ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ

Б. С. ВЕРХОВСКИЙ

(Москва)

Рассматривается задача оптимального проектирования ирригационной системы, ориентированной на использование незарегулированного стока двух рек. Вероятности реализации пары водностей Q^j первой реки и Q_k второй реки задается числами p_{jk},

$$\sum_{j,k} p_{jk}=1.$$

Из первой реки подается в систему u_{jk} воды с удельными затратами ω и из второй реки v_{jk} воды с удельными затратами ε. Величина S — искомая площадь, которая обслуживается ирригационной системой; $\gamma_1 S$, $\gamma_2 S$, ..., $\gamma_i S$, ..., $\gamma_m S$ — площади, отводимые под $1, 2, \ldots, i, \ldots, m$ культуры соответственно. Все γ_i заданы, $\sum_i \gamma_i=1$.

Заданы также потребности по каждой культуре T_i. Излишки продукции хранятся на складах со средней стоимостью хранения единицы i-й продукции в год ω_i; можно трактовать ω_i также как удельные потери при распродаже излишков продукции по более дешевым ценам, либо как потери при использовании в менее эффективных технологических процессах. Если же в какой-либо год урожай i-й культуры меньше T_i, то недостающая продукция приобретается по ценам, приводящим к дополнительным затратам ε_i на единицу продукции. $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{\tau}_i$, $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$, $\hat{\tau}_i$ — удельный доход, затраты и урожайность при орошении и на богаре соответственно, причем урожайность $\tilde{\tau}_i$ достигается при норме орошения ν_i.

Введем параметры оперативного управления $0 \leqslant z^i_{jk} \leqslant 1$, где z^i_{jk} — часть площади, занятая под i-ю культуру, которая орошается с нормой ν_i при реализации пары водностей Q^j, Q_k для первой и второй реки соответственно.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ С ПЕРЕБРОСКОЙ

Найти $S \geqslant 0$, $z^i_{jk} \geqslant 0$, $u_{jk} \geqslant 0$, $v_{jk} \geqslant 0$, доставляющие максимум функционалу

$$S\left[\sum_i \Big(\sum_{j,k} p_{jk} z_{jk}{}^i\Big) a_i + b\right] - \sum_{j,k} p_{jk}(\omega u_{jk}+\varepsilon v_{jk}) -$$
$$-\sum_{j,k} p_{jk} \sum_i \{\omega_i [S(z_{jk}{}^i \xi_i+\zeta_i)-T_i]^+ + \varepsilon_i [T_i - S(z_{jk}{}^i\xi_i+\zeta_i)]^+\}, \tag{1}$$

при условиях

$$0 \leqslant z^i_{jk} \leqslant 1, \tag{2}$$
$$u_{jk} \leqslant Q^j, \tag{3}$$
$$v_{jk} \leqslant Q_k, \tag{4}$$
$$S\sum_i \delta_i z_{jk}{}^i = u_{jk}+v_{jk}, \tag{5}$$

где $a_i \equiv \gamma_i(\tilde{a}_i - \tilde{b}_i - \hat{a}_i + \hat{b}_i)$,

$$b \equiv \sum_i \gamma_i(\hat{a}_i - \hat{b}_i), \qquad \xi_i \equiv \gamma_i(\tilde{\tau}_i - \hat{\tau}_i),$$

$\zeta_i \equiv \gamma_i \hat{\tau}_i, \quad \delta_i \equiv \gamma_i \nu_i,$

$$[a-b]^+ = \begin{cases} a-b, & \text{если} \quad a \geqslant b, \\ 0, & \text{если} \quad a \leqslant b. \end{cases}$$

В качестве критерия рассматривается максимум математического ожидания чистого дохода. Первое слагаемое, входящее в функционал,— математическое ожидание дохода от орошаемого хозяйства, второе — математическое ожидание затрат на подачу воды и третье слагаемое — математическое ожидание дополнительных затрат от несоответствия между потребностями и стохастической производительностью.

Переменные u_{jk} и v_{jk} могут быть найдены из вспомогательной задачи: $\min(\omega u_{jk} + \varepsilon v_{jk})$, $0 \leqslant u_{jk} \leqslant Q^j$, $0 \leqslant v_{jk} \leqslant Q_k$, $u_{jk}+v_{jk} = S\sum_i \delta_i z^i_{jk}$.

Пусть для определенности $\omega \geqslant \varepsilon$. Тогда

$$\min(\omega u_{jk} + \varepsilon v_{jk}) = \varepsilon \min\left(\sum_i \delta_i z_{jk}{}^i S, Q_k\right) + \omega\left(S\sum_i \delta_i z_{jk}{}^i - Q_k\right)^+. \tag{6}$$

Легко проверить, что $(a-b)^+ = {}^1/_2(a - b + |a-b|)$, $\min(a, b) = {}^1/_2(a + b - |a-b|)$.

При этом (6) перепишется в виде

$$\frac{\varepsilon+\omega}{2} S\left(\sum_i \delta_i z_{jk}{}^i\right) + \left(Q_k - \left|S\sum_i \delta_i z_{jk}{}^i - Q_k\right|\right)\frac{\varepsilon-\omega}{2}. \tag{7}$$

Аналогично можно переписать и третье слагаемое функционала (1). В итоге (1) — (5) примет вид

$$\begin{aligned} \max\Biggl\{ & S\left[\sum_i\left(\sum_{j,h} p_{jk} z_{jk}{}^i\right)\rho_i + \zeta\right] - \\ & - \frac{\omega-\varepsilon}{2}\sum_{j,k} p_{jk}\left|S\sum_i \delta_i z_{jk}{}^i - Q_k\right| - \\ & - \frac{1}{2}\sum_i(\omega_i + \varepsilon_i)\sum_{j,k}\left|S(z_{jk}{}^i \xi_i + \zeta_i) - T_i\right|\Biggr\} \end{aligned} \tag{8}$$

при условиях, что

$$S\sum_i \delta_i z_{jk}{}^i \leqslant Q^j + Q_k, \qquad 0 \leqslant z_{jk}{}^i \leqslant 1, \tag{9}$$

где

$$\rho_i \equiv a_i - \frac{\varepsilon+\omega}{2}\delta_i - \frac{\omega_i - \varepsilon_i}{2}\xi_i, \qquad \zeta \equiv b - \frac{1}{2}\sum_i(\omega_i - \varepsilon_i)\zeta_i.$$

В (8) не учтены постоянные величины $-\dfrac{1}{2}\sum\limits_i(\omega_i - \varepsilon_i)T_i - \dfrac{\omega-\varepsilon}{2}EQ_k$, которые не влияют на оптимальное решение, но должны быть приняты во внимание в окончательном результате. Если $\omega = \varepsilon$, то второе слагаемое в (8) обращается в нуль. Если ω_i и ε_i не принимаются во внимание, а заданы лишь потребности в среднем за многолетие по каждой культуре, то в (8) третий член не входит, а к (9) и (2) добавляется еще одно условие

$$S\left(\sum_{j,k} p_{jk} z_{jk}{}^i\right)\xi_i + S\zeta_i \geqslant T_i. \tag{10}$$

Каждая из рассмотренных выше задач путем замены переменных $Sz_{jk}{}^i = x_{ijk}$ может быть сведена к задаче с линейными ограничениями и кусочно-линейным выпуклым вверх функционалом.

ПЕРЕБРОСКА В НЕОДНОРОДНОЙ ЗОНЕ

Рассмотрим задачу на оптимальное использование бассейна двух рек с незарегулированным стоком. Каждая река имеет несколько подкомандных территорий: $l = 1, 2, \ldots, l_1$ — 1-й реки, $l = l_1 + 1, \ldots, l_2$ — 2-й реки, S_l^* — размер l-й подкомандной территории. Каждая территория характеризуется, вообще говоря, аналогичным набором исходной информации, который рассматривался выше; S_l — искомый размер l-й орошаемой территории; $x_{ijk}{}^l$ — параметр оперативного управления по наблюденным реализациям: $0 \leqslant x_{ijk}{}^l \leqslant 1$; u_{jk} — размер переброски (будем полагать, что переброска осуществляется из 2-й реки в 1-ю, если $u_{jk} > 0$, и из 1-й во 2-ю, если $u_{jk} < 0$); ε, ω — удельные затраты на переброску соответственно в 1-ю и во 2-ю реку.

Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$\max\sum_{j,k} p_{jk}\left[\sum_{l=1}^{l_2}\sum_{i=1}^{m_l} S_l(x_{ijk}^l a_{il} + b_{il}) - \varepsilon u_{jk}{}^+ - \omega(-u_{jk})^+\right] \tag{11}$$

при условиях

$$\sum_{l=1}^{l_1}\sum_{i=1}^{m_l} S_l \overset{l}{x}_{ijk}\gamma_{il}\nu_{il} \leqslant Q^j + u_{jk}, \tag{12}$$

$$\sum_{l=l_1+1}^{l_2}\sum_{i=1}^{m_l} S_l \overset{l}{x}_{ijk}\gamma_{il}\nu_{il} \leqslant Q_k - u_{jk}, \tag{13}$$

$$0 \leqslant S_l \leqslant S_l^*, \tag{14}$$

$$0 \leqslant \overset{l}{x}_{ijk} \leqslant 1, \tag{15}$$

$$-Q^j \leqslant u_{jk} \leqslant Q_k, \tag{16}$$

где $a_{il} \equiv \gamma_{il}(\tilde{a}_{il} - \tilde{b}_{il} - \hat{a}_{il} + b_{il})$, $b_{il} \equiv \gamma_{il}(\hat{a}_{il} - \hat{b}_{il})$.

Задаче (11)—(16) эквивалентна следующая задача линейного программирования

$$\max\left\{\sum_{l,i,j,k} p_{jk} y_{jk}{}^{il} a_{il} - \frac{\varepsilon-\omega}{2}\sum_{j,k} p_{jk}u_{jk} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon+\omega}{2}\sum_{j,k} p_{jk}v_{jk}\right\} + \sum_l S_l b_l. \qquad b_l \equiv \sum_i b_{il}, \tag{17}$$

$$\sum_{l=1}^{l_1}\sum_i \delta_{il} y_{jk}{}^{il} - u_{jk} \leqslant Q^j, \qquad \delta_{il} \equiv \gamma_{il}\nu_{il}, \tag{18}$$

$$\sum_{l=l_1+1}^{l_2}\sum_i \delta_{il} y_{jk}{}^{il} + u_{jk} \leqslant Q_k, \tag{19}$$

$$0 \leqslant S_l \leqslant S_l^*, \tag{20}$$

$$-Q^j \leqslant u_{jk} \leqslant Q_k, \tag{21}$$

$$S_l - y_{jk}{}^{il} \geqslant 0, \tag{22}$$

$$v_{jk} - u_{jk} \geqslant 0, \tag{23}$$

$$u_{jk} + v_{jk} \geqslant 0, \tag{24}$$

$$y_{jk}{}^{il} \geqslant 0. \tag{25}$$

Условия неотрицательности v_{jk} следуют из (23) и (24), которые эквивалентны условию $|u_{jk}| \leqslant v_{jk}$. Так как ищется максимум, а коэффициенты при всех v_{jk} отрицательны, то $|\overset{(0)}{u_{jk}}| = \overset{(0)}{v_{jk}}$ [1]. Легко проверить, что

$$\frac{\varepsilon-\omega}{2}\sum_{j,k} p_{jk}\overset{(0)}{u_{jk}} + \frac{\varepsilon+\omega}{2}\sum_{j,k} p_{jk}|\overset{(0)}{u_{jk}}| = \sum_{j,k} p_{jk}[\varepsilon u_{jk}{}^+ + \omega(-u_{jk})^+].$$

Пусть найдено оптимальное решение (17)—(25) — $\overset{(0)}{S_l}$, $\overset{il(0)}{y_{jk}}$. Покажем, как найти оптимальное решение (11)—(16).

Если $S_l^{(0)} = 0$, то в силу (22) $y_{jk}^{il\,(0)} = 0$. Тогда $x_{ijk}^{l\,(0)} = 0$. Если $S_l^{(0)} \neq 0$, то $\overset{l(0)}{x_{ijk}} = \overset{il(0)}{y_{jk}} / \overset{(0)}{S_l}$. Когда размеры задачи (17)—(25) не позволяют применить к ней существующие программы для ЭВМ, при построении специального алгоритма ее решения может быть принято во внимание, например, следующее свойство [2].

Пусть (j, k) — фиксированы и фиксированы S_l, $l = 1, \ldots, l_2$ (условия (20) выполнены) и пусть

$$\varphi_{jk}(S_1, \ldots, S_{l_2}) = \max \left(\sum_{l,\, i} y_{jk}^{il} a_{il} - \frac{\varepsilon - \omega}{2} u_{jk} - \frac{\varepsilon + \omega}{2} v_{jk} \right)$$

при условиях (18), (19), (21)—(25). Тогда по каждому S_l функция φ_{jk} непрерывна и выпукла вверх. Функция

$$\Phi(S_1, \ldots, S_{l_2}) = \sum_{j,\, k} p_{jk}\varphi_{jk}(S_1, \ldots, S_{l_2}) + \sum_{l=1}^{l_2} S_l b_l$$

также непрерывна и выпукла вверх по всем S_l. Тогда алгоритм нахождения максимума функционала (17) при условиях (18)—(25) сводится к нахождению

$$\max \Phi(S_1, \ldots, S_{l_2}), \quad 0 \leqslant S_l \leqslant S_l^*.$$

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ И СРЕДНИЕ УРОЖАЙНОСТИ

Помимо условий (11)—(16) рассмотрим еще спрос на продукцию по каждой i-й культуре в данной зоне. Пусть, как и прежде, T_i — среднемноголетний спрос на i-ю продукцию. Тогда к условиям (11)—(16) добавляются новые

$$\sum_{l=1}^{l_2} S_l \left[\left(\sum_{j,\, k} p_{jk} x_{ijk}^{l} \right) \xi_{il} + \zeta_{il} \right] \geqslant T_i. \tag{26}$$

В результате решения приведенных выше задач можно подсчитать $p^{(i)}$ — обеспеченность орошения i-й культуры и среднюю урожайность $\tau^{(i)}$ по каждой культуре для (1)—(5)

$$p^{(i)} = \sum_{j,\, k} p_{jk} [z_{jk}^{i(0)}], \qquad \tau^{(i)} = \left(\sum_{j,\, k} p_{jk} z_{jk}^{i(0)} \right) (\tilde{\tau}_i - \hat{\tau}_i) + \hat{\tau}_i. \tag{27}$$

Аналогично подсчитываются: $p_l^{(i)}$ — обеспеченность орошения i-й культуры l-й территории, $\tau_l^{(i)}$ — средняя урожайность i-й культуры на l-й территории, $u^{(12)}$ и $u^{(21)}$ — средние объемы перебросок из 1-й реки во 2-ю и из 2-й в 1-ю соответственно

$$p_l^{(i)} = \sum_{j,\, k} p_{jk} [x_{ijk}^{l(0)}], \tag{28}$$

$$\tau_l^{(i)} = \left(\sum_{j,\, k} p_{jk} x_{ijk}^{l(0)} \right) (\tilde{\tau}_{il} - \hat{\tau}_{il}) + \hat{\tau}_{il},$$

$$u^{(12)} = \sum_{j,\, k} p_{jk} (-u_{jk}^{(0)})^+,$$

$$u^{(21)} = \sum_{j,\, k} p_{jk} (u_{jk}^{(0)})^+.$$

Квадратные скобки в (27) и (28) означают целую часть числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. S. Verkhovsky. Optimal Complex Use of Controled Water Resources of a Basin. Proceedings International Symposium on Mathematical Models in Hydrology. Warsaw, 1971.
2. B. S. Verkhovsky. Optimal Use of Water Resources of Basins in Irrigations. International Association of Hidraulic Research. Paris, 1971.

Поступила в редакцию
7 I 1971