ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1971 том VII, вып. 2

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А. И. СОБОЛЕВ

(Ленинград)

Рассмотрим следующую n-продуктовую модель экономики. Пусть $x_j(t)$ — количество j-го товара в момент времени t; $x_{jk}(t)$ — количество k-го товара, используемого как капитальный ресурс для производства j-го товара; скорость производства j-го товара $\dot{x}_j^+(t) = \sum_k b_{jk}x_{jk}(t)$.

При производстве единицы i-го товара необходимо затратить a_{ij} единиц j-го товара. Тогда скорость потребления j-го товара $\dot{x}_j = \sum_i a_{ij}\dot{x}_i^+(t)$.

Таким образом, скорость накопления j-го товара равна

$$\dot{x}_j(t) = \sum_k b_{jk}x_{jk}(t) - \sum_i a_{ij}\sum_k b_{ik}x_{ik}(t). \qquad (1)$$

Кроме того, должны быть выполнены условия

$$x_j(t) \geqslant \sum_i x_{ij}(t), \qquad (2)$$

$$x_{ij}(t) \geqslant 0. \qquad (3)$$

Если заданы начальные условия $\{x_j(0)\}$ и конечный момент времени T, то эффективной траекторией $\{x_j(t)\}$ будем называть такое решение системы (1) — (3) при начальных условиях $\{x_j(0)\}$, что не существует другого решения $\{\bar{x}_j(t)\}$, для которого $x_j(T) \leqslant \bar{x}_j(T)$ и хотя бы для одного j $x_j(T) < \bar{x}_j(T)$.

Рассмотрим равновесное решение системы (1) — (3), т. е. решение вида

$$x_j(t) = y_j e^{\gamma t}; \quad x_{ij}(t) = y_{ij}e^{\gamma t}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (1) — (3), получим

$$\left.\begin{aligned} \gamma y_j &= \sum_k b_{jk}y_{jk} - \sum_i a_{ij}\sum_k b_{ik}y_{ik}, \\ y_j &\geqslant \sum_i y_{ij}, \\ y_{ij} &\geqslant 0. \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

Нас интересуют ненулевые решения системы (5) и при этом желательно, чтобы γ было максимальным. Поэтому будем искать ненулевое решение задачи $\gamma^* = \max\gamma$,

$$\gamma\sum_i y_{ij} \leqslant \sum_k b_{jk}y_{jk} - \sum_i a_{ij}\sum_k b_{ik}y_{ik}, \quad y_{ij}\geqslant 0. \tag{6}$$

Рассмотрим также задачу об отыскании такого ненулевого вектора p и числа δ^*, что $\delta^* = \min\delta$,

$$\delta p_j \geqslant b_{ij}\Big(p_i - \sum_k a_{ik}p_k\Big), \qquad p_j \geqslant 0. \tag{7}$$

Очевидно, (7) всегда имеет допустимое решение.

Теорема 1. *Пусть $A = \|a_{ij}\| \geqslant 0$; $B = \|b_{ij}\| \geqslant 0$. В каждой строке матрицы B есть ненулевой элемент. Матрица A неразложима и все ее собственные числа по модулю строго меньше 1. Тогда задача* (6) *имеет оптимальное решение. При этом $\gamma^* = \delta^* > 0$.*

Доказательство. Покажем сначала, что задача (6) имеет допустимое решение с $\gamma > 0$. Для этого выберем произвольный строго положительный вектор v и решим систему

$$v = u(E - A) \tag{8}$$

относительно u.

В силу условия, наложенного на собственные числа матрицы A, система (8) имеет решение $u \geqslant 0$. Так как $v > 0$ и в каждой строке матрицы B есть положительный элемент, $\sum\limits_j v_j b_{ij} > 0$ для любого i. Кроме того, так как $u \neq 0$,

$$\sum_i \frac{u_i}{\sum\limits_j v_j b_{ij}} > 0.$$

Положим

$$y_{ij} = u_i v_j \Big/ \sum_j v_j b_{ij};$$

$$\gamma = \Big[\sum_i\Big(u_i \Big/ \sum_j v_j b_{ij}\Big)\Big]^{-1}.$$

Имеем

$$\sum_k b_{ik}y_{ik} = u_i,$$

$$\gamma\sum_i y_{ij} = \Big(\sum_i \frac{u_i}{\sum\limits_j v_j b_{ij}}\Big)^{-1}\sum_i \frac{u_i v_j}{\sum\limits_j v_j b_{ij}} = v_j =$$

$$= u_j - \sum_i a_{ij}u_i = \sum_k b_{jk}y_{jk} - \sum_i a_{ij}\sum_k b_{ik}y_{ik}.$$

Кроме того, так как $u \geqslant 0$, $\{y_{ij}\}$ является ненулевым решением.

Пусть теперь $\{y_{ij}\}$, $\gamma > 0$,— допустимое решение задачи (6) и p, δ — допустимое решение задачи (7). Покажем, что $\gamma \leqslant \delta$. Для этого просуммируем неравенства из (6), домножив их на p_j. С учетом условия (7) получим

$$\gamma\sum_j p_j \sum_i y_{ij} \leqslant \sum_{kj} y_{jk}b_{jk}p_j - \sum_j p_j \sum_i a_{ij} \sum_k b_{ik}y_{ik} =$$

$$= \sum_{ik} y_{ik}b_{ik}\Big(p_i - \sum_j a_{ij}p_j\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \delta\sum_{ik} y_{ik}p_k = \delta\sum_j p_j \sum_i y_{ij}; \quad (\delta-\gamma)\sum_j p_j \sum_i y_{ij} \geqslant 0.$$

Покажем, что $\sum_j p_j \sum_i y_{ij} > 0$. Пусть $\sum_j p_j \sum_i y_{ij} = 0$, тогда $0 = \delta\sum_j p_j \sum_i y_{ij} \geqslant \Big(p_{i_0} - \sum_k a_{i_0k}p_k\Big)\sum_j b_{i_0j}\sum_i y_{ij}$. Если $\sum_j b_{i_0j}\sum_i y_{ij} = 0$, то $\sum_j b_{i_0j}y_{i_0j} = 0$.

Пусть $M = \Big\{i \,\Big|\, \sum_j b_{ij}y_{ij} = 0\Big\}$. Очевидно, $M \neq \{1, \ldots, n\}$, так как в противном случае в силу того, что $\gamma > 0$, мы имели бы $\sum_{ij} y_{ij} = 0$. Кроме того, $i_0 \in M$, следовательно, $M \neq \varnothing$. Из неравенств (6) видно, что для $j \in M$ и $i \notin M$ $a_{ij} = 0$. Но это означает разложимость матрицы A. Следовательно, $\sum_j b_{i_0j}\sum_i y_{ij} > 0$ для любого i_0. Но тогда $(E-A)p = q$, где q — неположительный вектор. Из условия, наложенного на собственные числа матрицы A, имеем $-q = (E-A)\bar{p}$, где $\bar{p} \geqq 0$; $(E-A)(p+\bar{p}) = 0$, т. е. 1 является собственным числом матрицы A. Полученное противоречие показывает, что $\sum_j p_j \sum_i y_{ij} > 0$. Таким образом, $\gamma \leqslant \delta$. А тогда существует конечный $\sup\gamma$. Выберем последовательность γ_k, сходящуюся к $\gamma^* = \sup\gamma$, и последовательность соответствующих им векторов $\{y_{ij}^{(k)}\}$. Неравенства (6) однородны первой степени. Поэтому векторы $\{y_{i,j}^{(k)}\}$ можно считать нормированными, а тогда, в силу компактности, можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Предельный вектор $\{y_{ij}^*\}$, в силу непрерывности, будет соответствовать γ^*, т. е. будет оптимальным решением (6). Аналогично существует оптимальное решение (7).

Пусть γ^* и δ^* взяты из оптимальных решений. При $\gamma > \gamma^*$ не существует требуемого решения системы неравенств (6). А тогда по теореме Гейла об альтернативах [1] существует ненулевое неотрицательное решение системы (7) с $\delta = \gamma$. Так как можно считать, что $\Sigma p_i = 1$, то, в силу непрерывности, система неравенства (7) будет иметь решение и при $\delta = \gamma^*$, т. е. $\delta^* = \gamma^*$.

Следствие 1. Для оптимальных $\{y_{ij}^*\}$, p^*:

$$p_j^*\Big(\gamma^*\sum_i y_{ij}^* - \sum_k b_{jk}y_{jk}^* + \sum_i a_{ij}\sum_k b_{ik}y_{ik}^*\Big) = 0;$$

$$y_{ij}^*\Big(\gamma^* p_j^* - b_{ij}\Big(p_i^* - \sum_k a_{ik}p_k^*\Big)\Big) = 0.$$

Следствие 2. $\sum_j b_{ij}y_{ij}^* > 0$.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 $p^* > 0$.

Доказательство. В силу следствия 2 для любого i найдется такое $j(i)$, что $b_{ij(i)}y_{ij(i)}^* > 0$. Так как $y_{ij(i)}^* > 0$, то по следствию 1: $\gamma^* p_{j(i)}^* = b_{ij(i)}(p_i^* - \sum_k a_{ik}p_k^*)$.

Так как $b_{ij(i)} > 0$, то

$$p_i^* = (\gamma^*/b_{ij(i)})p_{j(i)}^* + \sum_k a_{ik}p_k^*.$$

Если $L = \{i \mid p_i^* = 0\}$ $(L \neq \{1, \ldots, n\})$, то для $i \in L$, $k \notin L$, $a_{ik} = 0$. Так как A — неразложимая матрица, $L = \varnothing$.

Вернемся теперь к системе (1) — (3). Пусть заданы начальные условия $\{x_j(0)\}$ и пусть $\{x_j(t)\}$ — какая-либо эффективная траектория для интервала времени $[0, T]$.

Введем обозначения

$$\alpha_i(T) = \frac{1}{T}\int_0^T x_i(t)e^{-\gamma t}\,dt; \qquad \alpha_{ij}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{ij}(t)e^{-\gamma t}\,dt.$$

Величины $\alpha_i(T)$, $\alpha_{ij}(T)$ являются средними значениями $x_i(t)e^{-\gamma t}$, $x_{ij}(t)e^{-\gamma t}$ на интервале $[0, T]$. Сейчас докажем теорему о сходимости $\alpha_i(T)$ к y_i^*.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть для оптимального* γ *существует единственный набор* $\{y_j\}$, *при котором система* (5) *имеет решение. Если начальные условия* $\{x_j(0)\}$ *таковы, что* $x_j(0) \geqslant cy_j$, *где* $c = \text{const} > 0$, *то при* $T \to \infty$ *для любой эффективной траектории* $\{\alpha_j(T)\}$ *с точностью до скалярного множителя стремятся к* $\{y_j\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\lim_{T\to\infty}\sum_j \alpha_j(T) > 0. \tag{9}$$

Пусть это не так. Тогда найдется последовательность $T_k \to \infty$ и последовательность эффективных траекторий $\{x_j^{(k)}(t)\}$, что

$$\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}\sum_j x_j^{(k)}(t)e^{-\gamma t}\,dt \leqslant \varepsilon_k, \qquad \varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Пусть $M_k = \Big\{t \,\Big|\, \sum_j x_j^{(k)}(t)e^{-\gamma t} \leqslant 2\varepsilon_k\Big\} \cap [0, T_k]$. Множество M_k — непусто, так как по теореме о среднем

$$\varepsilon_k \geqslant \frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}\sum_j x_j^{(k)}(t)\,e^{-\gamma t}\,dt = \sum_j x_j^{(k)}(\bar t)\,e^{-\gamma\bar t},$$

где $\bar t \in [0, T_k]$. Пусть $t_0^{(k)} = \sup M_k$, тогда

$$\varepsilon_k T_k \geqslant \int_0^{T_k}\sum_j x_j^{(k)}(t)\,e^{-\gamma t}\,dt \geqslant \int_{t_0^{(k)}}^{T_k}\sum_j x_j^{(k)}(t)\,e^{-\gamma t}\,dt \geqslant 2\varepsilon_k (T_k - t_0^{(k)})$$

Отсюда $t_0^{(k)} \geqslant \frac{1}{2}T_k$ и $\sum_j x_j^{(k)}(t_0^{(k)}) \leqslant 2\varepsilon_k e^{\gamma t_0^{(k)}}$. Поэтому можно выбрать такое $\tau = \mathrm{const}$, что $t_0^{(k)} > \tau$ при $k \geqslant K$. Рассмотрим следующую траекторию на промежутке $[0, t_0^{(k)} - \tau]$:

$$\tilde x_j(t) = c y_j e^{\gamma t};\qquad \tilde x_{ij}(t) = c y_{ij} e^{\gamma t}.$$

В момент времени $t_0^{(k)} - \tau$ $\tilde x_j(t_0^{(k)} - \tau) = c y_j e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)}$. Теперь надо продолжить траекторию на $[t_0^{(k)} - \tau, t_0^{(k)}]$. Для этого выберем строго положительный вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и найдем вектор $u \geqslant 0$, удовлетворяющий системе $z = u(E - A)$.

Положим

$$\tilde x_{ij}(t) \equiv \frac{c e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)} u_i y_j}{\sum_j y_j b_{ij}}\left(\sum_i \frac{u_i}{\sum_j y_j b_{ij}}\right)^{-1},\quad t \in (t_0^{(k)} - \tau, t_0^{(k)}].$$

Тогда

$$\tilde x_j(t) = \sum_k b_{jk}\tilde x_{jk}(t) - \sum_i a_{ij}\sum_k b_{ik}\tilde x_{ik}(t) =$$

$$= c e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)}\left(\sum_i \frac{u_i}{\sum_j y_j b_{ij}}\right)^{-1}\left(u_j - \sum_j a_{ij}u_i\right) = c_j e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)},$$

где

$$c_j = c\left(\sum_i \frac{u_i}{\sum_j y_j b_{ij}}\right)^{-1} z_j > 0.$$

$$\tilde x_j(t_0^{(k)} - \tau + t) = c y_j e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)} + \int_0^t c_j e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)}\,dt = c y_j e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)} + c_j e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)}\,t.$$

Следовательно,

$$\tilde x_j(t_0^{(k)}) \geqslant c_j\tau\, e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)};$$

$$\tilde x_j(t_0^{(k)}) - x_j(t_0^{(k)}) \geqslant c_j\tau e^{\gamma(t_0^{(k)}-\tau)} - 2\varepsilon_k e^{\gamma t_0^{(k)}} = e^{\gamma t_0^{(k)}}(c_j\tau e^{-\gamma\tau} - 2\varepsilon_k).$$

Так как $\varepsilon_k \to 0$, для достаточно большого k $\tilde{x}_j(t_0^{(k)}) - x_j^{(k)}(t_0^{(k)}) > 0$ при любом j.

Теперь определим траекторию на промежутке $(t_0^{(k)}, T_k]$:

$$\tilde{x}_j(t) = x_j^{(k)}(t) + \tilde{x}_j(t_0^{(k)}) - x_j^{(k)}(t_0^{(k)}); \ \tilde{x}_{ij}(t) = x_{ij}^{(k)}(t).$$

Для любого j имеем:

$$\tilde{x}_j(T_k) = x_j^{(k)}(T_k) + \tilde{x}_j(t_0^{(k)}) - x_j^{(k)}(t_0^{(k)}) > x_j^{(k)}(T_k),$$

что противоречит эффективности $\{x_j^{(k)}(t)\}$. Таким образом, (9) выполнено.

Домножим (1) на p_j^* и просуммируем

$$\sum_j p_j^* \dot{x}_j(t) = \sum_{jk} x_{jk}(t) b_{jk} p_j^* - \sum_{ik} x_{ik}(t) b_{ik} \sum_j p_j^* a_{ij} =$$

$$= \sum_{ik} x_{ik}(t) b_{ik} \Bigl(p_i^* - \sum_j p_j^* a_{ij} \Bigr) \leqslant \gamma \sum_{ik} x_{ik}(t) p_k^* \leqslant \gamma \sum_j p_j^* x_j(t),$$

$$\sum_j p_j^* \dot{x}_j(t) \leqslant \gamma \sum_j p_j^* x_j(t). \qquad (10)$$

Обозначим $w(t) = e^{-\gamma t} \sum_j p_j^* x_j(t)$. Тогда в силу (10)

$\dot{w}(t) = e^{-\gamma t} \Bigl(\sum_j p_j^* \dot{x}_j(t) - \gamma \sum_j p_j^* x_j(t) \Bigr) \leqslant 0$ и так как $p^* > 0$, $x_j(T) e^{-\gamma T} \leqslant$

$\leqslant \text{const}$. Теперь $\alpha_j(T) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T x_j(t)\, e^{-\gamma t}\, dt = \frac{1}{T\gamma} \Bigl[x_j(0) - x_j(T)\, e^{-\gamma T} +$

$$+ \int\limits_0^T \dot{x}_j(t) e^{-\gamma t}\, dt \Bigr] = \frac{1}{T\gamma} \Bigl[x_j(0) - x_j(T) e^{-\gamma T} +$$

$$+ \int\limits_0^T e^{-\gamma t} \Bigl(\sum_k b_{jk} x_{jk}(t) - \sum_i a_{ij} \sum_k b_{ik} x_{ik}(t) \Bigr) dt \Bigr],$$

т. е.

$$\gamma \alpha_j(T) = \frac{x_j(0) - x_j(T) e^{-\gamma T}}{T} + \sum_k b_{jk} \alpha_{jk}(T) - \sum_i a_{ij} \sum_k b_{ik} \alpha_{ik}(T).$$

Кроме того, $\sum_i \alpha_{ij}(T) \leqslant \alpha_j(T), \quad \alpha_{ij}(T) \geqslant 0.$

Легко показать, что $\alpha_j(T)$ ограничено сверху, а тогда в силу (9) и единственности решения системы (5) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое T, что

$$\sum_j \left| \frac{\alpha_j(T)}{\sum_j \alpha_j(T)} - \frac{y_j}{\sum_j y_j} \right| < \varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

Поступила в редакцию
4 IV 1969