ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1971
том VII, вып. 2

К ВОПРОСУ УСТАНОВЛЕНИЯ ПОЛИТИКИ ЦЕН В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

П. П. ВАСИЛЬЕВ

(Москва)

При реализации товаров нередко возникают ситуации, когда снижение объема реализаций товара вследствие падения спроса приводит к тому, что определенное количество товаров не реализуется и «залеживается», что приводит к омертвлению капитала, а, следовательно, к прямым убыткам как вследствие порчи товара при хранении, так и из-за излишних расходов на хранение. Практика товарооборота показывает, что среднее значение количества товара, реализуемого в единицу времени, определяется: во-первых, потребностью, а, во-вторых, ценой реализации товара (продажной ценой). По-видимому, сбыт большинства товаров подчиняется такой закономерности, что с течением времени реализации сбыт падает. Это происходит либо в результате некоторого насыщения потребности населения, либо вследствие снижения качества товара. В этом смысле существен моральный износ и «старение» товара. Кроме того, сбыт большинства товаров определяется ценой товара. Как правило, на более дешевые товары имеется больший спрос.

Таким образом, очевидно, что в целях предотвращения «залеживания» товаров, следует поднимать величину сбыта при помощи некоторых управляющих воздействий. В качестве управляющего параметра выбираем цену реализации товара.

Поставим задачу так: определить условия, которым должна удовлетворять оптимальная цена товара, т. е. такая цена реализации товара, при которой торгующая организация получает максимальную прибыль за некоторое, определенное время t^*. За критерий, определяющий оптимальность реализации, выбираем функцию, выражающую чистый доход от реализации

$$F(c,\ w) = \overline{w}(t^*)(c-s) - qt^* - s[H - \overline{w}(t^*)]P(t^*), \tag{1}$$

где t^* — время реализации; s — себестоимость единицы товара; c — цена реализации товара; q — средние накладные расходы в единицу времени, связанные с реализацией данного товара; $\overline{w}(t)$ — среднее значение количества товара, реализованного к моменту времени t; $P(t^*)$ — вероятность того, что товар, не реализованный к моменту t^*, потеряет свое качество и будет изъят из реализации; H — наличный запас данного товара на момент времени $t = 0$.

Пусть количество проданного в единицу времени товара есть случайная величина, линейно зависящая от времени t, т. е.

$$w(t) = \alpha(c) + \beta(c)t, \tag{2}$$

где $\alpha(c)$ — некоторое начальное значение сбыта; $\beta(c)$ — скорость изменения сбыта.

Тогда математическое ожидание значения сбыта в единицу времени равно

$$Mw(t) = m_w = M_\alpha + tM_\beta = m_\alpha + m_\beta t. \tag{3}$$

Это можно рассматривать как случай, когда среднее значение сбыта подвержено некоторому дрейфу, который и выводит значение сбыта из допустимой области [1].

Корреляционная функция процесса сбыта имеет вид

$$K_w(t,\ t') = D_\alpha + (t + t')K_{\alpha\beta} + tt'D_\beta. \tag{4}$$

M_α, M_β, D_α, D_β — математические ожидания и дисперсии величин α и β.

Дисперсия значения сбыта будет равна

$$K_w(t,\ t) = Dw = \sigma_w^2 = D\alpha + 2tK_{\alpha\beta} + t^2D_\beta. \tag{5}$$

Используя (5), выражение (4) можно записать в виде

$$K_w(t, t') = D_w + \frac{1}{2}\frac{dDw}{dt}(t' - t). \tag{6}$$

Таким образом, если нестационарный случайный процесс изменения сбыта товара можно аппроксимировать линейной случайной функцией вида (2), то в этом случае сам процесс изменения сбыта можно характеризовать ограниченным числом постоянных числовых параметров $[M_\alpha, M_\beta, D_\alpha, D_\beta, K_{\alpha\beta}]$.

Предположим, что процесс реализации товара по цене c происходит до тех пор, пока величина сбыта превышает некоторое значение ω_0. Предельное значение ω_0 может быть задано априорно. В частности, можно полагать ω_0 равным $q / (c - s)$. Это означает, что при величине сбыта ω_0, равном такому значению, прибыль от реализации данного товара неотрицательна. В противном случае, т. е. при $w(t) < \omega_0$ выручка от реализации товара (при $c > s$) не покрывает затрат на создание товара и расходов по самой реализации.

Поскольку среднее значение сбыта $w(t)$ есть величина, зависящая от времени, то вероятность того, что реализация товаров прибыльна, зависит от времени t. И для любого заданного момента времени t_i можно написать выражение вероятности того, что в момент t_i сбыт будет не ниже ω_0

$$P_{t_i} = P_{t_i}(w \geqslant \omega_0) = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} f_{t_i}(w)\,dw, \tag{7}$$

где $f_{t_i}(w)$ — функция плотности распределения значений сбыта товаров в момент времени t_i (в i-м сечении случайной величины $w(t)$).

Подставляя (2) в (1), получаем следующее выражение для функции прибыли от реализации товара за отрезок времени от 0 до t^*

$$F(c, \alpha, \beta) = (c - s)\int\limits_0^{t^*}[\bar\alpha(c) + \bar\beta(c)t]\,dt -$$

$$- qt^* - s\left[H - \int\limits_0^{t^*}[\bar\alpha(c) + \beta(c)t]\,dt\right]P(t^*), \tag{8}$$

где $\bar\alpha(c) = M\alpha = m_\alpha$, $\bar\beta(c) = M\beta = m_\beta$.

Пусть нам априорно известно, что случайные величины α и β имеют нормальные распределения. Тогда сбыт $w(t)$ также распределен нормально.

Поскольку вероятность P_t меняется со временем, вследствие зависимости случайной величины сбыта от времени, то функция плотности распределения времени безубыточной реализации товаров $f(t)$, т. е. момента времени, когда значение сбыта упадет до ω_0, может быть получена следующим образом.

Она равна

$$f(t) = \frac{d}{dt}(1 - P_t) = \frac{d}{dt}V_t, \tag{9}$$

где V_t — вероятность того, что сбыт товара упал ниже предельного, т. е. вероятность убыточной реализации товара.

Если

$$f_t(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_w} E^{\frac{-[w-Mw]^2}{2\sigma_w^2}} \tag{10}$$

то

$$f(t) = -\frac{d}{dt}\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_w} e^{\frac{-[w-Mw]^2}{2\sigma_w^2}} dw =$$

$$= \frac{\dfrac{d\sigma w}{dt}\displaystyle\int_{\omega_0}^{\infty}\exp\left[-\frac{(w-Mw)^2}{2\sigma_w^2}\right]dw - \int_{\omega_0}^{\infty}\sigma_w \frac{\sigma_w^2\cdot 2(w-Mw)\dfrac{dMw}{dt} + 2\sigma_w\dfrac{d\sigma_w}{dt}(w-Mw)^2}{2\sigma_w^4} E^{\frac{-(w-Mw)^2}{2\sigma_w^2}} dw}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_w} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_w^2}\left\{\frac{d\sigma_w}{dt}\int_{\omega_0}^{\infty} e^{\frac{-(w-Mw)^2}{2\sigma_w^2}} dw + \sigma_w \frac{dM_w}{dt} e^{\frac{-(\omega_0-Mw)^2}{2\sigma_w^2}} + \frac{d\sigma w}{dt}(\omega_0 - Mw)\times\right.$$

$$\left.\times e^{\frac{-(\omega_0-Mw)^2}{2\sigma_w^2}} - \frac{d\sigma w}{dt}\int_{\omega_0}^{\infty} e^{\frac{-(w-Mw)^2}{2\sigma_w^2}} dw\right\}.$$

Окончательно получаем

$$f(t) = \frac{\sigma_w \dfrac{dMw}{dt} - \dfrac{d\sigma_w}{dt}(Mw - \omega_0)}{\sigma_w^2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(Mw-\omega_0)^2}{2\sigma_w^2}}. \tag{11}$$

В теории надежности $f(t)$ определяется как плотность распределения времени безотказной работы элемента [2].

Какое же наивыгоднейшее время реализации товара по цене c?

Если подходить с позиций теории надежности, то t^* можно определить, как время начала массовых отказов $t_н$, т. е. $t_н(t^*)$ в этом случае определяет точку, в которой ускорение изменения плотности распределения максимально. Отсюда получаем, что t^* есть наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} = 0. \tag{12}$$

Поясним наше утверждение. В точке t^* функция $f(t)$ имеет максимальную вторую производную. Это означает, что мы фиксируем тот момент времени, когда плавный и пологий участок кривой $f(t)$ резко увеличивает свой наклон. Именно с этого момента резко увеличивается скорость возрастания плотности вероятности убыточной реализации товара.

Однако, очевидно, в зависимости от конкретной постановки задачи момент времени t^* можно также выбирать путем задания значения вероятности $V_t = p$.

Если $w(t)$ имеет нормальное распределение, а функция плотности распределения порчи с течением времени равна $\varphi(t)$ $(\varphi(t) \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$, то функция $F(c, \overline{w})$ в этом случае принимает вид

$$F(c, \alpha, \beta) = (c - s)\left[\bar{\alpha}(\bar{c})\, t^* + \bar{\beta}(\bar{c})\,\frac{(t^*)^2}{2}\right] - qt^* -$$

$$- sH \int\limits_0^{t^*} \varphi(t)\,dt + s \int\limits_0^{t^*} \left[\bar{\alpha}(c)\, t + \bar{\beta}(c)\,\frac{t^2}{2}\right] dt \int\limits_0^{t^*} \varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (13)$$

Оптимальное значение продажной цены единицы товара c^* и наивыгоднейшее время реализации t^* определяются как решение системы уравнений

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} = 0, \qquad (14)$$

$$\frac{dF(c, \alpha, \beta)}{dc} = 0 \qquad (15)$$

при условии, что $s < c \leqslant c_0$, где c_0 — максимальная цена реализации (максимум продажной цены).

Рассмотрим теперь два частных случая, которые несомненно являются хорошей моделью действительных ситуаций.

1. Пусть мы имеем равномерную линейную случайную функцию, тогда дисперсия величины сбыта не зависит от времени, поскольку скорость изменения сбыта есть величина не случайная. Тогда

$$Mw(t) = M\alpha + \beta t, \qquad (16)$$

$$\omega_0 = M\alpha + \beta m_t, \qquad (17)$$

$$\sigma_w = \sigma_\alpha = |\beta|\,\sigma_t. \qquad (18)$$

Определяем математическое ожидание m_t и дисперсию σ_t времени безубыточной реализации товара

$$m_t = \frac{\omega_0 - M\alpha}{\beta}, \quad \sigma_t = \frac{\sigma_w}{|\beta|}. \qquad (19)$$

Подставляя (16), (17), (18) в выражении плотности $f(t)$, получаем

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t}\, E^{\frac{-(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}}. \qquad (20)$$

Видно, что при неслучайной скорости изменения сбыта, время безубыточной торговли имеет нормальное распределение.

В этом случае дифференцируя трижды (20), получаем уравнение

$$2\,\frac{t - m_t}{\sigma_t^4} - \frac{t - m_t}{\sigma_t^2}\left[\left(-\frac{t - m_t}{\sigma_t^2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma_t^2}\right] = 0,$$

решение которого

$$t^* = m_t - \sigma_t\sqrt{3}. \qquad (21)$$

Это означает, что по истечении времени t^* следует опять произвести корректировку цены из условия оптимальности реализации.

2. Пусть теперь дисперсия сбыта зависит от времени, а α является неслучайной величиной. В этом случае

$$Mw(t) = \alpha + M\beta t, \tag{22}$$

$$\sigma_w = t\sigma_\beta. \tag{23}$$

Время безубыточной реализации товаров $t = (\omega_0 - \alpha) / \beta$ будет случайной величиной. Функцию плотности распределения вероятности $f(t)$ величины t получаем, подставляя (22) и (23) в (11).

Она имеет вид

$$f(t) = \frac{k\Theta a}{t^2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{\Theta}{t} - 1\right)^2\right], \tag{24}$$

где

$$\Theta = \frac{|\omega_0 - \alpha|}{M\beta}, \tag{25}$$

$$a = \frac{M\beta}{\sigma_\beta}. \tag{26}$$

Поскольку скорость снижения сбыта β, очевидно, ограничена $[\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2]$ и по предположению нормально распределена, то вследствие усеченности распределения, нормирующий множитель k равен

$$k = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\beta_2 - M\beta}{\sigma_\beta}\right) - \Phi\left(\frac{\beta_1 - M\beta}{\sigma_\beta}\right)}, \tag{27}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x E^{-z^2/2}\, dz. \tag{28}$$

Распределение (24) является также типичным для безотказной работы при износе и разрегулировании, для выполнения работы, для усталостной долговечности и т. д. [2]. В этом случае t^* есть первый положительный корень уравнения 6-й степени вида

$$At^6 + Bt^5 + Ct^4 + Dt^3 + Et^2 + Ft + G = 0, \tag{29}$$

где

$$\begin{gathered} A = -24;\; B = -36a^2\theta;\; C = -12a^4\theta^2 + 48a^2\theta^2; \\ D = 27a^4\theta^3 - a^6\theta^3;\; E = 3a^6\theta^4 - 15a_4\theta^4; \\ F = -3a^6\theta^5;\; G = a^6\theta^6. \end{gathered} \tag{30}$$

Таким образом, оптимальное значение цены реализации товара определяется как решение уравнения (15) при условии, что $s < c \leqslant c_0$ и t^* есть первый положительный корень уравнения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. N. Girba. Optimal Control of Processes Subject to Linear Trends. The Journal of Industrial Engeneering, 1967, v. 18, N 1.

2. Г. В. Дружинин. Об исследовании надежности технических систем с учетом процессов приближения к отказам. В сб. Автоматическое управление и вычислительная техника. Вып. 7. М., «Машиностроение», 1967.

Поступила в редакцию
18 VII 1968