

## ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, СРАВНЕНИЕ ОТСЕЧЕНИЙ

А. А. ВОТЯКОВ

(Москва)

### ВВЕДЕНИЕ

Естественным обобщением множества натуральных чисел на прямой  $R^1$  является множество замкнутых взаимно непересекающихся отрезков  $[\lambda_j, \bar{\lambda}_j]$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\lambda_j \leq \bar{\lambda}_j < \lambda_{j+1}$ .

Операции взятия целой и дробной части числа в этом случае естественно обобщаются

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \begin{cases} \alpha, & \lambda_j \leq \alpha \leq \bar{\lambda}_j, \\ \bar{\lambda}_j, & \bar{\lambda}_j < \alpha < \lambda_{j+1}, \end{cases} \\ \bar{[\alpha]} &= \bar{\lambda}_j, & \lambda_j \leq \alpha < \lambda_{j+1}, \\ ]\alpha[ &= \begin{cases} \alpha, & \lambda_j \leq \alpha \leq \bar{\lambda}_j, \\ \lambda_j, & \bar{\lambda}_{j-1} < \alpha < \lambda_j, \end{cases} \\ ]\bar{\alpha}[ &= \lambda_j, & \bar{\lambda}_{j-1} < \alpha \leq \bar{\lambda}_j, \\ \{\alpha\} &= \alpha - [\alpha], & \}\alpha\{ = ]\alpha[ - \alpha. \end{aligned}$$

Под целой частью вектора  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  пространства  $R^p = R_1^1 \times R_2^1 \times \dots \times R_p^1$ , на каждой компоненте которого определены операции взятия целых и дробных частей числа, будем понимать вектор  $([\alpha_1]_1, [\alpha_2]_2, \dots, [\alpha_p]_p) = [(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)]^*$ , соответственно под дробной частью — вектор  $\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\}^* = (\{\alpha_1\}_1, \{\alpha_2\}_2, \dots, \{\alpha_p\}_p)$ . Естественным обобщением целочисленной задачи математического программирования: найти  $\min \{\varphi(x) \mid x \in \mu$ , вектор  $\check{\psi}(x)$  — целочисленный,  $\mu$  — некоторое непустое множество из  $R^n$ ,  $\check{\psi}(x)$  — непрерывное отображение  $R^n$  в  $R^p$ , является задача, получающаяся из нее заменой ограничения целочисленности более слабым ограничением: вектор  $\{\check{\psi}(x)\}^* = 0$ . Задачу такого вида будем называть квазицелочисленной задачей математического программирования.

Особое место занимают задачи с линейной функцией цели\*. Дело в том, что решение задачи: найти

$$\min \{(c, x) \mid x \in \mu, \text{ вектор } \{\check{\psi}(x)\}^* = 0\} \quad (1)$$

эквивалентно решению непрерывной задачи: найти

$$\min \{(c, x) \mid x \in [\mu]\}, \quad (2)$$

$[\mu]$  — выпуклая оболочка точек из  $\mu$ , удовлетворяющих ограничениям квазицелочисленности.

\* Последующие рассуждения справедливы и для случая вогнутой функции цели  $\varphi(x)$ .

Предположим, что мы располагаем однозначным отображением (алгоритмом решения), ставящим в соответствие каждой задаче: найти

$$\min \{(c, x) \mid x \in \mu\}. \quad (3)$$

Некоторое решение ее  $\bar{x}$ . Иногда  $\bar{x}$  удовлетворяет всем ограничениям (1), и если это случается, то  $\bar{x} \in [\mu]$ . В общем случае  $\bar{x} \notin [\mu]$  и, следовательно, должна существовать гиперплоскость  $(f, x) = f_0$ , строго отделяющая  $\bar{x}$  от выпуклого множества  $[\mu]$ , точнее говоря, для некоторых  $f$  и  $f_0$

$$\{(f, x) \mid x \in [\mu]\} \geq f_0 > (f, \bar{x}).$$

Дополнительное ограничение  $(f, x) \geq f_0$  сужает множество допустимых планов (3), отсекая от  $\mu$  часть, содержащую  $\bar{x}$ , но не содержащую точек, удовлетворяющих ограничениям квазицелочисленности. Возникает надежда на то, что путем последовательного отсекаания от  $\mu$  частей, не содержащих квазицелочисленных точек, удастся за конечное число шагов получить задачу, непрерывное решение которой будет удовлетворять всем ограничениям исходной.

Одной из основных проблем, возникающих при реализации этих соображений в метод решения целочисленных и квазицелочисленных задач, является проблема рационального выбора отсекающих. В настоящей статье затрагиваются только некоторые вопросы теории отсекающих. Круг конкретно рассматриваемых вопросов ограничен в основном линейными отсекающими. Конструктивные результаты получены только для линейных задач.

### 1. УПОРЯДОЧЕНИЕ ОТСЕКАЮЩИХ

Отсечение  $(f, x) \geq f_0$  порождает целый класс отсекающих  $(f, x) \geq m$ , где  $m$  — любое число интервала  $(f_0, (f, \bar{x}))$ . Величина  $m - (f, \bar{x})$  характеризует эффективность (глубину) отсекающего. В целях скорейшего продвижения к решению целесообразно отдавать предпочтение отсекающим большей глубины. Это соображение наводит на мысль об упорядочении множества отсекающих. Следующие два определения отражают два обычных в этом направлении подходов. Обозначим бинарное отношение, задаваемое определением 1, через  $\rho_0$ , а определением 2 — через  $\rho_c$ .

**Определение 1.** Отсечение  $(f, x) \geq f_0$  сильнее отсекающего  $(f', x) \geq f'_0$ , если

$$\{x \in \mu \mid (f', x) \geq f'_0\} \supseteq \{x \in \mu \mid (f, x) \geq f_0\}.$$

**Определение 2.** Отсечение  $(f, x) \geq f_0$  сильнее отсекающего  $(f', x) \geq f'_0$ , если  $\min \{(c, x) \mid x \in \mu; (f, x) \geq f_0\} \geq \min \{(c, x) \mid x \in \mu; (f', x) \geq f'_0\}$ .

Легко видеть, что бинарные отношения  $\rho_0$  и  $\rho_c$ , соответствующие этим отношениям, и рефлексивны, и транзитивны. Отношение  $\rho_c$  имеет смысл для любой пары отсекающих, тогда как  $\rho_0$  определено не всегда. Между  $\rho_0$  и  $\rho_c$  тесная внутренняя связь:  $\rho_c$  является продолжением  $\rho_0$  на множество всех пар отсекающих. Существует целый класс продолжений  $\rho_0$  на множество всех пар отсекающих.

**Определение 2\*.** Отсечение  $(f, x) \geq f_0$  сильнее отсекающего  $(f', x) \geq f'_0$  относительно функционала  $(d, x)$ , если

$$\min \{(d, x) \mid x \in \mu, (f, x) \geq f_0\} \geq \min \{(d, x) \mid x \in \mu, (f', x) \geq f'_0\}.$$

Бинарное отношение, задаваемое этим определением, обозначим через  $\rho_d$ .

Будем говорить, что для пары отсекающих выполняется бинарное отношение  $\rho_1 \cap \rho_2$ , если для этой пары выполняется и  $\rho_1$ , и  $\rho_2$ .

**Теорема 1.**

$$\bigcap_d \rho_d = \rho_0.$$

Доказательство. Достаточно показать, что отношение  $\bigcap_a \rho_a$  определено только на тех парах отсечений, на которых определено  $\rho_0$ . Докажем это. Если отсечение  $(f, x) \geq f_0 \bigcap_a \rho_a$  сильнее  $(f', x) \geq f'_0$ , то при любом  $d$   $(f, x) \geq f_0 \rho_a$  сильнее  $(f', x) \geq f'_0$ . Полагая  $d = f'$ , имеем:  
 $\min \{(f', x) \mid (f, x) \geq f_0, x \in \mu\} \geq \min \{(f', x) \mid (f', x) \geq f'_0, x \in \mu\}$ ,  
 следовательно,  $\{x \in \mu \mid (f, x) \geq f_0\} \subseteq \{x \in \mu \mid (f', x) \geq f'_0\}$ , что и требовалось доказать.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОТСЕЧЕНИИ

Если  $\{\check{\psi}(\bar{x})\}^* \neq 0$ , то для некоторого  $i \in 1, 2, \dots, p$  множество  $\{x \in \mu \mid [\psi(\bar{x})]_i < \psi_i(x) < ]\psi_i(\bar{x}) [i\} \neq \emptyset$  и не содержит допустимых планов (1), поэтому

$$[\mu] \subseteq \mu_i(\bar{x}) = (\{x \in \mu \mid \psi_i(x) \geq [\psi_i(\bar{x})]_i\}, \{x \in \mu \mid \psi_i(\bar{x}) \geq ]\psi_i(\bar{x}) [i\}).$$

Здесь и в дальнейшем через  $\psi_i(s)$  будет обозначаться  $i$ -я компонента отображения  $\check{\psi}(x)$ ; через  $(\mu_1, \mu_2)$  — выпуклая оболочка множеств  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Множество  $\mu_i(\bar{x}) = (\mu, \mu)$  только тогда, когда  $\{x \in \mu \mid [\psi_i(\bar{x})]_i < \psi_i(x) < ]\psi_i(\bar{x}) [i\}$  не содержит крайних точек множества  $(\mu, \mu)$ , поэтому переход от  $(\mu, \mu)$  к  $\mu_i(\bar{x}) = (\mu, \mu)$  осуществляет отсечение на  $\mu$ , так как каждая крайняя точка  $(\mu, \mu)$  является точкой множества  $\mu$ . Назовем это отсечение выпуклым. Выпуклое отсечение порождает довольно широкий класс линейных отсечений. Действительно, если  $(f, x)$  достигает строгого минимума на  $(\mu, \mu)$  в точке  $\bar{x} \in [\mu]$ , то для некоторого  $i$   $\bar{x} \in \mu_i(\bar{x})$  и, следовательно,  $\min \{(f, x) \mid x \in \mu_i(\bar{x})\} > (f, \bar{x})$ . Величина  $f_0 = \min \{(f, x) \mid x \in \mu_i(\bar{x})\}$  является оценкой допустимой глубины отсечения, для вычисления которой достаточно решить две непрерывные задачи: найти  $\min \{(f, x) \mid x \in \mu_i^+(\bar{x})\}$ ; найти  $\min \{(f, x) \mid x \in \mu_i^-(\bar{x})\}$ , где  $\mu_i^+(\bar{x}) = \{x \in \mu \mid \psi_i(x) \geq ]\psi_i(\bar{x}) [i\}$ ,  $\mu_i^-(\bar{x}) = \{x \in \mu \mid \psi_i(x) \leq [\psi_i(\bar{x})]_i\}$ .

Далее будут исследованы свойства отсечений

$$(f, x) \geq \min \{(f, x) \mid x \in \mu_i(\bar{x})\} \tag{4}$$

в применении к задаче: найти  $\min (c, x)$  при

$$Ax \geq a, \quad a \leq 0, \quad c \geq 0, \quad x \geq 0, \tag{5}$$

вектор  $(Bx + b)$  — целочисленный (вектор  $\{(Bx + b)\}^* = 0$ ).

Задача (5) имеет несколько специальный вид в части, касающейся вида непрерывной компоненты, и имеет более общий вид ограниченной целочисленности (квазицелочисленности). Для приведения к виду (5) задачи: найти  $\min (c, x)$  при  $Ax \geq b$ ;  $i$ -я компонента целочисленна, если  $i \in I$ , имеющей ограниченное непрерывное решение, необходимо решить непрерывную часть задачи, сдвинуть ее решение  $\bar{x}$  в начало координат и осуществить некоторое невырожденное линейное преобразование пространства  $y = B'x$ . Исходные ограничения целочисленности перейдут при этом в ограничения:  $i$ -я компонента вектора  $(B')^{-1} y + \bar{x}$  целочисленна, что позволяет записать их в виде целочисленных ограничений (5). Заметим попутно, что строки матрицы  $(B')^{-1}$  линейно независимы, следовательно, независимыми будут и строки матрицы  $B$ . Линейная независимость строк матрицы  $B$  в дальнейшем не используется, поэтому откажемся от этого свойства в пользу общности, а (5) будем называть линейной задачей (квази) целочисленного программирования.

### 3. АБСОЛЮТНОЕ СРАВНЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ОТСЕЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ КВАЗИЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

**Лемма 1.** Отсечение  $(f, x) \geq f_0$  сильнее отсечения  $(f', x) \geq f_0'$  если вектор  $(1/f_0)f \leq (1/f_0')f'$ .

**Доказательство.** Неравенство  $(1/f_0)f \leq (1/f_0')f'$  при  $x \geq 0$  влечет неравенство  $(1/f_0)(f, x) \leq (1/f_0')(f', x)$ , следовательно,

$$\{Ax \geq a | x \geq 0, (f, x) \leq f_0\} \subseteq \{Ax \geq a | x \geq 0, (f', x) \geq f_0'\},$$

что и доказывает лемму.

Приведенное в лемме достаточное условие  $\rho_0$ -сравнимости отсечений (5) является необходимым и достаточным условием  $\rho_0$ -сравнимости отсечений задачи: найти

$$\min(c, x), x \geq 0, c \geq 0, \text{ вектор } \{(Bx + b)\}^* = 0. \quad (6)$$

Для (6) величина  $\min\{(f, x) | x \in \mu_i(\bar{x}) = (\mu_i^+(0), \mu_i^-(0))\}$  может быть вычислена непосредственно

$$\begin{aligned} \min\{(f, x) | x \in \mu^-(0)\} &= \min\left\{(f, x) | x \geq 0, \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \leq -\{b_i\}_i\right\} = \\ &= \begin{cases} \min\left\{f_j \frac{\{b_i\}_i}{|b_{ij}|} \mid j \in I_i^-\right\}, & \text{если } \{j \in 1, 2, \dots, n | f_j < 0, b_{ij} \geq 0\} = \emptyset, \\ -\infty, & \text{если } \{j \in 1, 2, \dots, n | f_j < 0, b_{ij} \geq 0\} \neq \emptyset, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $I_i^- = \{j \in 1, 2, \dots, n | b_{ij} < 0\}$ ;

$$\min\{(f, x) | x \in \mu_i^+(0)\} = \min\left\{(f, x) \mid \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \geq \{b_i\}_i\right\} =$$

$$\begin{aligned} &= \min\left\{f_j \frac{\{b_i\}_i}{b_{ij}} \mid j \in I_i^+\right\}, \text{ если } \{j \in 1, 2, \dots, n | f_j < 0, b_{ij} \geq 0\} = \emptyset, \\ &= -\infty, \text{ если } \{j \in 1, 2, \dots, n | f_j < 0, b_{ij} \geq 0\} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

где  $I_i^+ = \{j \in 1, 2, \dots, n | b_{ij} > 0\}$ . Величина  $\min\{(f, x) | x \in \mu_i(0)\}$  отличается от  $-\infty$  тогда и только тогда, когда  $f \geq 0$  и совпадает в этом случае с

$$\Delta_i(f) = \min\left[\left\{f_j \frac{\{b_i\}_i}{|b_{ij}|} \mid j \in I_i^-\right\} \cup \left\{f_j \frac{\{b_i\}_i}{b_{ij}} \mid j \in I_i^+\right\}\right]. \quad (7)$$

Неравенство  $(f, x) \geq \Delta_i(f)$  при  $\Delta_i(f) < 0$  является отсечением для (6), которое в дальнейшем будет называться простейшим отсечением.

Для простейшего отсечения (7) равносильно неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{f_j}{\Delta_i(f)} &\geq \frac{|b_{ij}|}{\{b_i\}_i} (j \in I_i^+), \\ \frac{f_j}{\Delta_i(f)} &\geq \frac{b_{ij}}{\{b_i\}_i} (j \in I_i^-), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{f_j}{\Delta_i(f)} \geq 0 = \frac{b_{ij}}{\{b_i\}_i} (j \in I_i^0 = \{j \in 1, 2, \dots, n | b_{ij} = 0\}).$$

Согласно (7),

$$\min\left\{\frac{1}{\{b_i\}_i} \sum_{j \in I_i^+} b_{ij}x_j + \frac{1}{\{b_i\}_i} \sum_{j \in I_i^-} |b_{ij}|x_j \mid x \in \mu_i(0)\right\} = 1,$$

следовательно, неравенство

$$\frac{1}{\} b_i \{ }_i \sum_{j \in I_i^+} b_{ij} x_j + \frac{1}{\} b_i \{ }_i \sum_{j \in I_i^-} |b_{ij}| x_j \geq 1 \quad (9)$$

является простейшим отсечением. Из леммы 1 и (8) следует, что отсечение (9), известное в таком виде, как отсечение Гомори,  $\rho_0$ -сильнее любого простейшего отсечения  $(f, x) \geq \Delta_i(f)$ . Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Простейшие отсечения образуют частично упорядоченное множество относительно сравнения  $\rho_0$ , в котором сильнейшими отсечениями являются отсечения Гомори.*

Следствие 1. Если  $\mu = \{x \in R^n | x \geq 0\}$ , то

$$\begin{aligned} (\mu_i^+(0), \mu_i^-(0)) = \left\{ x \geq 0 \mid \frac{1}{\} b_i \{ }_i \sum_{j \in I_i^-} |b_{ij}| x_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{\} b_i \{ }_i \sum_{j \in I_i^+} b_{ij} x_j \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Крайние точки  $\mu_i^+(0)$ ,  $\mu_i^-(0)$  совпадают с точками пересечения ребер конуса  $x \geq 0$  с границами слоя

$$- \{b_i\}_i \leq \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \leq \} b_i \{ }_i,$$

следовательно, число их вместе с несобственными точками равно  $n$ .

Пусть  $(P, x) = P_0$ , где  $P_0 > 0$ , проходящая через них плоскость, тогда  $(\mu_i^+(0), \mu_i^-(0)) = \{x \geq 0 | (P, x) \geq P_0\}$ . Неравенство  $(P, x) \geq P_0$   $\rho_0$ -сильнейшее в классе простейших отсечений  $(f, x) \geq \Delta_i(f) = \min \{(f, x) | x \in \mu_i^+(0), \mu_i^-(0)\}$  и совпадает поэтому с отсечением Гомори. Следствие доказано.

Множество  $\mu = \{x \in R^n | Dx \geq d\}$ , где  $D$  — невырожденная матрица размера  $n \times n$ , определяет в  $R^n$  невырожденный конус с вершиной в  $\bar{x}$ , где  $\bar{x} = D^{-1}d$ .  $n$  ребер конуса  $\mu$  пересекают границы слоя

$$[(B_i, \bar{x}) + b_i]_i \leq (B_i, \bar{x}) + b_i \leq ]((B_i, \bar{x}) + b_i)_i \quad (10)$$

в  $n$  точках (вместе с несобственными). Обозначим через  $(g, x) = g_0$ , где  $g_0 \geq (g, \bar{x})$ , плоскость, проходящую через эти точки. Из предыдущего следствия вытекает следующее.

**Следствие 2.** Неравенство  $(g, x) \geq g_0$  является отсечением Гомори в произвольной системе координат, если  $g_0 > (g, \bar{x})$ .

**Замечание.** Следствие 2 позволяет распространить определение отсечения Гомори на тот случай, когда  $\bar{x}$  не принадлежит множеству допущений Гомори на тот случай, когда  $\bar{x}$  не принадлежит множеству допущений системы  $Ax \geq a$ , например на случай, когда  $Dx \geq d = D\bar{x}$  является некоторой подсистемой исходной системы. В дальнейшем эта возможность будет использована.

Простота построения отсечения Гомори и экстремальность его свойств делают естественным применение его в процессах решения (5).

#### 4. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Пусть  $R$  — некоторое отсечение на  $\mu$ ; обозначим через  $\mu_R$  множество точек  $\mu$ , удовлетворяющих  $R$ .

**Определение 3.** Отсечение  $R$   $\rho_0$ -сильнее отсечения  $R'$ , если  $\mu_R \subseteq \mu_{R'}$ . Согласно этому определению, отсечение Гомори  $(g, x) \geq g_0 > (g, \bar{x})$  от-

носителю слоя (10)  $\rho_0$ -слабее линейного отсечения (4), в котором  $(f, x) = (g, x)$ . В свою очередь линейное отсечение (4)  $\rho_0$ -слабее выпуклого отсечения, порождающего его.

Класс выпуклых отсечений обладает важным свойством: соотношение  $[\mu] \subseteq \mu' \subseteq \mu$  влечет

$$[\mu] \subseteq \mu'(\bar{x}) \subseteq \mu_i(\bar{x}), \tag{11}$$

согласно которому использование более сильных отсечений на этапах, предшествующих введению выпуклого отсечения, приводит к усилению последнего. Это свойство процессов, использующих выпуклые отсечения, будем называть в дальнейшем транзитивностью.

**Лемма 2.** Если  $P$  — конечный процесс, использующий линейные отсечения (4) и приводящий к решению (5), то существует конечный процесс  $P'$ , использующий выпуклые отсечения и решающий ту же задачу.

Доказательство очевидно.

Транзитивность процессов, использующих линейные отсечения (4), вытекает из (11). Действительно,

$$\min \{(f, x) \mid x \in [\mu]\} \geq \min \{(f, x) \mid x \in \mu'(\bar{x})\} \geq \min \{(f, x) \mid x \in \mu_i(\bar{x})\},$$

т. е. использование более сильных отсечений на этапах, предшествующих введению линейного отсечения (4), приводит к усилению последнего.

**Лемма 3.** Если  $P$  — конечный процесс, использующий отсечение Гомори и приводящий к решению (5), то существует конечный процесс  $P'$ , применяющий линейные отсечения (4), решающий ту же задачу.

Доказательство очевидно.

**Лемма 4.** Если  $P$  — конечный процесс, использующий выпуклые отсечения и приводящий к решению (5), то существует конечный процесс  $P'$ , применяющий отсечения Гомори и решающий ту же задачу.

Доказательство. Множество  $\mu_i(\bar{x}) = (\mu_i^+(\bar{x}), \mu_i^-(\bar{x}))$  при  $\mu = \{x \geq 0 \mid Ax \geq a\}$  является многогранником:  $\mu_i(\bar{x}) = \{x \geq 0 \mid Ax \geq a, Dx \geq d\}$ . Поставим в соответствие каждому такому представлению  $\mu_i(\bar{x})$

число строк матрицы  $(D \mid d)$ ; среди них существует, очевидно, минимальное представление  $(D_k, x) \geq d_k$  минимального представления является отсечением Гомори. При  $\mu_i^-(\bar{x}) = \emptyset$  (аналогично при  $\mu_i^+(\bar{x}) = \emptyset$ ) ограничения  $Dx \geq d$  в минимальном представлении совпадают с ограничением  $(B_i, x) + b_i \geq \lceil (B_i, x) + b_i \rceil$ , являющимся отсечением Гомори, отсекающим узловое решение непрерывной задачи:  $\min \{(B_i, x) \mid x \in \mu\}$ .

Рассмотрим множество  $\mu_k = \{x \in \mu_i(\bar{x}) \mid (D_k, x) = d_k\}$ , крайние точки  $\mu_k$  лежат на границе слоя (10), а размерность его равна  $n - 1$  (следствие минимальности представления), поэтому хотя бы одна из его границ размерности  $n - 2$  лежит либо в  $\mu_i^+(\bar{x})$ , либо в  $\mu_i^-(\bar{x})$ . Будем полагать для определенности,

что она лежит в  $\mu_i^+(\bar{x})$ . Как граница  $\mu_k$  она имеет вид  $\{x \in \mu_k \mid (A_i, x) = a_i\}$ , как граница  $\mu_i^+(\bar{x})$  —

$$\{x \in \mu \mid (A_i, x) = a_i, (B_i, x) + b_i = \lceil (B_i, \bar{x}) + b_i \rceil\}.$$

Спроектируем  $R^n$  на плоскость так, чтобы многообразие  $\{(A_i, x) = a_i, (D_k, x) = d_k\}$  спроектировалось в точку  $A$  (см. рис. 1), тогда  $P_r\{(D_k, x) = d_k\} = AD$ ,  $P_r\{(A_i, x) = a_i\} = AA'$ ,  $P_r\{(B_i, x) + b_i = \lceil (B_i, \bar{x}) + b_i \rceil\} = AB$ ,  $P_r\{(B_i, x) + b_i = \lceil (B_i, \bar{x}) + b_i \rceil\} = DB$ . В точку  $D$

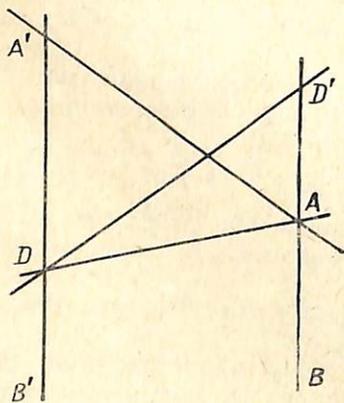


Рис. 1

спроектируется хотя бы одна крайняя точка  $M_k$ , например  $\bar{x}_1 \in \bar{U}_i(\bar{x})$ . Как крайняя точка  $M_k$ ,  $x_1$  является точкой пересечения некоторого ребра многогранника  $M$  и ограничения  $(D_k, x) = d_k$ , поэтому существуют  $i_1, i_2, \dots, \dots, i_{n-1}$ , такие, что

$$x_1 \in \{(A_{i_1}, x) = a_{i_1}, (A_{i_2}, x) = a_{i_2}, \dots, (A_{i_{n-1}}, x) = a_{i_{n-1}}\} = L_1.$$

Точки ребра  $L_1$  спроектируются в точки прямой  $DD'$ , где  $D'$  — проекция пересечения ребра  $L_1$  с правой границей слоя (10). Точка пересечения ребра  $L_1$  с гиперплоскостью  $(A_{i_1}, x) = a_{i_1}$  лежит внутри слоя (10), поэтому отсечение Гомори, порожденное слоем (10) и конусом  $M = \{x \in R_n \mid (A_{i_1}, x) \geq a_{i_1}, (A_{i_2}, x) \geq a_{i_2}, \dots, (A_{i_{n-1}}, x) \geq a_{i_{n-1}}\}$ , совпадает с ограничением  $(D_k, x) \geq d_k$ . Лемма доказана. Из лемм 2 — 4 вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.** *Конечный процесс, использующий отсечения Гомори и решающий (5), существует тогда и только тогда, когда существует конечный выпуклый процесс, решающий ту же задачу.*

### 5. ВОЗМОЖНОСТИ ПРОЦЕССОВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ВЫПУКЛЫЕ ОТСЕЧЕНИЯ

Каждая точка границы  $(M_i^-(\bar{x}), M_i^+(\bar{x}))$ , где  $M$  — выпукло,  $M_i^-(\bar{x}) \neq \emptyset, M_i^+(\bar{x}) \neq \emptyset$ , либо является точкой границы множества  $M$ , тогда она принадлежит  $M_i^-(\bar{x}) \cup M_i^+(\bar{x})$ , либо лежит внутри слоя:  $[\psi_i(\bar{x})]_i \leq \leq \psi_i(\bar{x}) \leq ]\psi_i(\bar{x}) [$ .

Всякое допустимое решение (1)  $\tilde{x} \in M_i^-(\bar{x}) \cup M_i^+(\bar{x})$ , следовательно, верна следующая лемма.

**Лемма 5.** *Множество допустимых решений выпуклой квазицелочисленной задачи (1), расположенных на границе множества  $M$ , совпадает с множеством допустимых решений, расположенных на границе усеченного множества  $(M_i^+(\bar{x}), M_i^-(\bar{x}))$ , если множества  $M_i^+(\bar{x}), M_i^-(\bar{x})$  не пусты.*

Среди непустых множеств вида  $\{x \in M \mid (A_{i_s}, x) = (A_{i_s}, \tilde{x}) = b_{i_s}, s = 1, 2, \dots, k\}$ , где  $M = \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$ , существует минимальное. Назовем его минимальной граничной компонентой, содержащей  $\tilde{x}$ . Легко видеть, что выпуклое отсечение на  $M$  осуществляет одновременно выпуклое отсечение на тех граничных компонентах множества  $M$ , которое оно затрагивает. Назовем крайнюю точку  $[M]$  доступной процессу, использующему выпуклые отсечения, если при некотором таком процессе эта точка становится крайней.

**Лемма 6.** *Если точка  $\tilde{x} \in M'$ , где  $M'$  — минимальная граничная компонента, содержащая  $\tilde{x}$ , размерности  $k$ , доступна процессу, использующему выпуклые отсечения, то для некоторой последовательности функционалов:  $\varepsilon_s y_s(x) = (B_{i_s}, x) + b_{i_s}$ , где  $\varepsilon_s = \pm 1, s = 1, 2, \dots, k$ , вектор  $(y_1(\tilde{x}), y_2(\tilde{x}), \dots, y_k(\tilde{x}))$  является лексикографически максимальным в  $[M']$ , причем*

$$y_s(\tilde{x}) = \begin{cases} \overrightarrow{[(B_{i_s}, \tilde{x}) + b_{i_s}]_{i_s}}, & \text{если } \varepsilon_s = 1, \\ \overleftarrow{[\varepsilon_s (B_{i_s}, \tilde{x}) + b_{i_s}]_{i_s}}, & \text{если } \varepsilon_s = -1. \end{cases}$$

**Доказательство.** Обозначим через  $M_n'$  множество, остающееся от  $M'$  после осуществления  $n$  отсечений процесса, в ходе которого точка  $\tilde{x}$  становится крайней. Обозначим через  $n_1$  номер шага, на котором  $\tilde{x}$  выходит на границу. По лемме 5,  $M_{n_1}'$  совпадает либо с  $(M'_{n_1-1})_{i_1}^+(\tilde{x}_{n_1-1})$ , либо с  $(M'_{n_1-1})_{i_1}^-(\tilde{x}_{n_1-1})$ . Обозначим через  $\varepsilon_1 y_1(x)$  функционал  $(B_{i_1}, x) + b_{i_1}$ , где  $\varepsilon_1 = -1$  в первом случае и  $\varepsilon_1 = +1$  — во втором. Минимальным граничным множеством для  $\tilde{x}$  в  $M'_{n_1}$  является, очевидно, множество

$M'' = \{x \in M'_{n_1} | (B_{i_1}, x) + b_{i_1} = (B_{i_1}, \tilde{x}) + b_{i_1}\}$ , каждая точка которого удовлетворяет двум соотношениям  $y_1(x) = \max\{y_1(x) | x \in M'_{n_1}\}$ ,

$$y_1(x) = \begin{cases} \overrightarrow{[(B_{i_1}, \tilde{x}) + b_{i_1}]_{i_1}}, & \text{если } \varepsilon_1 = 1, \\ \overleftarrow{[(B_{i_1}, \tilde{x}) + b_{i_1}]_{i_1}}, & \text{если } \varepsilon_1 = -1. \end{cases}$$

Если размерность  $M'$  была равной 1, то лемма доказана.

Предположим, что лемма верна для любого  $k < l$  и что размерность  $M'$  равна  $l$ , тогда размерность  $M''$  равна  $l - 1$ . По индуктивному предположению для  $\tilde{x} \in M''$  лемма верна, но тогда она верна и для  $k = l$ . Лемма доказана полностью.

Назовем допустимое решение  $\tilde{x}$ , крайнее в  $[M]$ , лексикографически крайним, если для некоторой последовательности функционалов  $\varepsilon_s y_s = (B_{i_s}, x) + b_{i_s}$ ,  $\varepsilon_s = \pm 1$ ,  $s = 1, 2, \dots, p$ , вектор  $(y_1(\tilde{x}), y_2(\tilde{x}), \dots, y_p(\tilde{x}))$  является лексикографически максимальным на  $[M']$ , где  $M'$  — минимальная граничная компонента, содержащая  $\tilde{x}$ .

**Теорема 4.** *Допустимое решение (5) доступно выпуклому процессу тогда и только тогда, когда оно является лексикографически крайним.*

**Доказательство.** Необходимость условий теоремы следует из леммы 6, достаточность — из теоремы 3 и конечности алгоритма Гомори для смешанной целочисленной задачи.

Теорема 4 без особого труда может быть обобщена на случай квазицелочисленной задачи, квазицелочисленность которой удовлетворяет равенствам  $[a] = [\bar{a}]$ ,  $|a| = |\bar{a}|$ , т. е.  $a_j = \bar{a}_j$ . В остальных случаях теорема не верна.

На рис. 2 показан пример множества с точкой, недоступной процессам, использующим выпуклые отсечения (точка  $A$ ). Прямая  $BC$  реализует выпуклое отсечение, в данном случае оно совпадает с отсечением Гомори.

**Следствие.** Каждое допустимое решение линейной целочисленной задачи с целочисленностью булевского типа доступно выпуклому процессу.

Доказательство следствия очевидно. Интересно оно тем, что позволяет подвести базу под вопросы сводимости одних целочисленных задач к дру-

гим. В частности, следствие наводит на мысль об использовании в вычислительной практике методов ускорения алгоритма Гомори путем использования разумных гипотез.

Предположим, что некоторое допустимое решение  $\tilde{x}$  оптимально. Для проверки предположения образуем новую задачу: найти  $\min(c, x) + \lambda(c, \tilde{x})$  при  $x + \lambda\tilde{x} \geq 0$ ,  $A(x + \lambda\tilde{x}) \geq a$ , вектор  $B(x + \lambda\tilde{x}) + b$  целочисленный,  $\lambda = \{0, 1\}$ .

Легко видеть, что эта задача эквивалентна (5), но отличается от нее большим множеством лексикографически крайних целочисленных точек.

#### ОТНОСИТЕЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ ОТСЕЧЕНИЙ, СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА

Ограничения целочисленности в отличие от ограничений квазицелочисленности могут быть наделены алгебраической структурой. Так, присоединение ограничения  $(b', x) + b'_0$  — целое число, где  $(b', x) + b'_0$  — элемент модуля  $I_\zeta$  над кольцом целых чисел, порожденного линейными формами

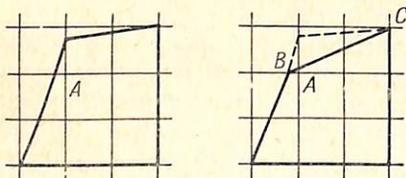


Рис. 2

$(B_1, x) + b_1, (B_2, x) + b_2, \dots, (B_p, x) + b_p$ , не изменяет множества допустимых решений (5), увеличивая в общем случае множество точек, доступных выпуклому процессу. Множество элементов модуля  $I\zeta$  совпадает, очевидно, с множеством функционалов, порожденных билинейной формой  $y(B|b)(x; 1)$  и множеством целочисленных точек пространства  $R^p (y \in [R^p])$ . В некоторых случаях функционал  $(b', x)$  достигает максимума на  $M$  в той же крайней точке, что и  $(c, x)$ . Привлечение такого дополнительного ограничения целочисленности для построения выпуклого отсечения весьма заманчиво. С одной стороны, по лемме 5 оно может оказаться эффективным, т. е. сделать внутреннюю точку  $\tilde{x}$  граничной, с другой стороны, оно совпадает с отсечением Гомори. Из полного класса задач, обладающих такими функционалами (класс задач, приводимых к виду, удобному для полного округления), здесь рассматривается только задача Гомори: найти

$$\min (c, x) \quad \text{при} \quad Ax \geq a, x \geq 0, \tag{12}$$

вектор  $(Ax - a)$  целочисленный, вектор  $x$  целочисленный. Общий элемент модуля  $I\zeta$  этой задачи определяется билинейной формой

$$y \left( \begin{array}{c|c} A & -a \\ \hline E_n & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in [R^{n+p}].$$

Каждое решение системы  $y \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} \geq 0$  определяет функционал, для которого отсечение Гомори имеет вид

$$\sum_{i=1}^p y_i (A_i, x) + \sum_{i=1}^n y_{p+i} x_i \geq \left\{ \sum_{i=1}^p y_i a_i \right\}. \tag{13}$$

Перейдем к сравнению отсечений (13) относительно функции цели  $(c, x)$ . Величину  $\min \{(c, x) | x \in M, (d, x) \geq d_0\}$  назовем ценой отсечения  $(d, x) \geq d_0$ .

**Лемма 7.** Цена отсечения  $(d, x) \geq d_0$  на конусе  $x \geq 0$  ( $c \geq 0$ ) совпадает с решением задачи: найти  $\max \frac{d_0}{\varepsilon}$  при  $d \leq \varepsilon c$ . Доказательство очевидно.

Рассмотрим задачу: найти

$$\max \frac{\sum_{i=1}^p y_i a_i + z_0}{\varepsilon}$$

при

$$0 \leq y \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} \leq \varepsilon c, \tag{14}$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^p y_i a_i + z_0 \leq 1,$$

вектор  $y$  — целочисленный,  $z_0$  — целое число. Это задача поиска элемента модуля  $I\zeta$ , порождающего отсечение Гомори с наибольшей ценой на конусе  $x \geq 0$ . Назовем задачу (14) сопряженной.

**Теорема 5.** Для любого допустимого решения прямой  $x$  задачи (12) и любого допустимого решения сопряженной задачи  $(y, z_0, \varepsilon)$  справедливо неравенство

$$(c, x) \geq \frac{(a, y) + z_0}{\varepsilon}.$$

Доказательство очевидно.

Следствие. Прямая задача (12) не имеет решений, если решение сопряженной задачи неограничено.

Поступила в редакцию  
16 V 1968