множества G в точке X^{k+1} определяется следующим образом

$$x_j = x_j^{k+1} + t\,(z_j^{k+1} - x_j^{k+1}), \tag{16}$$

$$x_j = \begin{cases} x_j^{k+1} + t\,(x_j^{k+1} - x_j^{k+1}), & \text{если } (C,\ X^{k+1}) > (C,\ \overline{\overline{X}}{}^{k+1}), \\ x_j^{k+1} - t\,(x_j^{k+1} - x_j^{k+1}), & \text{если } (C,\ X^{k+1}) < (C,\ \overline{\overline{X}}{}^{k+1}). \end{cases} \tag{17}$$

Если $(C,\ X^{k+1}) = (C,\ \overline{\overline{X}}{}^{k+1})$, то для определения направления убывания целевой функции на этом шаге или проверки, получено ли решение, необходимо вычислить координаты вектора Z^{k+1} по формулам (13), (15). Если точка X^{k+1} не является решением задачи, то переходим к $(k+1)$-му шагу.

Изложенный алгоритм имеет стандартную вычислительную схему относительно различных видов ограничений задачи и не требует предварительной подготовки системы. Сходимость алгоритма следует из сходимости методов возможных направлений [2], в которых движение происходит под острым углом к градиенту с выбором оптимальной величины шага вдоль направления убывания целевой функции. К преимуществам алгоритма следует отнести то, что в ходе вычислений работа производится с исходной матрицей задачи, вследствие чего не происходит накапливания ошибки с каждым шагом.

По данному алгоритму составлена программа для ЭВМ Минск-22 и решен целый ряд числовых примеров. Решение всех примеров было получено за конечное число шагов.

Автор считает своим долгом выразить благодарность И. В. Стрельцовой за помощь в реализации предложенного метода на ЭВМ и проведении вычислительных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Boshen. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I, Linear Constraints. J. Soc. Inductr. Appl. Math., 1960, v. 8, N. 1.
2. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1967.
3. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Линейное программирование. Теория и конечные методы. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
7.V.1968

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

И. П. ЛЫТКИН

(Харьков)

1. Изучается следующая задача [1]. Известно заранее производственное задание заводу на месяц (в виде месячного номенклатурного плана). Требуется составить межцеховой календарный план выполнения работ по каждому изделию, вошедшему в номенклатурный план таким образом, чтобы как можно быстрее выполнить весь комплекс работ. Необходимо учесть технологическую последовательность выполнения работ и ограничения на располагаемые ресурсы.

Составим математическую модель задачи. Введем обозначения: i — тип изделия, $i = 1, \ldots, m$; j — вид работ, $j = 1, \ldots n$; C_i — плановое количество изделий i-го типа; b_j — число рабочих мест j-го вида работ, имеющееся на заводе; $x_{ij}(t)$ — кривая распределения (во времени) рабочих мест j-го вида, занятых изготовлением i-го типа изделий; a_{ij} — производительность; $a_{ij} = 1 / t_{ij}$. Тогда составление календарного плана, оптимального по быстродействию, можно свести к задаче минимизации функционала

$$I = \int_0^T dt \tag{1}$$

при условиях

$$\int_0^T x_{ij}(t)\, a_{ij}(t)\, dt \geqslant C_i, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(t) \leqslant b_j, \tag{3}$$

$$x_{ij}(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Физически T означает время выполнения планового задания; минимизация функционала T — досрочное выполнение плана. Если максимизировать количество производственной продукции (2), то получим решение, позволяющее выполнить плановое задание как можно раньше срока.

Итак, выпишем второй вариант задачи

$$I = \sum_{i=1}^{m} \int_0^T a_{ij}(t)\, x_{ij}(t)\, dt = \max \tag{5}$$

где T — фиксировано и означает плановый срок выполнения производственного задания.

Определение 1. Кривые $x_{ij}(t)$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие ограничениям (3), (4) и обращающие (5) в максимум, будем называть оптимальным решением задачи (3) — (5).

Определение 2. Кривые $x_{ij}(t)$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие ограничениям (3), (4), будем называть допустимым решением задачи (3) — (5).

Замечания. 1. Аналогичные математические модели были предложены и изучены в [2, стр. 268—276], где дается метод решения их, состоящий в сведении исходной задачи к задаче линейного программирования.

Подобные проблемы обсуждаются и в зарубежной литературе. В настоящей работе рассматриваются вопросы сходимости, существования оптимальных решений.

2. Задачу (3) — (5) для облегчения можно решать для каждого фиксированного j.

3. Задача (1) — (4) не учитывает технологической последовательности работ. Многие технологические ограничения можно учесть добавлением математических неравенств: $x_{i,\,j+k}(t) - a_{ij}(t) x_{ij}(t) t_{i,\,j+k} \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Физически это означает, что выделяемое число рабочих (рабочих мест) не должно превышать потребного числа их. Произведение $a_{ij} x_{ij} t_{i,\,j+k}$ представляет собой то число рабочих, которое может быть занято работой.

2. Точных методов решения задачи (3) — (5) не существует. Рассмотрим следующий приближенный метод.

Отрезок $[0, T]$ разобьем при помощи точек $0, t_1, \ldots, t_k, t_k, T$, на k равных промежутков. На промежутке $t_\alpha - t_{\alpha-1} = \Delta$, $\alpha = 1, \ldots, k$, функции $x_{ij}(t)$, $a_{ij}(t)$ считаются постоянными и равными $x_{ij\alpha}^{(k)}$, $a_{ij\alpha}^{(k)}$ соответственно.

Тогда (3) — (5) с соответствующими условиями запишется

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{k} a_{ij\alpha}^{(k)} x_{ij\alpha}^{(k)} \Delta = \max, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij\alpha}^{(k)} \leqslant b_j, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

$$x_{ij\alpha}^{(k)} \geqslant 0. \tag{8}$$

Как видим, исходная вариационная задача (3) — (5) сводится к задаче целочисленного линейного программирования (6) — (8). Ясно, что эта редукция только тогда будет правомочна, когда решение $x_{ij\alpha}^{\kappa}$ задачи (6) — (8) при $k \to \infty$ будет сходиться к решению $x_{ij}(t)$ задачи (3) — (5). Изучим вопрос сходимости. Будем считать, что деление отрезка $[0, T]$ на более мелкие осуществляется путем деления каждого отрезка Δ на два равных.

Совокупность чисел $x_{ij\alpha}^{k}$ однозначно определяет кривую $x_{ij}{}^{k}(t)$, принимающую постоянные значения на интервалах $t_\alpha - t_{\alpha-1}$, равные $x_{ij\alpha}^{k}$. Эти кривые — допустимое решение задачи (3) — (5).

Лемма. *Последовательность* $\{C_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, *где*

$$C_k = \max \sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{k} x_{ij\alpha}^{(k)} a_{ij\alpha}^{(k)} \Delta,$$

неубывающая, ограниченная сверху.

Доказательство. Зафиксируем k, $k = 1, 2, \dots$. Пусть совокупность чисел $x_{ij\alpha}^{k}$ есть оптимальное решение задачи (6)—(8). Вычислим значение C_k по (6). Рассмотрим (6)—(8) для $k_1 = 2k$. Ясно, что решение $x_{ij\alpha}^{k}$ задачи (6)—(8) определяет допустимое ее решение при $k_1 = 2k$. Поэтому значение максимизируемой линейной формы (6), достигаемое на допустимом решении и равное C_k, будет не больше значения линейной формы (6), которое получается на оптимальном решении (6)—(8) при $k_1 = 2k$ и равно C_{k_1}, $C_k \leqslant C_{k_1}$.

В силу произвольности k, $k = 1, 2, \dots$, заключаем о неубываемости последовательности $\{C_k\}$.

С учетом ранее введенных обозначений $(x_{ij}^{(k)}(t))$ линейную форму (6) можно записать

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{T} x_{ij}^{(k)}(t)\, a_{ij}^{(k)}(t)\, dt = C_k, \tag{9}$$

где T — фиксированное число; $0 < T < \infty$. Отсюда и из равномерной по k ограниченности произведений $x_{ij}^{(k)} a_{ij}^{(k)}$ следует ограниченность сверху последовательности $\{C_k\}$, $k = 1, 2, \dots$.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть существует решение задачи (6)—(8) при некотором фиксировании k. Тогда существует оптимальное решение задачи* (3)—(5).

Доказательство. Числовая последовательность $\{C_k\}$ неубывающая, ограниченная сверху (см. лемму). Следовательно, она сходится к некоторому пределу C_0 [3, стр. 71], причем $C_0 \geqslant C_k$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда, из (9) и неотрицательности $x_{ij}^{(k)}(t)$, $a_{jj}^{(k)}(t)$ следует сходимость $x_{if}^{(k)}(t)$ по норме пространства L. Это означает также сходимость последовательности $\{x_{ij}^{(k)}(t)\}$ по мере [4, стр. 108]. Из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на $[0, T]$ [4, стр. 91—98], которую обозначим прежним символом, а пределы этих последовательностей — через $\bar{x}_{ij}(t)$. Покажем, что эти функции доставляют решение задачи (3) — (5). Для этого воспользуемся теоремой Лебега [4, стр. 102], из которой следует

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{t=1}^{m} \int_{0}^{T} x_{ij}^{(k)}(t)\, a_{ij}^{(k)}(t)\, dt = \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{T} \lim_{k\to\infty} [x_{ij}^{(k)}(t)\, a_{ij}^{(k)}(t)]\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{T} \bar{x}_{ij}(t)\, a_{ij}(t)\, dt = \lim_{k\to\infty} C_k = C_0.$$

Заметим, что сходимость $\{a_{ij}^{(k)}(t)\}$ к $a_{ij}(t)$ при $k \to \infty$ очевидна. Сходимость же последовательности произведений $\{x_{ij}^{(k)} a_{ij}^{(k)}\}$ при фиксированном $t \in [0, T]$ следует из теоремы Коши [5 стр. 323] это и означает, что $\bar{x}_{ij}(t)$ есть оптимальное решение задачи (3) — (5). Теорема доказана.

Из теоремы вытекает

Следствие. При помощи оптимального решения задачи (6)—(8) при достаточно больших k, $k = 1, 2, \dots$, можно сколь угодно точно аппроксимировать оптимальное решение (3) — (5).

Замечание. Оптимальные кривые $\bar{x}_{ij}(t)$ отыскиваются в классе измеримых ограниченных функций. Из теоремы же следует возможность сколь угодно точной аппроксимации оптимальных решений при помощи кусочно-постоянных принимающих целочисленные значения функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Лыткин. Некоторые задачи календарного планирования. В сб. Научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава Харьковского ин-та радиоэлектроники. Харьков, 1967.
2. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.
3. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. М., «Наука», 1966.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
9.X.1967

ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС, ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ И ФОНДООТДАЧА

Н. М. ВИЛЕНСКИЙ, В. Б. БАТОВ, И. Г. ДЕЙЧ

(Свердловск)

В процессе выбора наиболее эффективного пути развития экономики возникает ряд задач, одна из которых — повышение эффективности использования основных фондов.

В зависимости от типа технического прогресса по-разному изменяются основные фонды и фондоотдача Φ_0. Рост ее означает снижение капитальных вложений для обеспечения планируемого производственного результата и, следовательно, рост эффективности производства.

Динамика фондоотдачи во многом зависит от уровня технической вооруженности труда, которая в наиболее общем виде характеризуется фондовооруженностью и энерговооруженностью. Особенное значение имеет дальнейшая электрификация народного хозяйства и соответственно повышение важнейшей структурной составляющей общего показателя энерговооруженности — электровооруженности труда. С расширением электрификации производства и изменением потребления других видов энергии меняется отраслевая структура основных фондов, что влечет за собой изменение величины их электрооснащенности и энергооснащенности.

Под электрооснащенностью основных производственных фондов $Э_ф{}^0$ понимается расход электрической энергии в тыс. *квт·ч* на 1 тыс. руб. основных фондов в год. Энергооснащенность $W_ф{}^0$ — это суммарный расход первичного топлива, включающий в себя затраты топлива на производство электроэнергии и тепла и непосредственно используемого в технологическом процессе на 1 тыс. руб. основных производственных фондов. Измеряется в тоннах условного топлива (*т* у.т.) на 1 тыс. руб. в год. Электрооснащенность характеризует глубину электрификации основных фондов и их взаимосвязь с электроэнергетической системой, а энергооснащенность — взаимосвязь основных фондов с топливно-энергетическим хозяйством района.

Установим зависимость производительности труда от электро- и энергооснащенности основных фондов и рассмотрим тенденции изменения этих взаимосвязей. Величину электрооснащенности можно представить как отношение электровооруженности труда $Э_в$ к фондовооруженности $\Phi_в$ в тыс. *квт·ч*/тыс. руб. год

$$Э_ф{}^0 = \frac{Э_в}{\Phi_в}. \tag{1}$$

Выразим электро- и фондовооруженность через производительность труда

$$Э_ф{}^0 = \frac{П^{E_{э_в/п}}}{П^{E_{ф_в/п}}} \tag{2}$$

или

$$Э_ф{}^0 = П^{(E_{э_в/п} - E_{ф_в/п})}, \tag{2а}$$

где $E_{э_в/п}$ — эластичность электровооруженности от производительности труда; $E_{ф_в/п}$ — эластичность фондовооруженности от производительности труда; $(E_{э_в/п} - E_{ф_в/п})$ — эластичность электрооснащенности основных фондов от производитель-