_{22} > 0$, следует, что $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \geq 0$, следовательно, при $n = 2$ лемма доказана.

Предположим, что лемма верна для всех $n \leq p$ и докажем ее справедливость для случая $n = p + 1$. Обозначим через B матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & a_{1,p+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & a_{p,p+1} \\ a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} \end{pmatrix}.$$

По условию леммы $|B| \geq 0$, по индуктивному предположению

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{pmatrix}^{-1} \geq 0.$$

Матрица $F = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} E_p & f_{1,p+1} \\ f_{p+1,1} & \dots & f_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} \end{pmatrix}$ имеет вид $(\pm \mp)$. Обозначим через G матрицу

$$G = \left(\begin{array}{c|c} E_p & 0 \\ \hline -f_{p+1,1} & 1 \end{array} \right) \geq 0.$$

Матрица GF имеет вид $\begin{pmatrix} E_p & f_{1,p+1} \\ \vdots & f_{p,p+1} \\ 0 & (GF)_{p+1,p+1} \end{pmatrix}$, где $(GF)_{p+1,p+1} = |GF| = |G||F| = |F| > 0$, так как $F = \begin{vmatrix} B \\ D \end{vmatrix}$. Легко проверить, что матрица $(GF)^{-1} \geq 0$. Справедливость утверждения леммы для случая $p + 1$ следует из соотношения

$$B^{-1} = F^{-1} \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (GF)^{-1} G \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так как входящие в него матрицы неотрицательны. Лемма доказана полностью.

Следствие 1. Если для матрицы A выполнены условия леммы 4, то всякий главный минор матрицы A строго положителен.

Доказательство. При $n = 1, 2$ следствие очевидно.

Предположим, что оно верно для всех $n \leq p$. Докажем его для $n = p + 1$. По лемме 4 $D_{p+1}^{-1} \geq 0$. Матрица D_{p+1} имеет вид $(\pm \mp)$, следовательно, $(D_{p+1}^{-1})_{i,i} > 0$, $i = 1, 2, \dots, p + 1$. Заметим, что $(D_{p+1}^{-1})_{i,i} = \frac{\Delta_{i,i}}{|D_{p+1}|}$,

где через $\Delta_{i,i}$ обозначен главный минор матрицы D_{p+1} , остающийся после вычеркивания i -й строки и i -го столбца. По условию $|D_{p+1}| > 0$, следовательно, $\Delta_{i,i} > 0$, т. е. все главные миноры матрицы D_{p+1} порядка p строго положительны. Возьмем произвольную главную подматрицу D' матрицы D_{p+1} порядка p , отличную от D_p . Легко видеть, что для нее существует максимальная связанная последовательность главных подматриц такая, что первые $p - 1$ матрицы являются подматрицами матрицы D_p . Из индуктивного предположения вытекает строгая положительность каждого главного минора матрицы D' . Следствие доказано полностью.

Следствие 2. Если для матрицы A выполнены условия леммы 4 и D — некоторая главная подматрица матрицы A , то $D^{-1} \geq 0$. Доказательство очевидно.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условий теоремы.

Достаточность. Предположим, что условия теоремы выполнены и в точке $\tilde{x} \in M_1$ для некоторого достаточно малого ε выполняются соотношения

$$\max_{x \in M_1} (c, x) = (c, \tilde{x}),$$

$$\max_{x \in M_1} (c_\varepsilon, x) = (c_\varepsilon, \tilde{x}),$$

где $c_\varepsilon = (c_1 + \varepsilon, c_2 + \varepsilon, \dots, c_n + \varepsilon)$.

Представим M_1 в виде

$$B'x \leq B'\tilde{x},$$

$$B''x \leq B''\tilde{x} + \delta, \text{ где } \delta > 0.$$

Для доказательства того, что (1) сохраняет вид, удобный для полного округления на первой итерации z -алгоритма, достаточно показать, что матрица B' содержит подматрицей некоторую невырожденную подматрицу B такую, что $B^{-1} \geq 0$. По теореме Минковского существует подматрица B матрицы B' такая, что B — невырождена и для некоторых $\lambda_i \geq 0$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i B_i = c_\varepsilon. \quad (5)$$

Докажем, что $B^{-1} \geq 0$. В силу (5), каждый столбец матрицы B содержит хотя бы один строго положительный элемент. Матрица B является подматрицей матрицы $\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$, поэтому каждая строка матрицы B содержит только один строго положительный элемент, следовательно, матрица B с точностью до порядка строк имеет вид $(\pm \mp)$. Не теряя общности, будем считать, что она имеет этот вид.

Для матрицы B выполняется условие Сильвестра. Действительно, вычеркнем из матрицы B строки, совпадающие со строками матрицы E_n , и соответствующие столбцы так, чтобы оставшаяся матрица A была главной подматрицей матрицы A . Для матрицы A условие Сильвестра выполнено по следствию 1 из леммы 4. Легко проверить, что всякий главный минор матрицы B , содержащий A , равен $|A|$. Таким образом, доказано, что для матрицы B выполняется условие Сильвестра и, следовательно, условия леммы 4, поэтому $B^{-1} \geq 0$.

В приведенном выше доказательстве правые части системы неравенств, определяющих M_1 , не учитывались. По определению второй итерации z -алгоритма

$$M_2 = \{x \in M_1 | x \leq [\tilde{x}]\} = \{x \in R^n | Ax \leq Ax_0;$$

$$x_i \leq \min([x_0]_i, [\tilde{x}]_i); i = 1, 2, \dots, n\},$$

т. е. при переходе от M_1 к M_2 изменяются только правые части системы неравенств, определяющей M_2 . Следовательно, (1) при выполнении условий теоремы сохраняет вид, удобный для полного округления и на второй итерации z -алгоритма. Возможность проведения индукции очевидна. Теорема доказана полностью.

Теорема 2. Для решения целочисленной задачи, инвариантной относительно z -алгоритма, требуется не более чем $\sum_{i=1}^n ([\tilde{x}_i] - \bar{x}_i)$ итераций z -алгоритма, где $\bar{x}$ — целочисленное решение задачи, $\tilde{x}$ — непрерывное решение этой же задачи.

Доказательство. Обозначим через M_1 множество, полученное после первой итерации z -алгоритма; через M_2 — множество, являющееся результатом второй итерации z -алгоритма, через M_l — множество, получающееся после l -й итерации z -алгоритма, через $\tilde{x}_k$ — точку из M_k , для которой выполняется $\max_{x \in M_k} (c, x) = (\tilde{x}_k)_i$.

По определению итерации z -алгоритма:

$$\tilde{x} \geq [\tilde{x}] \geq \tilde{x}_1 \geq [\tilde{x}_1] \geq \tilde{x}_2 \geq \dots \geq \tilde{x}_i \geq [\tilde{x}_i],$$

причем ни в одном из звеньев этой цепи равенство выполняться не может, следовательно,

$$\sum_{j=1}^n (\tilde{x}_{k-1})_j > \sum_{j=1}^n [\tilde{x}_{k-1}]_j > \sum_{j=1}^n (\tilde{x}_k)_j,$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^n [\tilde{x}_{k-1}]_j \geq 1 + \sum_{j=1}^n [\tilde{x}_k]_j,$$

что и доказывает теорему.

Следствие. Число итераций, необходимых для решения задачи: найти $\max(c, x)$ при ограничениях $Ax \leq Ax_0$, $x \geq 0$, где вектор x — целочисленный, $c \geq 0$, матрица A удовлетворяет условиям леммы 4, не пре-

выпадает $\sum_{j=1}^n [x_0]_j$. Доказательство очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Вотяков. Алгоритм решения обобщенной целочисленной задачи линейного программирования. В сб. Математические методы в некоторых задачах оптимального планирования. Свердловск, 1967 (Матем. ин-т им. В. А. Стеклова. Свердл. отд.).
2. А. А. Вотяков. Некоторые вопросы целочисленного программирования. Экономика и матем. методы, 1968, т. IV, вып. 4.

Поступила в редакцию
11 IV 1969