ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1972 том VIII, вып. 1

О ФОРМЕ РЕГРЕССИОННОГО УРАВНЕНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Г. Г. БУДЯНСКИЙ

(Москва)

В практике проведения макроэкономических, регионально-отраслевых и внутрихозяйственных исследований все более важное значение приобретают методы регрессионного и факторного анализа. Быстрое развитие и принципиальное усложнение экономического механизма, обусловливающее полное вовлечение в производство важнейших экономических ресурсов, неизбежно связаны с повышением их общей дефицитности и значимости. Поэтому становится особо необходимым глубоко анализировать сравнительную степень влияния *всех* производственных факторов на условия достижения планируемого экономического результата.

К настоящему времени опубликовано много работ, освещающих теорию и практику применения аппарата производственных функций к исследованию статистической информации об отдельных производственных процессах, об однородных предприятиях в промышленности и в сельском хозяйстве, об отдельных отраслях и регионах и в целом по народному хозяйству. Результаты таких аналитических исследований все шире используются в советской экономике. Они обеспечивают, например, установление научно обоснованных нормативов затрат экономических ресурсов, выявление наиболее дефицитных факторов производства (и так называемых узких мест), позволяют анализировать предельную эффективность и взаимозаменяемость ресурсов в данных производственных условиях. Аналогичные расчеты используются для обоснования и планирования темпов развития экономики, для целей прогнозирования, для анализа тенденций технического прогресса и т. д. Однако развитие практики регрессионного и факторного анализа экономических явлений пока несколько сдерживается кроме других причин отсутствием исчерпывающего решения некоторых теоретических и методологических вопросов. К ним относятся, например, проблема неадекватности условий применения метода наименьших квадратов к исследованию некоторых экономических совокупностей, вопросы отбора и подготовки статистической информации, отдельные моменты при определении доверительных интервалов и степени надежности оценок параметров уравнения регрессии, методология обоснования гипотез при отборе факторов и т. д. Но самой настоятельной и назревшей для решения представляется проблема однозначного и объективно обусловленного определения *формы* многофакторного регрессионного уравнения. Необходимость отыскания именно соответствующего этому условию соотношения аддитивных, мультипликативных и иных (если они проявляются) связей *между факторами-аргументами* в уравнении регрессии диктуется требованием повышения точности экономического анализа. Аппроксимация объективно существующих соотношений любым «наиболее удобным» регрессионным уравнением неизбежно сопровождается уменьшением корреляционного отношения, снижением устойчивости и надежности параметров. Зачастую при этом затрудняется или становится невозможным определение всех необходимых характеристик и показателей, отображающих исследуемые стороны экономического явления.

Между тем до сих пор нет общепринятой и строгой методологии определения формы многофакторного регрессионного уравнения. В литературе по этому поводу можно встретить самые разнообразные, а иногда и противоречивые выводы и рекомендации. Наиболее распространенным является мнение о необходимости применять так называемый «качественный» (в том числе и логико-математический) анализ взаимосвязи факторов-аргументов и результирующего признака (см., например, [1, стр. 222; 2, стр. 16, 17; 3, стр. 584; 4, стр. 10, 40, 106, 107; 5, стр. 685]). В частности, уже почти классическим стал пример, иллюстрирующий логику выбора гиперболической формы связи между объемом выпуска продукции и переменной частью ее себестоимости [1, стр. 223; 2, стр. 17, 58; 4, стр. 63, 67]. В большинстве случаев вид многофакторного уравнения регрессии «обосновывается» исходя из формы выявленных однофакторных уравнений, с учетом обеспечения «удобства» проведения расчетов. При этом часто рекомендуется эмпирический отбор уравнений по максимальному значению корреляционного отношения [1, стр. 298—306; 2, стр. 92; 4, стр. 18, 58, 63, 77, 143; 5, стр. 697; 6, стр. 265; 7, стр. 41]. Между тем во всех таких примерах вид однофакторной связи каждого отдельного *аргумента со значениями функции* не определяет форму соотношений *между аргументами* многофакторного уравнения. Иногда выбор вида уравнения никак не обосновывается [2, стр. 58, 144; 4, стр. 21, 38, 102, 124]. В таких случаях чаще всего применяется линейное уравнение регрессии [2, стр. 166, 191; 4, стр. 26, 29, 77, 94, 115, 117].

Среди известных попыток обосновать метод определения формы многофакторного уравнения, адекватного исследуемым зависимостям, наиболее обстоятельной представляется [5]. Однако и в этом случае проблема осталась по существу нерешенной, ибо предложенный метод может быть реализован, лишь если, как признает автор, возможно «прежде всего «подключить» к эмпирическим данным некоторую экономическую (техническую) гипотезу о взаимосвязи рассматриваемых факторов...» [5, стр. 697].

Оказалось возможным использовать для определения формы многофакторного регрессионного уравнения (и тем самым для *выявления конкретных взаимосвязей* между ресурсами) понятие *эластичности замены* σ_{ij} факторов x_i и x_j производственной функции (п.ф.). При этом имеется в виду, что если эластичность э_i функции y по данному фактору x_i определяет числовые параметры, с которыми этот фактор-аргумент входит в уравнение п.ф., то значение σ_{ij} однозначно обусловливает соотношение аддитивных и мультипликативных связей между факторами-аргументами x_i и x_j и, тем самым, определяет вид данного уравнения. Форма п.ф. зависит также от того, являются ли величины σ_{ij} и э_i постоянными при всех исследуемых значениях x_i и x_j или переменными.

Исходная методологическая концепция рассматривается здесь применительно к *статической п.ф.*, т. е. включающей в себя зависимость только от факторов (ресурсов), которые заданы экзогенно относительно зависимой переменной. Кинематическая п.ф., т. е. функция, в которой одним из факторов условно считается время, и динамическая п.ф., включающая эндогенные зависимости значений факторов (например, капитальных вложений) от предшествующих значений функции, нуждаются при определении формы уравнения в дополнительных исследованиях.

Как известно, экономический процесс, описываемый однородной п.ф. $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, характеризуется, в частности, показателем соотношения примененных в нем ресурсов $r_{ij} = x_i : x_j$ (например, фондовооруженность труда, энергоемкость оборудования и т. п.) и показателем предельной нормы их замещения $R_{ji} = \partial y / \partial x_j : \partial y / \partial x_i$, т. е. показателем соотношения предельных производительностей ресурсов. Частное от деления предельного относительного (грубее, процентного) изменения первого из этих структурных показателей на второй (при $y = \text{const}$) называется *эластичностью замены факторов* (ресурсов), т. е.

$$\sigma_{ij} = \frac{dr_{ij}}{r_{ij}} : \frac{dR_{ji}}{R_{ji}}. \tag{1}$$

σ_{ij} заключает в себе весьма важный экономический смысл, отражая количественную меру «легкости» взаимозаменяемости факторов в производстве. Если, например, при изменении r_{ij} предельная норма замещения остается постоянной — $R_{ji} = \text{const}$, то исходя из $dR_{ji} = 0$ $\sigma_{ij} = \infty$, т. е. имеется полная взаимозаменяемость x_i и x_j, иначе говоря, в этом случае экономически абсолютно безразлично, какой из этих факторов применить в производстве; можно увеличить выпуск y, применяя дополнительное количество *любого* из них. Если же при изменении R_{ji} остается постоянным соотношение факторов в производстве $r_{ij} = \text{const}$, то ввиду $dr_{ij} = 0$ получится $\sigma_{ij} = 0$, т. е. ресурсы в данном экономическом процессе абсолютно невзаимозаменяемы; для увеличения выпуска необходимо пропорциональное увеличение *всех* их в производстве одновременно. Кстати, именно этими значениями заданы границы изменения σ_{ij} в экономике, т. е. $0 \leqslant \sigma_{ij} \leqslant \infty$.

Условия, зафиксированные (1), когда $\sigma_{ij} = \text{const}$, являются достаточными, чтобы вывести, как это показано в [8], общий вид *функции постоянной эластичности замены* (п.ф. п.э.з.): $y = A \prod\limits_{k=1}^{N} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i^{-\beta_k} \right)^{-\rho_k/\beta_k}$, где N — число мультипликативных связей в п.ф. п.э.з; n — количество факторов, включенных в формулу аддитивно; A — коэффициент масштаба п.ф.; α_{ik} — коэффициенты при аргументах п.ф.; β_k — показатель эластичности замены k-й группы факторов, $\beta_k = (1 - \sigma_{ij}) / \sigma_{ij}$, ρ_k — показатель степени однородности; $\sum\limits_{k=1}^{N} \rho_k = 1$ — при п.ф. п.э.з. однородной первой степени.

Теперь убедимся, что значение σ_{ij} обусловливает характер аддитивных и мультипликативных соотношений между факторами-аргументами п.ф. Покажем это на примере хорошо изученной (см., например, [9]) двухфакторной п.ф. п.э.з. *

$$y = A \left[\alpha x_1^{\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)} + (1-\alpha) x_2^{\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)} \right]^{\left(\frac{\sigma\rho}{\sigma-1}\right)}, \tag{2}$$

где для простоты принимаем $\rho = 1$, т. е. рассматриваем п.ф. (2), однородную первой степени. Анализ показывает, что при $\sigma = \infty$ функция (2) приобретает форму линейной п.ф.

$$y = A[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2], \tag{3}$$

т. е. между аргументами остаются *только аддитивные соотношения*. Если, например, $\sigma = 2$, то в п.ф. (2) имеет место следующее соотношение аддитивных и мультипликативных связей

$$y = A[\alpha^2 x_1 + (1-\alpha)^2 x_2 + 2\alpha(1-\alpha)\sqrt{x_1 x_2}]. \tag{4}$$

---

* Индексы при $\sigma_{1,2}$ в (2) и в последующем тексте опущены.

Путем преобразований, устраняющих неопределенность типа $(0 \cdot \infty)$, возникающую в (2), можно показать (см. [9, стр. 195]), что при $\sigma = 1$ п.ф. п.э.з. представляет собой известную функцию типа Кобба — Дугласа, которая сохраняет *лишь одни мультипликативные соотношения* между факторами

$$y = Ax_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)}. \tag{5}$$

Если же, например, $\sigma = 1/2$, то в п.ф. вновь возникает смешанная форма аддитивных и мультипликативных соотношений

$$y = Ax_1x_2[\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1]^{-1} = \frac{Ax_1x_2}{\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1}. \tag{6}$$

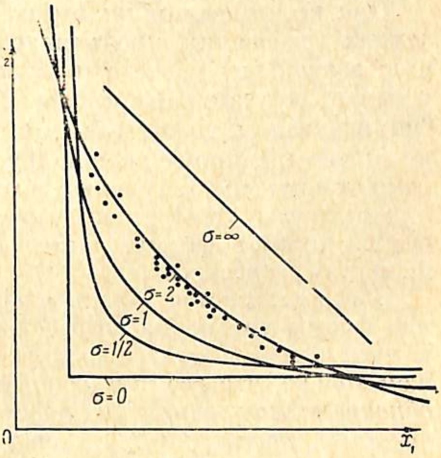
Сравнивая (4) и (6), нужно заметить, что при $\sigma > 1$ правая часть п.ф. представляет собой *многочлен*, т. е. *аддитивно* связанные аргументы и их мультипликативные ассоциации. При $\sigma < 1$, наоборот, правая часть п.ф.* является дробной функцией, т. е. *мультипликативно* связывает аргументы и их аддитивные ассоциации (последние — в знаменателе функции). Таким образом, увеличение значения σ определяет повышение «удельного веса» аддитивных соотношений в составе всех связей между аргументами в п.ф. (2). И наконец, когда $\sigma = 0$, преобразования, позволяющие избежать появления неопределенности типа $(\infty \cdot 0)$, приводят к выводу [9, стр. 193], что п.ф. п.э.з. (2) распадается на систему двух независимых в данной области уравнений типа п.ф. Леонтьева. При данном y это область

$$x_1 = x_{01},\ x_2 \geqslant x_{02},$$

$$x_2 = x_{02},\ x_1 \geqslant x_{01}.$$

В этой области y зависит только от x_1 или только от x_2

$$y = A_1x_1 \quad \text{или} \quad y = A_2x_2. \tag{7}$$



На рисунке представлена геометрическая интерпретация значений σ в виде изоквант двухфакторной п.ф. п.э.з., отображающих указанное соотношение взаимосвязей между аргументами x_1 и x_2. Возможность наглядного представления о характере эластичности замены ресурсов позволяет применить весьма простой графический метод для *предварительного* выявления значения σ и соотношения связей между аргументами в искомой п.ф. Нужный результат может быть получен уже на основе минимального объема статистической информации об исследуемом экономическом процессе. При этом, однако, необходимо сделать часто оправдывающееся допущение о том, что рассматриваемая п.ф. является функцией однородной первой степени. Методика анализа двухфакторной зависимости такова. Статистические данные пересчитываются таким образом, чтобы значения объемов применяемых ресурсов, взятые из *каждой* «моментной» характеристики** исследуемого экономического процесса, соответствовали одному какому-либо

* В общем случае правая часть может быть представлена в форме многочлена или дробной функции, когда обе части уравнения возведены в степень $(\sigma - 1) / \sigma$.

** Под «моментной» характеристикой здесь подразумевается весь целостный комплекс числовых значений результирующего и факторных признаков, характеризующих изучаемый экономический объект как в один из ряда последовательных моментов времени, так и в случае, когда он отображает один из ряда однородных объектов.

(удобнее среднему) значению результирующего признака. Получаются такие данные простым пропорциональным увеличением или уменьшением исходных данных о ресурсах во столько раз, во сколько раз большее или меньшее значение (по сравнению со средним) имеет в той же «моментной» характеристике объем результирующего признака. Полученные парные значения факторов, соответствующие по расчету выбранному среднему значению п.ф., затем наносятся на график изоквант (см. точечные значения на рисунке). Изокванты $\sigma = 1$ и (при необходимости) дополнительно некоторые изокванты $\sigma > 1$ и $\sigma < 1$, рассчитанные и предварительно расположенные на графике (либо выполненные в виде эталонных лекал и в требуемом масштабе), позволяют с достаточной точностью судить о характере соотношения аддитивных и мультипликативных связей аргументов в п.ф.

Учитывая обнаруженный характер связей, при построении уравнения регрессии п.ф. можно значительно точнее, чем по априорно заданной форме уравнения, оценить его параметры, а также структурные характеристики п.ф., показатели предельной производительности и взаимозаменяемости факторов и др. Естественно, что для определения значения σ абсолютно необходимо, чтобы используемая статистическая информация в достаточной степени отражала фактические субституционные процессы.

При исследовании *многофакторных* зависимостей в экономических явлениях требования, предъявляемые к исходной статистической информации, взятой для расчета σ_{ij}, существенно повышаются. Это, в частности, означает, что для каждой пары факторов x_i и x_j, для которой строится график изокванты, должны быть в наличии данные, которые можно привести не только к единому уровню функции y, но и к любому, но тоже единому (или стабильному), уровню всех других, входящих в п.ф. факторов. Только в том случае, когда влияние всех прочих факторов элиминировано, изокванта примет форму, соответствующую реальной взаимозаменяемости данной пары ресурсов.

Здесь излагается главным образом методологический аспект определения формы уравнения регрессии при анализе п.ф. Поэтому не рассматриваются способы точного количественного расчета значений σ_{ij} по (1). Укажем только, что все они основаны на принципе итеративных расчетов, *одновременно уточняющих* и форму уравнения регрессии (по которой определяются показатели R_{ji}), и значения σ_{ij}.

Следует, на наш взгляд, особо подчеркнуть рассмотренный выше смысл аддитивных и мультипликативных соотношений факторов-аргументов в уравнении п.ф. Это касается общей экономической интерпретации указанного математического отображения понятия взаимозаменяемости, поскольку значение эластичности замены ресурсов весьма тесно связано со всем комплексом условий и с масштабом применения экономических факторов в производстве. Чем многообразнее способы использования ресурсов, а следовательно, и их сфера соизмерения, т. е. чем более широкий круг экономических взаимосвязей и условий применения данных ресурсов при этом учитывается, чем сильнее превалирует их обобщенное экономическое значение над конкретно натуральным, тем выше и степень взаимозаменяемости ресурсов. Поскольку больше этих реально имеющихся в экономике связей учитывается в п.ф., постольку более преобладают в уравнении регрессии *аддитивные* соотношения между аргументами. В наиболее «чистом виде» аддитивные связи по (3) имманентны денежному выражению ресурсов — самому общему экономическому эквиваленту, обладающему при естественных условиях *абсолютной взаимозаменяемостью в экономических процессах.* Экономические ресурсы в денежной оценке при соизмерении их общего совокупного эффекта *только* складываются или вычитаются.

Взаимозаменяемость основных экономических ресурсов в *натуральном* выражении тяготеет к единичному значению ($\sigma \approx 1$) [10], что обусловливает преобладание в *макроэкономических* п.ф. именно мультипликативных (4) — (6) соотношений между аргументами. И наконец, п.ф., описывающие *технологические* процессы, в которых ресурсы совершенно не взаимозаменяемы, распадаются на систему (7) отдельных коэффициентов, показывающих расход каждого вида ресурсов на единицу выпускаемого продукта.

Рассмотренные экономико-математические соотношения не исчерпывают всех аспектов проблемы определения вида уравнения регрессии. Для выявления формы п.ф., адекватной исследуемому экономическому процессу, имеют значение *все* виды зависимостей, проявляющихся как в изменении соотношения конкретных объемов применяемых ресурсов, так и в качественных (или структурных) изменениях самих ресурсов*. Подобные изменения влияют не только на объем выпуска, но и на степень взаимозаменяемости ресурсов. Все это обусловливает необходимость учитывать в п.ф. подвижность характеристик всякого реального экономического процесса. В практике математико-статистического анализа это требование удовлетворяется тем, что в уравнении регрессии некоторые параметры рассматриваются как переменные, зависящие от конкретных значений аргументов и от их соотношений между собой. В [11] показано, как таким же образом удалось существенно повысить точность определения параметров макроэкономической п.ф. и соответствие теоретической линии регрессии эмпирическим значениям (по данным статистики ФРГ за 1950—1961 гг.). В качестве переменных параметров при аргументах п.ф. здесь были использованы показатели степени, построенные по типу эластичностей выпуска по тому же фактору. Как известно, в п.ф. Кобба — Дугласа эластичность выпуска по x_i есть $э_i = dy\,/\,y : dx_i\,/\,x_i = (\partial y\,/\,\partial x_i)\,(x_i/y) = \alpha_i x_i\,/\,y$ и является величиной переменной, зависящей от конкретного значения x_i. Следует, однако, помнить, что такая форма п.ф. не может адекватно отражать экономический процесс, если хотя бы для двух каких-либо факторов $\sigma_{ij} \neq 1$. В общем случае любая однородная дифференцируемая функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть представлена** в форме $y = Ax_1^{э_1} x_2^{э_2} \ldots x_n^{э_n} e^{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, вполне аналогичной п.ф., используемой

---

* Например, рост квалификации рабочей силы, увеличение доли прогрессивного оборудования в основных фондах и т. д.

** Вывод этой формулы таков: обе части полного дифференциала данной функции делим на y и слагаемые правой части умножаем и делим соответственно на x_i, т. е.

$$\frac{dy}{y} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1\,x_1}{yx_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2\,x_2}{yx_2} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n\,x_n}{yx_n}. \tag{8}$$

Каждое слагаемое правой части есть произведение двух выражений

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{x_i}{y} = э_i \tag{9}$$

и

$$\frac{dx_i}{x_i} = d\ln x_i. \tag{10}$$

Проинтегрируем (8) по частям, представив его суммой произведений (9) и (10): $\int d\ln y = \sum\limits_{i=1}^{n} \int э_i\, d\ln x_i$. Получим: $\ln y = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(э_i \ln x_i - \int \ln x_i\, dэ_i\right) + C$. Потенцируя, имеем: $y = Cx_1^{э_1} x_2^{э_2} \ldots x_n^{э_n} e^{-\sum \int \ln x_i\, dэ_i}$. Если множитель $e^{-\sum \int \ln x_i\, d\hat{э}_i} = 1$, т. е. $\sum \int \ln x_i\, d\hat{э}_i = 0$, то функция есть многофакторная п.ф. типа Кобба — Дугласа. При этом, так как $\hat{d}э_i = 0$, значение показателей степени при x_i будет $\hat{э}_i = \text{const}$.

в [11]. Наличие в этой форме множителя $e^{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, принципиально несводимого к соотношению мультипликативно связанных аргументов x_i, характеризует значительную иногда ошибку, появляющуюся при расчетах теоретических значений y по п.ф. Кобба — Дугласа. Не может быть достаточных оснований для представления переменных параметров обязательно в форме эластичностей выпуска $э_i$. Смысл введения в п.ф. переменных параметров — в возможности учесть влияние таких факторов, которые не удается идентифицировать исходной статистической информацией, но которые можно учесть косвенно через общее соотношение факторов, используемых в производстве. Это связано с тем, что обычно качественное изменение какого-либо фактора обусловливает изменение структурных соотношений между несколькими или всеми применяемыми ресурсами. Повышение уровня автоматизации оборудования сказывается на увеличении фондовооруженности, что может быть учтено в макроэкономической п.ф. в виде зависимости значения параметра (при аргументе, характеризующем фонды) от уровня фондовооруженности. В инженерной п.ф., используемой для анализа какого-либо технологического процесса, возможно проявление зависимости численного значения параметра (например, при аргументе, характеризующем один из видов сырья) от уровня энергоемкости продукции. Тем самым в данном случае удается идентифицировать качество сырья, если от него зависит энергоемкость и если это качество не отражено в исходной информации.

В реальной действительности зависимость значений параметров от структуры факторов в той или иной степени проявляется почти всегда. Поэтому форма п.ф., предназначенная для *точного* анализа, должна быть обязательно проверена на наличие и существенность таких связей. Важнейшие из них необходимо включить в уравнение регрессии для оценки соответствующих параметров.

Изложенная методология введения в п.ф. переменных параметров представляет собой по существу удовлетворение в определенной мере требования о полноте учета факторов. Несоответствие уравнения регрессии принципу «полноты факторов» обусловливает, в частности, появление автокорреляции «остатков» (отклонений теоретических значений $\tilde{y}$ от эмпирических данных). Таким образом, применение в п.ф. переменных в указанном смысле параметров рассматривается так же, как авторегрессивное преобразование. Как показывает опыт (например, [11]), для значительного повышения точности регрессионного анализа вполне достаточна линейная форма зависимости параметров от структурных соотношений ресурсов в п.ф. В п.ф. Кобба — Дугласа параметр показателя степени при x_k в этом случае может иметь, например, вид

$$\beta_k = a_k \frac{x_k}{x_i} + b_k. \tag{11}$$

Для получения формы п.ф., адекватной соответствующему экономическому процессу, в ряде случаев важно обеспечить и переменность эластичности замены ресурсов при различных их соотношениях в производстве. Такое условие выполняется, если показатель эластичности замены будет также задан переменным параметром, например, по (11). Таким образом, можно получить п.ф. с переменной, т. е. *непостоянной эластичностью замены* факторов (п.ф. н.э.з.) *.

---

* Строго говоря, п.ф. Кобба — Дугласа с переменными показателями степени при x_i тоже представляет собой п.ф. н.э.з. Наглядно ее можно представить на графике изоквант, учитывая, что она отобразится не *одной* единичной изоквантой, а точками на *нескольких* единичных изоквантах, т. е. кривая, соединяющая эти точки, будет соответствовать $\sigma_{ij} \neq 1$. Однако такая п.ф., даже соответствуя по *диапазону* изменениям σ_{ii}, как правило, не соответствует *исходному уровню* σ_{ii}.

Чаще всего взаимозаменяемость ресурсов в экономике характеризуется не многосторонними, а парными их соотношениями. С учетом этого обстоятельства нам представляется целесообразным при современном уровне развития математико-экономического анализа использовать п.ф. н.э.з. в общем случае в форме

$$y = A \prod_{i,j,k=1}^{n} [\alpha_k x_k^{\beta_k} + (1-\alpha_k) x_i^{\beta_k}]^{\rho_k/\beta_k}, \qquad (12)$$

где $\alpha_k = c_k x_k / x_i + d_k$, $\beta_k = a_k x_k / x_j + b_k$, $\sum_{k=1}^{n} \rho_k \approx 1$.

Для проведения регрессионного анализа по (12) необходимо, чтобы у исследователя была возможность применить на ЭВМ соответствующий алгоритм оценивания параметров п.ф. н.э.з. Если это условие соблюдено, следует предварительно разделить массив исходной статистической информации по крайней мере на две части (по возможности описывающие наиболее *разные* условия исследуемого экономического процесса). На основе этих массивов строятся две п.ф. н.э.з. $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$, у которых значения параметров $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$ отличаются * соответственно от параметров $\alpha^{(2)}$ и $\beta^{(2)}$. Таким образом, для каждого из этих параметров рассчитываются по два значения, которые вместе с усредненной величиной отношения $x_k : x_i$ дают возможность из одной системы двух уравнений получить значения a_k и b_k, а из другой — c_k и d_k. Параметр ρ_k в этих условиях остается постоянным. Необходимо учитывать значительный объем статистической информации, который требуется для расчета уравнения регрессии по форме п.ф. н.э.з. Если исходить из лимита в восемь — десять «моментных» статистических характеристик исследуемого процесса, необходимых для оценивания одного параметра, то в случае трех-четырехфакторного уравнения необходимо иметь 160—260 полных характеристик, т. е. около 650—1300 отдельных числовых значений исходной информации **. Для учета большего числа факторов объем информации соответственно увеличивается. В некоторых случаях такая информация может быть получена за счет объединения данных по пространственной и временной координатам процесса, или, как его в частных случаях называют, по методу «заводо-лет», «колхозо-лет» и т. п.

В современных условиях все же зачастую бывает невозможно собрать большой объем информации, а главное, применить сложный алгоритм расчета п.ф. н.э.з. В этом случае можно использовать аппроксимацию п.ф. н.э.з., построенную на основе рассмотренных выше положений.

Как было показано, введение в п.ф. Кобба — Дугласа аддитивных соотношений аргументов (при постоянных значениях параметров) обусловливает получение специфической формы п.ф. н.э.з. При этом численное значение показателя эластичности находится в определенной зависимости от показателя степени при аддитивной группе факторов. Если показатель является переменным, то тем самым обеспечивается непостоянство эластичности замены ресурсов, отражаемое этой формой п.ф. Поэтому для упрощенных расчетов п.ф. н.э.з. можно рекомендовать формулу

$$y = A \prod_{i,j,k=1}^{n} (\alpha_k x_k + x_i)^{\beta_k}, \qquad (13)$$

---

* Конечно, если происходили соответствующие сдвиги в исследуемом процессе.

** Для формы п.ф. н.э.з. требуется вдвое меньший объем информации, а, например, для п.ф. Кобба — Дугласа еще вдвое меньший.

где $\alpha_k = \mathrm{const}$, $\beta_k = a_k x_k / x_j + b_k$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$, некоторые $\beta_k < 0$. Порядок расчетов β_k в целом таков же, как и для (12), однако α_k оценивается отдельно на основе парных аппроксимирующих регрессий $y = B(\alpha_k x_k + x_i)$. Методами итеративных расчетов значения α_k могут быть последовательно уточнены. Остальные параметры после логарифмирования уравнения (13) оцениваются по методу наименьших квадратов. При условии разделения массива статистических данных на две части и расчета двух значений β_k (и последующего определения a_k и b_k) по данной аппроксимационной форме п.ф. н.э.з. (13) для трехфакторной модели требуется всего 100—140 полных «моментных» характеристик, или 400—550 исходных числовых значений результирующего и факторных признаков. Если в уравнении регрессии учитывается большое число факторов, то преимущество формы (13) перед п.ф. н.э.з. (12) в отношении «экономии» объема статистических данных быстро увеличивается.

Следует заметить, что актуальность применения п.ф. н.э.з. неравнозначна в различных экономических исследованиях и зависит от конкретного характера анализа и количества учитываемых при этом факторов. На народнохозяйственном уровне при построении двухфакторных п.ф. по основным экономическим ресурсам взаимозаменяемость, например, рабочей силы и капитала σ_{TK} изменяется весьма мало *. При увеличении числа факторов и дифференциации их ** эластичность замены по некоторым ресурсам становится более подвижной в зависимости от их структуры и «качества».

В отраслевом и региональном масштабе эта тенденция усиливается при ускорении технического прогресса и увеличении количества альтернатив применения данных ресурсов в производстве. На уровне предприятий многофакторный регрессионный анализ может выявить значительные колебания степени взаимозаменяемости σ_{ij} по отдельным факторам в зависимости от специфики производства. И наконец, при использовании инженерных п.ф. для анализа факторов различных технологических процессов форма п.ф. н.э.з. дает серьезные преимущества при исследовании закономерностей *развития* производства, в том числе показателя увеличения или снижения эластичности замены некоторых ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. П. Крастинь. Методы анализа регрессий и корреляций при определении агроэкономических функций. Рига, 1970 (Центр. стат. упр. при Совете Министров ЛатвССР).
2. Статистические модели и методы в экономическом анализе и планировании. Новосибирск, 1963 (Ин-т экономики и организации пром. произ-ва СО АН СССР).
3. А. И. Гладышевский. Производственные функции, их построение и применение. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 4.
4. Проблемы регрессионного анализа экономических функций и экономического прогнозирования. Материалы научн. конф. Рига, 1970.
5. М. С. Минц. Математическое моделирование взаимодействия факторов. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 5.
6. Р. Аллен. Математическая экономия. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
7. Н. Е. Кобринский. Основы экономической кибернетики. М., «Экономика» 1969.
8. H. Uzawa. Production Functions with Constant Elasticities of Substitution. Rev. Econ. Studies, 1962, v. 29, N 10.

* По данным об экономике капиталистических стран в целом σ_{TK} близка к 1, причем в слаборазвитых странах $\sigma_{TK} < 1$, а в США и Японии $\sigma_{TK} > 1$. См. [10, стр. 26].

** Например, ИТР и рабочие в составе фактора «труд», пассивная и активная часть основных фондов в составе «капитала» и т. д.

9. M. Brown. On the Theory and Measurement of Technological Change. Cambridge, The University Press, 1966.
10. А. А. Рывкин, А. Ф. Кандель. Эластичность замены ресурсов в производственных функциях и экономический рост. В сб. Тезисы докладов, представленных на Симпозиум по моделированию народного хозяйства. М., 1970 (Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством»).
11. Б. В. Седелев. Многофакторная статистическая модель связи между динамическими рядами с переменными эффективностями факторов. В сб. Тезисы докладов и выступлений на Симпозиуме по моделированию народного хозяйства. М., 1970 (Госплан СССР. Н.-и. экономич. ин-т).

Поступила в редакцию
10.V.1971