

ОБ ОДНОМ ВАЖНОМ СВОЙСТВЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Я. П. ГЕРЧУК

(Москва)

1. Широкое внедрение методов математического моделирования в оперативную практику выдвигает в качестве одной из важнейших методологических проблем разработку критериев оценки оперативной надежности применяемых моделей. Необходимость в таких критериях возникает потому, что в основе всякой модели лежит некоторое огрубление в описании изучаемой действительности, выделение некоторых ее свойств или особенностей при игнорировании других, перенос знания с описываемого объекта на модель по аналогии, применение различных приближенных методов при преобразовании моделей и т. п. Все перечисленные условности ослабляют уверенность в достаточной точности и достоверности выводов, получаемых в результате применения этих методов при изучении реальной действительности, и делают практически очень важным установление контроля за их оперативной пригодностью. Над данными вопросами в последнее время задумываются многие ученые, так или иначе соприкасающиеся с проблемами математического моделирования. Так, Ричард Курант, которого считают «одним из самых известных математиков современного мира» [1, стр. 10], писал: «...поскольку любую заданную физическую ситуацию можно математически идеализировать многими различными способами, то важно уметь выбирать приемлемые идеализации*. Есть три критерия, которым должна удовлетворить всякая правильно поставленная математическая задача, имеющая целью описывать действительность. Во-первых, задача должна допускать решение. Во-вторых, решение должно быть единственным. И в-третьих, решение должно быть устойчивым; это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать только соответственно малое изменение решения» [2, стр. 111]. Два первых критерия — существования и единственности решения, по Р. Куранту, «выражают уверенность в детерминизме, без которой при повторении экспериментов нельзя ожидать совпадающих результатов». Эти две категории широко известны в математике как общее требование к любому математическому решению и носят, следовательно, общетеоретический характер. Третий критерий — устойчивость решения, — очевидно, связан с моделированием (идеализацией) действительности, в котором, как он пишет, отдельным математическим величинам «приписывается физический смысл» и поэтому особенно важно убедиться, что полученные по модели решения «являются хорошими приближениями к истинным решениям». К обеспечению этого условия, в сущности, и сводится требование устойчивости решения всякой задачи, описываемой математической моделью. А источниками нарушения этого требования, по Р. Куранту, могут явиться два обстоятель-

* Термин «идеализация» здесь равнозначен термину «математическая модель».

ства: во-первых, возможная неточность исходных данных, по которым построена модель (выражаясь кибернетически, неточность входной информации), и, во-вторых, использование приближенных методов при решении задачи на модели. Те же три критерия оценки математических решений, полученных на основе моделирования реальной действительности, и в той же формулировке выдвигает другой крупный американский математик — Ричард Беллман, создатель теории динамического программирования, выросшей на основе поисков математического решения многих технико-экономических задач. О важности критерия устойчивости решений, получаемых на основе математической модели, при изменении вводимой в нее исходной информации, он говорит уже в вводной главе своего основного труда, где делает «краткий экскурс в философию математических моделей» [3, стр. 10 — 13]. Этому критерию оценки математических моделей он придает, видимо, большое значение, неоднократно возвращаясь к нему [3, стр. 49, 99 и др.], а в одном месте прямо заявляет, что модели, не обладающие свойством устойчивости, как правило, не представляют практического интереса [3, стр. 150]. Специальное внимание Р. Беллман уделяет исследованию устойчивости при решении широкого круга производственных задач «на узкие места», к которым он относит и задачи линейного программирования [3, стр. 219—225 и сл.]. Имея дело в рассматриваемой работе с задачами динамического программирования, т. е. с задачами, в которых решаются на оптимум сложные функции многих переменных, он, естественно, имеет в виду математические модели многомерного типа и главные источники неустойчивости решений по этим моделям видит в их многомерности; он даже нередко говорит о «проклятии многомерности» как о значительном затруднении в решении задач с большим числом переменных (см., например, [3, стр. 9] и др.). Конечно, в представлении об источниках неустойчивости решения задач, опирающихся на «идеализацию» реальной действительности при помощи формализации их описания математической моделью, между Р. Курантом и Р. Беллманом намечается некоторая разница. Но она не столь уж велика.

2. Понятие устойчивости в наиболее отвлеченном формально-математическом виде ввел в науку выдающийся русский математик А. М. Ляпунов (Р. Беллман называет его имя в числе крупнейших математиков мира, «способствовавших своим трудом совершенствованию человечества» [4, стр. 5]). А. М. Ляпунов сформулировал понятие устойчивости решений дифференциальных уравнений и охарактеризовал его как важнейшее понятие качественной теории таких уравнений, имеющее большое значение для многих ее приложений в механике и технике. В наиболее общем виде его можно изложить следующим образом.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = A_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)$ — ее решение, принимающее при $t = t_0$ некоторые начальные значения $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Оно называется устойчивым, если всякое другое решение, исходные данные которого мало отличаются от $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, будет так же мало отличаться от первого решения при любых значениях t .

А. М. Ляпунов не только строго сформулировал математический смысл общего понятия устойчивости, но и разработал теорию устойчивости движения и два метода изучения и решения задач об устойчивом движении. Заслуга дальнейшего развития этих методов и расширения сферы их практического приложения принадлежит советской школе теории устойчивости, созданной Н. Г. Четаевым. Особенно плодотворным применение этой теории оказалось в механике и в технической кибернетике, что сказалось

на развитии систем автоматического управления и регулирования [5, а также 1, стр. 169]. В этих областях явление устойчивости соответствующих систем изучено и описано достаточно подробно. Для различных систем определены специфические признаки (критерии), позволяющие определять ожидаемую степень устойчивости этих систем путем анализа некоторых исходных параметров и их структурных особенностей без решения сложных дифференциальных уравнений.

3. Применение теории устойчивости в механике и системах автоматического регулирования при всей их практической важности все же имеет локальное значение. Концепции же устойчивости математических решений Р. Куранта и Р. Беллмана являются более общими. Они представляют попытку, пусть пока еще скромную, но принципиально весьма важную, ввести понятие устойчивости математических решений в обширную область моделирования разнообразных жизненных процессов и ситуаций; широко использовать это понятие в качестве важного критерия оценки эксплуатационной пригодности различных математических моделей при их практическом использовании. Важность такого критерия определяется тем, что он может, в конечном счете, служить инструментом контроля надежности оперативных решений, принимаемых на основании математических выкладок, сделанных на модели. А ведь в этом заключается практический смысл и оправдание всего процесса математического моделирования. Понятие устойчивости математических решений, получаемых на основе математических моделей, должно рассматриваться в двух аспектах: теоретическом и практическом. Существенно важно установить природу самого этого явления, определить возможные причины появления неустойчивых решений в математически строгом процессе обработки различных моделей. Это может быть сделано путем разработки и последующей проверки различных гипотез, объясняющих это явление.

В практическом аспекте в проблеме устойчивости математических решений, как она обрисована выше, наибольший интерес, по-видимому, должна представлять задача установления *меры* устойчивости и по возможности определения зависимости *степени* ее от структурных и иных особенностей моделей разного типа. Формулирование общего понятия устойчивости, не связанного с конкретными физическими явлениями, пригодного для характеристики широкого круга моделируемых динамических систем, связано со значительными трудностями. Наиболее близко к такому понятию устойчивости подводит теория автоматического управления, в которой любая динамическая система рассматривается как объект управления, меняющий свое состояние, характеризуемое некоторым набором величин или показателей, под влиянием каких-либо внешних возмущающих воздействий. Понятие устойчивости такой системы, по-видимому, ближе всего характеризуется наличием в ней установившегося (невозмущенного) движения, подчиненного определенной закономерности, которая сохраняется в принципе сколь угодно долго, пока сохраняется определенное соотношение внешних сил и внутренних связей в системе.

По аналогии с изложенным можно рассматривать критерии существования и единственности этих решений (выражение, по Р. Куранту, детерминированность моделируемых процессов) как меру оценки состояния *внутренних связей* в системе, подчинения ее устойчивым закономерностям, выражающим наличие постоянно действующих причинно-следственных цепей, а критерий устойчивости как меру оценки силы *внешних воздействий*, возмущающих эти внутренние связи, расшатывающих их, ослабляющих детерминизм замоделированного процесса, характеризующего движение данной динамической системы. Можно также сказать, что неустойчивость математических решений обозначает их повышенную чувствитель-

ность * к вторжению в изучаемую динамическую систему внешних возмущающих ее равновесие факторов. В качестве таких факторов должно рассматриваться вхождение в систему любой новой информации, являющейся параметром ее управления. Таким образом, критерий устойчивости динамической системы кибернетически должен пониматься как мера склонности ее к нарушению внутренних связей под влиянием вторжения извне хотя бы небольших изменений во входной информации, затрагивающих параметры управления этой системой.

Происхождение или причины повышенной чувствительности динамической системы к возмущающим внешним воздействиям (или понижения степени ее устойчивости) могут корениться в структурных особенностях, характеризующих систему внутренних связей, или зависеть от характера возмущающих эти связи внешних факторов. Во втором случае особое значение приобретает вторжение в сложившуюся строго детерминированную систему связей элементов неопределенности, которые входят в нее и неявным образом, слабо себя обнаруживая; это, например, происходит за счет снижения точности вводимых в исходную информацию параметров или использования в преобразованиях модели приближенных математических приемов, что широко применяется в практике моделирования и может оставаться незамеченным, оказывая между тем большое влияние на снижение устойчивости модели **. Проследить за механизмом воздействия элементов неопределенности, входящих в модель неявным образом (т. е. минуя вычислительный аппарат математической статистики и теории вероятностей), на показатель устойчивости данной модели далеко не просто.

Но мы можем и не отвлекаться на рассмотрение этого сугубо специального вопроса, тем более что вторая половина проблемы устойчивости — вопрос о способности установившихся внутренних связей динамической системы противодействовать возмущающему (распашивающему эти связи) внешнему воздействию — оказывается не менее сложной, а вся в целом проблема происхождения неустойчивости моделей динамических систем в общей ее постановке далека от разрешения. Причиной этого является сложность и многообразие моделируемых динамических систем, ставящие порой непреодолимые препятствия для аналитического исследования всех этих систем в целом и прогнозирования степени их устойчивости на основе одного только математического их описания и анализа модели. Это препятствие может быть преодолено только эмпирически — путем исследования поведения действительных систем по их моделям, которые для этой цели подвергаются тем или иным преобразованиям [6]. В частности, так можно проанализировать устойчивость той или другой действительной (частной) динамической системы на ее математической модели. «Один из способов, — пишет Р. Беллман, — увериться в правильности математической модели — это посмотреть, что происходит при различных изменениях основных параметров. Такой анализ устойчивости, или анализ чувствительности, всегда является существенным при оценке результатов, полученных из частной модели» [4, стр. 132].

4. Математические модели, получившие столь широкое применение в наших экономико-математических исследованиях и оперативной практике, давно нуждаются в такой экспериментальной проверке, которую совсем

* Термином «чувствительность» в смысле, синонимическом понятию неустойчивости, охотно пользуется Р. Беллман [3, стр. 25, 224, 311; 4, стр. 132].

** На возможность влияния элементов неопределенности, проникающих в математическую модель реального процесса по указанным двум каналам, на показатель устойчивости описываемой ею динамической системы прямо указывает Р. Курант [2, стр. 111].

не трудно было бы организовать при имеющихся сейчас средствах вычислительной техники. Особенно важной такая проверка была бы для моделей нормативного типа, рассчитанных на поиск оптимального режима использования моделируемых динамических систем. В первую очередь это относится к моделям линейного программирования, по которым решаются задачи оптимизации использования наличных хозяйственных ресурсов. Это — наиболее интенсивно разрабатываемый участок экономико-математических исследований, на который отвлечены главные силы этого научного направления и от которого ожидают наибольшей экономической эффективности. К сожалению, главное внимание на этом участке применения экономико-математической методологии привлекли вопросы расчетной технологии — разработка разных модификаций алгоритмов, приводящих изучаемые системы использования ресурсов к экстремальному значению некоторой целевой функции составляющих систему переменных величин и тем самым к нахождению оптимальных планов использования моделируемой системы ресурсов. Эти алгоритмы разрабатываются в изобилии, явно не оправданном реальной потребностью в них, так как различия предлагаемых им модификаций, как правило, несущественны, а преимущество одних перед другим и неясно и с трудом поддается оценке. Показательная же роль самих моделей оптимизации (и их свойства), имеющая неизмеримо большее значение, чем расчетно-технологическая сторона дела, разработана слабо. В частности, никого не заинтересовал вопрос об устойчивости решений по этим моделям, хотя и теоретически и практически он имеет огромное значение, определяя степень пригодности получаемых на их основании планов использования ресурсов, рекомендуемых в качестве оптимальных. Между тем, есть много оснований опасаться, что как раз здесь находится «опасное сечение» моделей линейного программирования, которое способно свести на нет все усилия, затрачиваемые на поиски оптимального решения, и, более того, привести к ложным выводам.

Сама природа моделей линейного программирования, основанных на ряде огрублений и условностей при «списывании» модели с реальной действительности, ею отображаемой, широкое применение в процессе математических преобразований модели различных (часто плохо контролируемых) приемов аппроксимации и ряд других соображений интуитивного и априорного характера * заставляют сомневаться в том, что система внутренних причинно-следственных связей и зависимостей (закономерностей), отраженная в сконструированной таким способом математической модели, способна оказать достаточную сопротивляемость расшатывающему влиянию возмущающих эту систему (внешних) воздействий, т. е. сомневаться в устойчивости таких моделей. Но важнее этих общих соображений, которые имеют законное право претендовать на роль научных гипотез, заслуживающих внимания и экспериментальной проверки, нам представляются отдельные факты из практики (правда, отрывочного характера), проникающие в литературу и показывающие, что в этом пункте действительно находится «опасное сечение» моделей линейного программирования. Приведем лишь два примера.

А. Л. Брудно [7, стр. 313—315], решая по модели линейного программирования задачу о ценах оптимального плана, столкнулся со случаем реальной неустойчивости этой модели, когда незначительные различия в оценке разных способов производства приводили к весьма резким измене-

* Одним из таких соображений является, например, малая вероятность существования динамических систем, не оснащенных специальным механизмом или аппаратом обратной связи, придающим адаптивные свойства этим системам, и тем не менее характеризующихся хорошей устойчивостью против возмущающих систему внешних воздействий.

ниям указанных цен. Автор делает из этого правильный вывод, что пользоваться ценам, вытекающими из полученного по такой модели оптимального варианта плана производства, нужно «весьма осторожно». Вторым примером еще более разительным И. Я. Бирман при решении задачи оптимального плана поставок продукции некоторой отрасли по модели линейного программирования увидел, что «изменение мощности предприятия, расположенного в Красноярске, вызвало изменение в распределении поставок Бахчисарайского завода (Крым) и Ново-Здолбуновского завода (Западная Украина)» [8, стр. 98]. Трудно найти более красочную иллюстрацию неустойчивости полученного «оптимального» плана поставок, рассчитанного по модели и алгоритму, предложенным автором.

Между тем неустойчивость математического решения реальной задачи должна была бы вызвать тревогу, так как она является по крайней мере важным симптомом незащищенности описываемой моделью динамической системы от вторжения возмущающих ее внешних сил, недостаточности ее адаптивной способности относительно внешней среды. По этой причине ни одна ответственная конструкция (будь то новая модель самолета или автомобиля и т. п.), самым тщательным расчетом проверенная на оптимальность всех ее конструктивных параметров, не была бы запущена в производство без ее опытной проверки на устойчивость. И нет никаких оснований освободить от такой проверки решения на оптимум в задачах линейного программирования, на которых могут основываться сугубо ответственные оперативные и плановые решения. Вдвойне опасно не считаться с критерием устойчивости, когда речь идет о решении задач не текущего, диспетчерского порядка, а перспективного характера, связанных (как в рассматриваемом здесь случае) с большими и долгосрочными капитальными вложениями, предопределяющими развитие крупных хозяйственных комплексов (вплоть до народнохозяйственных) на многие годы вперед. А ведь линейное программирование с его совершенно не проверенными по критерию устойчивости моделями претендует сейчас на решение именно таких задач. Поэтому данный вопрос заслуживает, по нашему мнению, более пристального внимания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математика в современном мире. М., «Мир», 1967.
2. Современная математика для инженеров. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Р. Беллман. Процессы регулирования с адаптацией. М., «Наука», 1964.
5. А. М. Летоу. Устойчивость систем автоматического управления. В сб. Автоматизация производства и промышленная электроника. Т. 4, М., «Сов. энциклопедия», 1965.
6. А. А. Фельдбаум, Я. З. Цыпкин. Теория автоматического управления. В сб. [5].
7. Проблемы кибернетики. Вып. 9. М., Физматгиз, 1963.
8. И. Я. Бирман. Оптимальное программирование. М., «Экономика», 1968.

Поступила в редакцию
17 IX 1970