

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕЦИФИКИ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ АЛГОРИТМЕ

У. Х. МАЛКОВ, П. А. АХМЕТОВ

(Москва)

В работе рассматривается алгоритм решения общей задачи линейного программирования, матрица условий которой имеет блочно-диагональную структуру с общей связывающей частью. Для таких задач существует специальный метод разложения, описанный в [1]. Другой подход, использующий указанную структуру матрицы условий, рассматривался в [2, 3]. Идея предлагаемого подхода схожа с алгоритмами [2] и [3], но по вычислительной схеме и реализации на ЭВМ существенно отличается от них.

Для решения задачи применяется мультипликативный алгоритм метода последовательного улучшения плана с использованием улучшенной схемы повторения [4]. При этом существенно используется блочно-диагональная структура матрицы условий.

Алгоритм позволяет решать задачи с большим числом условий, при большом числе блоков и значительно сокращает время решения по сравнению с алгоритмами, не учитывающими специальную структуру матрицы условий. При реализации алгоритма на ЭВМ исходная матрица разбивается на k (по числу блоков) подматриц и для каждого блока формируется усеченная задача (см. ниже). Нахождение оптимума общей задачи сводится к последовательному решению усеченных. При переходе от одной усеченной задачи к другой применяется улучшенная схема повторения, позволяющая получить минимальное количество ненулевых элементов в мультипликативном представлении обратной матрицы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим общую задачу линейного программирования

$$\max \left\{ \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^{t_s} c_j^{(s)} x_j^{(s)} \left| \begin{array}{l} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^{t_s} \bar{a}_{ij}^{(s)} x_j^{(s)} = \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m_0, \\ \sum_{j=1}^{t_s} a_{ij}^{(s)} x_j^{(s)} = b_i^{(s)}, \quad i = 1, \dots, m_s, \\ s = 1, \dots, k, \end{array} \right. x_j^{(s)} \geq 0, \right\} \quad (1)$$

или в матричной форме

$$\max \{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}, \quad (1')$$

где матрица A имеет блочно-диагональную структуру с общей связывающей частью

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} \bar{A}^{(1)} & \bar{A}^{(2)} & \dots & \bar{A}^{(k)} \\ \hline A^{(1)} & & & \\ \hline & A^{(2)} & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & A^{(k)} \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

Разобьем матрицу A на k подматриц и обозначим через $D^{(s)}$ матрицу, состоящую из матриц s -го блока и его связывающей части. $D^{(s)}$ имеет структуру

$$D^{(s)} = \begin{array}{c} \bar{A}^{(s)} \\ \hline \\ \hline A^{(s)} \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad s = 1, \dots, k. \quad (3)$$

Здесь $A^{(s)}$ — матрица условий s -го блока, $\bar{A}^{(s)}$ — матрица связывающих условий, относящихся к s -му блоку.

Введем сквозную нумерацию для строк матрицы A и положим

$$\mu_0 = m_0, \quad \mu_1 = \mu_0 + m_1, \dots, \mu_k = \mu_{k-1} + m_k = \sum_{s=1}^k m_s + m_0 = m,$$

где m_0 — число строк, связывающей части; m_s — число строк s -го блока; m — общее число строк матрицы A . Положим $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = \tau_1 + t_2, \dots$

$\dots, \tau_k = \tau_{k-1} + t_k$. Тогда $n = \sum_{s=1}^k t_s$ — число столбцов матрицы A . Пусть P_j — j -й столбец матрицы A . Столбец P_j , относящийся к s -му блоку, имеет вид

$$P_j = (\bar{a}_{\cdot j}^{(s)}, 0, \dots, 0, a_{\cdot j}^{(s)}, 0, \dots, 0)^T, \quad (4)$$

где $\bar{a}_{ij}^{(s)} = (\bar{a}_{1j}^{(s)}, \dots, \bar{a}_{m_0j}^{(s)})$ и $a_j^{(s)} = (a_{\mu_{s-1}+1j}^{(s)}, \dots, a_{\mu_sj}^{(s)})$ — соответственно m_0 - и m_s -мерные векторы, $s = 1, \dots, k$.

2. Обоснование алгоритма. Предположим, что базис составляют векторы

$$P_{n_1}, \dots, P_{n_{m_0}}, \dots, P_{n_m}, \quad (5)$$

образующие базисную матрицу $B = (P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_m})$.

Введем множество индексов: $I = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$, $U_0 = \{n_1, n_2, \dots, n_{m_0}\}$, $I_s = I \setminus U_0$, $V_s = \{\tau_{s-1} + 1, \dots, \tau_s\}$, $U_s = V_s \cap I_s$, $s = 1, \dots, k$.

В множество U_0 входят номера переменных из разных блоков. Все элементы U_0 занимают в базисе первые m_0 позиций, относящихся к связывающей части задачи. V_s — множество номеров переменных s -го блока. Множество U_s содержит номера переменных s -го блока, которые входят в базис, но не являются элементами множества U_0 . Алгоритм построен таким образом, что базисная переменная с номером n_i , $n_i \in V_s$, может занимать в базисе позицию либо своего блока, либо связывающей части

$$n_i \in \begin{cases} U_0, & \text{если } 1 \leq i \leq m_0, \\ U_s, & \text{если } \mu_{s-1} < i \leq \mu_s, s = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (6)$$

В мультипликативном алгоритме матрица, обратная к B , хранится в виде произведения элементарных матриц.

Рассмотрим базисные векторы P_j s -го блока, $j \in U_s$, и предположим, что из векторов P_j , $j \in U_s$, образованы элементарные матрицы E_{r_i} , $r_i = \mu_{s-1} + 1, \dots, \mu_s$. В силу (6) индекс r_i (номер неединичного столбца матрицы E_{r_i}) определяется позицией вектора P_j , $j \in U_s$, в базисе. Пусть $E^{(s)}$ — частичное мультипликативное представление базисной матрицы, составленное из базисных векторов P_j , $j \in U_s$, s -го блока. Тогда $E^{(s)}$ представляется в виде произведений элементарных матриц E_{r_i}

$$E^{(s)} = \prod E_{r_i}, \quad (7)$$

$$\mu_{s-1} < r_i \leq \mu_s,$$

где номера r_i неединичных столбцов матриц E_{r_i} определены только среди номеров строк s -го блока: $\mu_{s-1} < r_i \leq \mu_s$. Неединичный столбец матрицы E_{r_i} может иметь ненулевые элементы только в полосах s -го блока и его связывающей части, а в остальных позициях имеет нулевые элементы. В этом нетрудно убедиться, если учесть, что столбец P_j , относящийся к s -му блоку, имеет вид (4). Элементарные матрицы E_{r_i} , как указано выше, образованы из столбцов P_j , $j \in U_s$, s -го блока. Матрица $E^{(s)}$, состоящая из произведений элементарных матриц E_{r_i} , $r_i = \mu_{s-1} + 1, \dots, \mu_s$, сохранит структуру E_{r_i} , т. е. может иметь ненулевые элементы в пределах s -го блока и его связывающей части.

Пусть имеются частичные мультипликативные представления вида (7) для всех блоков. Образует матрицу Φ , состоящую из произведений $E^{(s)}$, $s = 1, \dots, k$,

$$\Phi = E^{(k)} E^{(k-1)} \dots E^{(1)}.$$

Обозначим через $\bar{X}_j$ произведение матрицы Φ на вектор P_j , для которых индекс $j \in U_0$

$$\bar{X}_j = E^{(s)} P_j, \quad j \in V_s \cap U_0. \quad (8)$$

Преобразование каждого вектора P_j , $j \in V_s \cap U_0$, по (8) равносильно преобразованию вида

$$\bar{X}_j = E^{(s)} P_j, \quad j \in V_s \cap U_0. \quad (9)$$

В самом деле, вектор P_j является столбцом s -го блока. Следовательно, он может иметь ненулевые элементы в тех же строках, что и матрица $E^{(s)}$. Отсюда следует, что при умножении Φ на P_j в преобразованиях участвуют лишь те элементарные матрицы, главные элементы которых находятся в

полосе блока s , и преобразуются только те элементы P_j , которые относятся к полосе блока и его связывающей части, и, следовательно, для их преобразования достаточно умножить матрицу $E^{(s)}$ на P_j . Вектор $\bar{X}_j$ сохранит ту же структуру, что и P_j .

Рассмотрим формирование s -й усеченной задачи. При решении s -й усеченной задачи вводимый в базис вектор и выводимый из него определяются среди векторов s -го блока и преобразованных векторов P_j , $j \in U_0$, по (9). Поэтому матрицу условий s -й усеченной задачи достаточно формировать из матрицы s -го блока, имеющей вид (4), и матрицы $\bar{X}^{(s)}$, состоящей из преобразованных векторов P_j , $j \in U_0$. Заметим, что во время решения s -й усеченной задачи все внебазисные переменные, не относящиеся к s -й задаче, полагаются равными нулю, т. е. векторы из других блоков не могут выбираться для ввода в базис. Предположим, что известны $\bar{X}_j$ для всех $j \in U_0$. Пусть $\bar{X}^{(s)}$ — матрица, состоящая из всех столбцов $\bar{X}_j$, за исключением тех, для которых индекс $j \in V_s \cap U_0$. Тогда в матрицу $\bar{X}^{(s)}$ входят все столбцы $\bar{X}_j$, для которых индекс $j \in U_0 \setminus (V_s \cap U_0)$

$$\bar{X}^{(s)} = (\bar{X}_{n_1}, \dots, \bar{X}_{n_q}), \quad q \leq m_0 \quad (10)$$

и не входят столбцы $\bar{X}_j$, для которых индекс $j \in V_s \cap U_0$.

Образуем матрицу условий s -й усеченной задачи. Для этого (10) присоединим к матрице $D^{(s)}$. Получим расширенную матрицу условий $\bar{D}^{(s)}$ s -го блока, которая и является матрицей условий s -й усеченной задачи

$$\bar{D}^{(s)} = (D^{(s)}, \bar{X}^{(s)}), \quad (11)$$

где матрица $D^{(s)}$ имеет вид (3).

Вектор ограничений s -й усеченной задачи определяется из соотношения,

$$b_{\text{усеч}} = (E^{(s)})^{-1} \tilde{b}, \quad (12)$$

$$\tilde{b} = \Phi b = E^{(k)} E^{(k-1)} \dots E^{(1)} b. \quad (13)$$

Для решения s -й усеченной задачи нужно иметь частичное мультипликативное представление обратной матрицы. Его можно получить из базисных векторов P_j , $j \in U_s \cup U_0$. Базисным векторам P_j , $j \in U_s$, s -го блока соответствует матрица $E^{(s)}$, а остальным базисным векторам P_j , $j \in U_0$, соответствует матрица, состоящая из произведений элементарных матриц, образованных из столбцов (10). Пусть $E^{(0)}$ — матрица, представимая в виде

$$E^{(0)} = E_{r_{m_0}} \dots E_{r_1}, \quad (14)$$

где номера неединичных столбцов элементарных матриц E_{r_i} определены среди строк связывающей части ($1 \leq r_i \leq m_0$). Тогда для решения s -й усеченной задачи с матрицей условий (11) и вектором ограничений (12) достаточно иметь частичное мультипликативное представление обратной матрицы в виде произведений матриц $E^{(0)}$ и $E^{(s)}$

$$B_s^{-1} = E^{(0)} E^{(s)}. \quad (15)$$

Действительно, для вычисления оценок столбцов P_j матрицы $\bar{D}^{(s)}$ нужно иметь оценки условий в позициях связывающей части и s -го блока. Эти оценки получаем из соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} &= \bar{c} B_s^{-1} = (\bar{c} E^{(0)}) E^{(s)} = \\ &= (\pi^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(k)}) E^{(s)} = (\pi^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \pi^{(s)}, \dots, \bar{c}^{(k)}), \end{aligned}$$

где $\bar{c} = (\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(k)})$ — вектор базисных цен: $\bar{c}^{(0)}$ и $\bar{c}^{(s)}$, $s = 1, \dots, k$, —

соответственно m_0 - и m_s -мерные векторы; $\pi^{(0)}$ и $\pi^{(s)}$ — оценки условий связывающей части и s -го блока. Тогда оценка столбца P_j , $j \in V_s$ по (4) будет $\Delta_j = c_j - \bar{c}B_s^{-1}P_j = c_j - (\pi^{(0)}\bar{a}_j^{(s)} + \pi^{(s)}a_j^{(s)})$, а для столбца P_j , $j \in U_0 \setminus (V_s \cap U_0)$, в силу (8) и (10) будет

$$\begin{aligned}\Delta_j &= c_j - \bar{c}B^{-1}P_j = c_j - \bar{c}\left(E^{(0)}\prod_{s=1}^k E^{(s)}\right)P_j = \\ &= c_j - \bar{c}\left(E^{(0)}E^{(s)}\prod_{i \neq s} E^{(i)}\right)P_j = c_j - \bar{\pi}\bar{X}_j.\end{aligned}$$

3. Описание алгоритма. Алгоритм решения (1) сводится к последовательному просмотру усеченных задач. Перед решением усеченной задачи формируется ее матрица условий и вектор ограничений и по векторам, занимающим в базисе позиции блока и связывающей части, образуется частичное мультипликативное представление обратной матрицы. Предположим, что нам известны векторы, которые образуют базис. Пусть ими являются (5). Алгоритм решения усеченной задачи состоит из следующих пунктов.

1. Образует матрицу усеченной задачи путем присоединения (10) к матрице $D^{(s)}$, состоящей из элементов матриц $A^{(s)}$ и $\bar{A}^{(s)}$. Получим расширенную матрицу $\bar{D}^{(s)}$ s -го блока, т. е. (11), которая является матрицей условий s -й усеченной задачи. Заметим, что матрицы $D^{(s)}$ и $\bar{D}^{(s)}$ могут совпадать. Это возможно тогда, когда в позициях $1 \leq i \leq m_0$ базиса находятся искусственные векторы или векторы P_j , $j \in V_s \cap U_0$, только из s -го блока. Вектор ограничений s -й усеченной задачи определим по (12).

2. Находим частичное мультипликативное представление обратной матрицы для базисных векторов P_j , $j \in U_s \cup U_0$, путем повторного ввода в базис этих векторов, для чего применим улучшенную схему повторения. Во время повторения при вводе векторов P_j в базис в качестве главных строк выбираются только строки s -го блока и связывающей части. В качестве главных строк в первую очередь выбираются строки s -го блока, а затем строки связывающей части. Такая очередность выбора главной строки одновременно с применением улучшенной схемы повторения позволяет получить минимальное число ненулевых элементов в (15). После ввода в базис всех векторов P_j , $j \in U_s \cup U_0$, будем иметь частичное мультипликативное представление обратной матрицы, а именно: $B_s^{-1} = E^{(0)}E^{(s)}$.

3. Решаем s -ю усеченную задачу, используя мультипликативный алгоритм. Если при определении номера главного столбца $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$ для всех $j \in V_s \cup U_0$, то переходим к п. 6. При определении номера главной строки r могут встретиться два случая.

1°. Главная строка выбирается среди строк либо s -го блока, либо связывающей части.

2°. Главная строка выбирается среди строк остальных блоков.

В случае 1° продолжаем решение s -й усеченной задачи. В случае 2° переходим к блоку v (v — номер усеченной задачи), строка которого была выбрана в качестве главной. В силу того, что строка v -го блока выбрана в качестве главной, найдется хотя бы один вектор этого блока, занимающий в базисе позицию в связывающей части. Пусть этим вектором будет P_{n_r} . Заменяем вектор P_{n_r} вектором P_k , выбранным в качестве вводимого в базис вектора, а P_{n_r} переместим на r -ю позицию (r — номер главной строки). Тогда вектор P_{n_r} v -го блока займет в базисе позицию своего блока, а вектор P_k из s -го блока — позицию связывающей части. Примем $s = v$ и переходим к п. 4.

4. Если во время решения s -й усеченной задачи в позициях $\mu_{s-1} + 1 \leq i \leq \mu_s$ базиса остались те же векторы, которые были в нем до ее решения, матрица $E^{(s)}$ не изменится. В противном случае находим частичное мультипликативное представление обратной матрицы $E^{(s)}$ относительно базисных векторов $P_j, j \in U_s$.

5. Преобразуем базисные векторы $P_j, j \in V_s \cap U_0$: $\bar{X}_j = E^{(s)} P_j, j \in V_s \cap U_0$. Примем $s = s + 1$ (если $s = k$, положим $s = 1$) и переходим к решению следующей усеченной задачи (п. 1).

6. Проверяем на оптимальность решение (1), если $s = k$ (просмотрен последний блок). Оптимальное решение задачи считается полученным, если при просмотре всех усеченных задач не было сделано ни одной итерации. Переходим к п. 4, если решение (1) не оптимально или $s < k$ (еще не просмотрены все блоки).

Описанный алгоритм реализован в виде программы, написанной на АЛЬФА-языке [5] для ЭВМ БЭСМ-4. Используются оба куба оперативной памяти машины и магнитные барабаны. Возможные размеры решаемых задач: общее количество условий — 450, количество связывающих условий — 50, общее количество ненулевых элементов в усеченной задаче — 850, общее количество переменных в усеченной задаче — 150, количество ячеек, отведенных под усеченную мультипликативную форму усеченной обратной базисной матрицы задачи, — 2650, общее количество ненулевых элементов в исходной матрице — 24 000. Допустимые размеры блоков точно не определены. Они определяются исходя из числа условий в связывающей части. Размеры блока должны быть меньше, чем максимально допустимые размеры усеченной задачи и чем больше количество связывающих условий, тем больше эта разница. Усеченная задача, как показано выше, состоит из матрицы блока (сюда входят и коэффициенты связывающих условий из зоны блока) и из векторов других блоков, занимающих в базисе позиции в строках связывающей части. Рассматриваемая программа состоит из семи барабанных блоков, вызываемых в оперативную память один за другим.

По данной программе было решено несколько практических задач. В частности, задача «Формирование оптимального плана строительно-монтажных работ Минстроя СССР» с размерами: количество блоков — 19, число связывающих условий — 10, размеры блоков — 22×40 , общее число условий в задаче — 434, общее число переменных — 838, общее количество ненулевых элементов — 4700, решалась на БЭСМ-4 за 1 час. 10 мин.

В предлагаемом алгоритме существенный выигрыш во времени по сравнению с мультипликативным алгоритмом получается при решении задач большого размера с большим числом блоков, так как в мультипликативном алгоритме хранится вся обратная матрица в мультипликативной форме, а в этом алгоритме хранению подлежит лишь незначительная часть обратной матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966.
2. К. В. Ким. Об использовании специфики условий задачи в методе улучшения плана. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 1.
3. Р. А. Звягина. Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами. В сб. Оптимальное планирование. Вып. 2. Новосибирск, 1964 (АН СССР. Сиб. отд. Ин-т математики).
4. П. А. Ахметов, У. Х. Малков. Повышение эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода при решении больших задач линейного программирования на ЭВМ. Экономика и матем. методы, 1970, т. VI, вып. 3.
5. А. П. Ершов, Г. И. Кожухин, И. В. Поттосин. Руководство к пользованию системой АЛЬФА. Новосибирск, «Наука», Сиб. отд., 1968.

Поступила в редакцию
2 XII 1970