

12. Основные положения оптимального планирования развития и размещения производства. М.—Новосибирск, «Наука», Сиб. отд., 1968.
13. Л. Ф. Кормачов. Исследование экономической эффективности автомобильного и тракторного транспорта в сельскохозяйственном производстве. Автореф. дис., МИЭИ им. Серго Орджоникидзе, М., 1965.
14. В. А. Едемский, М. Назиров, В. И. Афанасьев, В. Н. Айдин. Экономико-математические методы в решении проблемы экономической эффективности химизации животноводства. В сб. [10].
15. В. М. Глушков. Основные принципы построения автоматизированных систем управления. Киев, 1969 (Госплан УССР. АН УССР).

Поступила в редакцию
31 X 1969

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

М. И. СУШКЕВИЧ

(Москва)

Пусть заданы дифференцируемые функции $\bar{f}_j(\bar{x}_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$, выпуклые вниз, так что $\bar{f}_j'(\bar{x}_j)$ — монотонно возрастающие функции $\bar{x}_j$. Требуется отыскать набор значений $\bar{x}_j^*$ (план), удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^k \bar{x}_j^* = \bar{C} \quad (1)$$

и

$$0 \leq \alpha_j \leq \bar{x}_j^* \leq \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

и обеспечивающий минимум функции цели задачи $\bar{F} = \sum_{j=1}^k \bar{f}_j(\bar{x}_j)$.

Во-первых, невырожденным линейным преобразованием $\bar{x}_j = \frac{\beta(\bar{x}_j - \alpha_j)}{\beta_j - \alpha_j}$ можно

заменить условие (2) единым для всех $\bar{x}_j$ условием

$$0 \leq \bar{x}_j \leq \beta. \quad (2')$$

Условие (1) при этом примет вид

$$\sum_{j=1}^k d_j \bar{x}_j = \bar{C}, \quad d_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (1')$$

Положим далее $d_j \bar{x}_j = x_j$. В результате этих двух линейных преобразований сохраняется выпуклость функций $f_j(x_j)$, ибо при $\bar{x}_j \rightarrow x_j$ монотонность (и непрерывность) $f_j'(x_j)$ не нарушается. Так как $\bar{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) = F(x_1, x_2, \dots, x_k)$, то задача сво-

дится к отысканию плана x_j^* , $j = 1, 2, \dots, k$, минимизирующего сумму $\sum_{j=1}^k f_j(x_j)$

при условиях

$$\sum_{j=1}^k x_j = C \quad (1'')$$

и

$$0 \leq x_j \leq \beta_j, \quad (2'')$$

т. е. к решению обычной задачи на условный экстремум с дополнительным ограничением (2'').

Без учета (2'') дело сводится к минимизации функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_k, \lambda) = \sum_{j=1}^k f_j(x_j) + \lambda \left(\sum_{j=1}^k x_j - C \right)$, зависящей, помимо $x_j, j = 1, 2, \dots, k$, еще и от неопределенного множителя Лагранжа λ . Оптимальный для этой задачи план x_j^* и λ^* находится в виде решения системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0,$$

в данном случае принимающей вид

$$\begin{cases} f_1'(x_1) + \lambda = 0, \\ f_2'(x_2) + \lambda = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_k'(x_k) + \lambda = 0, \\ \sum_{j=1}^k x_j = C. \end{cases} \quad (3)$$

Однако может случиться, что не все компоненты x_j^* решения системы (3) (плана (1)) будут удовлетворять условию (2''). Назовем модуль разности между компонентой x_i^* , по которой нарушается условие (2''), и ближайшим к ней предельным значением, выбросом компоненты x_i^* за это предельное значение. Процедуру устранения выброса некоторой компоненты, заключающуюся в приравнивании ее ближайшему предельному значению с последующим решением системы (3) при этом условии, будем называть замораживанием компоненты.

В этих терминах предлагается следующий алгоритм решения исходной задачи:

1. Решение системы (3) без учета условия (2'') (получение первоначального плана $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ (плана (1))).

2. Проверка плана (1) на выбросы. Определение $\sum_{i=1}^s \Delta_i$ и $\sum_{i=1}^m \delta_i$, где $\sum_{i=1}^s \Delta_i$ — сум-

ма выбросов за 0, а $\sum_{i=1}^m \delta_i$ — сумма выбросов за β_j .

3. Сравнение $\sum_{i=1}^s \Delta_i$ и $\sum_{i=1}^m \delta_i$. Если $\sum_{i=1}^s \Delta_i > \sum_{i=1}^m \delta_i$, то замораживание сразу всех

компонент с выбросами за 0, если $\sum_{i=1}^s \Delta_i < \sum_{i=1}^m \delta_i$, — аналогичных компонент с выбро-

сами за β_j . Если $\sum_{i=1}^s \Delta_i = \sum_{i=1}^m \delta_i$, то замораживание всех компонент с выбросами без

последующего решения системы (3), так как старые значения незамороженных компонент будут соответствовать оптимальному плану.

4. Повторение процесса 2 — 3, пока в решении не будут отсутствовать компоненты с выбросами.

Корректность предлагаемого алгоритма основывается на следующем утверждении.

Пусть компоненты $x_{i_1}^*, x_{i_2}^*, \dots, x_{i_s}^*$ первоначального плана (1) $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ имеют выбросы $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ за 0, а компоненты $x_{j_1}^*, x_{j_2}^*, \dots, x_{j_m}^*$ — вы-

бросы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ соответственно за $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_m}$ и, например, $\sum_1^s \Delta_i \geq \sum_1^m \delta_i$.

Тогда план $\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_k^*$ (план (2)), удовлетворяющий условиям (1'') и (2'') и такой, что в нем хотя бы одна из компонент $\bar{x}_{i_l}^*$, $l = 1, 2, \dots, s$, например $\bar{x}_{i_q}^* = \eta > 0$, не может быть оптимальным.

При доказательстве нам придется пользоваться преобразованиями исходного плана (1) $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$, сохраняющими выполнение условия (1''). Назовем разность между преобразованной компонентой $\bar{x}_j^*$ и ее исходным значением x_j^* движением компоненты x_j^* при преобразовании $x_j^* \rightarrow \bar{x}_j^*$. Движения компонент в соответствии с этим определением могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Нетрудно видеть, что для того чтобы при преобразовании $x_j^* \rightarrow \bar{x}_j^*$ любого плана $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$, удовлетворяющего условию (1''), преобразованный план также удовлетворял этому условию, необходимо и достаточно, чтобы сумма движений всех компонент x_j^* равнялась нулю.

Для доказательства высказанного утверждения покажем, что существует преобразование $\bar{x}_j^* \rightarrow \tilde{x}_j^*$ плана (2) в план (3) $\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \dots, \tilde{x}_k^*$ такое, что план (3) также удовлетворяет условиям (1'') и (2'') и обеспечивает уменьшение функции цели F . Разобьем сначала компоненты плана (2) на три группы.

1. $\bar{x}_{i_1}^*, \bar{x}_{i_2}^*, \dots, \bar{x}_{i_s}^*$, имевшие ранее в первоначальном плане (1) выбросы за 0.
2. $\bar{x}_{j_1}^*, \bar{x}_{j_2}^*, \dots, \bar{x}_{j_m}^*$, имевшие в плане (1) выбросы за β_j .
3. Остальные компоненты.

Покажем, что среди компонент 2-й и 3-й групп существует хотя бы одна $\bar{x}_g^* < \beta_g$. В самом деле, в противном случае все компоненты этих групп равны соответствующим β_j , ибо план (2) удовлетворяет условию (2''). Но тогда при переходе от первоначального плана (1) к плану (2) все преобразы компонент 3-й группы получат движения, ≥ 0 . Все преобразы компонент 1-й группы имеют при этом движения

$$D_{i_l} > 0, \text{ причем } \sum_{l=1}^s D_{i_l} \geq \eta + \sum_{l=1}^s \Delta_l > \sum_{l=1}^s \Delta_l. \text{ Отрицательные движения получат}$$

только преобразы компонент 2-й группы, и для них $\sum_{i=1}^m D_{j_i} = -\sum_{i=1}^m \delta_i$. Сумми-

руя движения всех компонент плана (1) и учитывая условие $\sum_1^s \Delta_i \geq \sum_1^m \delta_i$, вы-

ведем сразу, что сумма движений при переходе к плану (2) строго положительна; это противоречит тому, что план (2) удовлетворяет условию (1'').

Более того, можно показать, что среди компонент 2-й и 3-й групп, $< \beta_j$, найдется хотя бы одна, движение преобразы которой в плане (1) строго отрицательно. В самом деле, если предположить противное, нетрудно, как и выше, прийти к заключению, что план (2) не может удовлетворять условию (1'').

Итак, среди компонент 2-й и 3-й групп существует $\bar{x}_{j_c}^* = \beta_{j_c} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, движение D_{j_c} преобразы которой при переходе от плана (1) к плану (2) отрицательно, что равносильно неравенству $\bar{x}_{j_c}^* < x_{j_c}^*$. Пусть $D_{j_c} = \bar{x}_{j_c}^* - x_{j_c}^* = \omega < 0$.

Рассмотрим теперь следующее преобразование $\bar{x}_i^* \rightarrow \tilde{x}_i^*$ плана (2): $\tilde{x}_{i_q}^* = \bar{x}_{i_q}^* - \xi$, $\tilde{x}_{j_c}^* = \bar{x}_{j_c}^* + \xi$, где $\xi = \min(\eta, \varepsilon, |\omega|)$. $\tilde{x}_i^* = \bar{x}_i^*$, $i = 1, 2, \dots, k$, $i \neq i_q, j_c$.

Ясно, что план $\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \dots, \tilde{x}_k^*$ (план (3)) удовлетворяет условию (1''), ибо получен из плана (2) суммарным движением компонент, равным 0. Кроме того, план (3) удовлетворяет и условию (2'') в силу выбора ξ .

Покажем, что функция цели F на плане (3) не больше, чем на плане (2):

$$\begin{aligned} F(\bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_k^*) - F(\tilde{x}_1^*, \dots, \tilde{x}_k^*) &= \Delta F = \\ &= f_{i_q}(\bar{x}_{i_q}^*) - f_{i_q}(\tilde{x}_{i_q}^*) + f_{j_c}(\bar{x}_{j_c}^*) - f_{j_c}(\tilde{x}_{j_c}^*). \end{aligned}$$

Используя теорему Лагранжа о среднем, последнее равенство можно привести к виду

$$\Delta F = \xi[f_{i_q}'(c_1) - f_{j_c}'(c_2)],$$

где $\bar{x}_{iq}^* > c_1 > \bar{x}_{iq}^* - \xi$, $\bar{x}_{jc}^* + \xi > c_2 > \bar{x}_{jc}^*$. Но $x_{iq}^* < \bar{x}_{iq}^* - \xi$, $x_{ic}^* \geq \bar{x}_{jc}^* + \xi$, откуда сразу следует оценка $\Delta F \geq \xi[f_{iq}'(x_{iq}^*) - f_{jc}'(x_{jc}^*)]$. $f_{iq}'(x_{iq}^*) = f_{jc}'(x_{jc}^*)$, ибо x_{iq}^* и x_{jc}^* — компоненты первоначального плана (1) и удовлетворяют системе (3). В итоге получаем $\Delta F \geq 0$, что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что в случае $\sum_1^m \delta_i \geq \sum_1^s \Delta_i$ можно точно так же показать,

что план $\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_k^*$, удовлетворяющий условиям (1'') и (2'') и такой, что в нем хотя бы одна из компонент $x_{ji}^* < \beta_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, m$, не может быть оптимальным.

Следствие. Если $\sum_1^s \Delta_i = \sum_1^m \delta_i$, то план, в котором все компоненты без вы-

бросов сохраняют свои первоначальные значения, а компоненты с выбросами замораживаются на ближайших к ним предельных значениях, удовлетворяет всем условиям задачи и является оптимальным, ибо замораживать компоненты с выбросами необходимо в силу доказанного утверждения, а остающиеся неизменными компоненты очевидным образом удовлетворяют системе (3) после этого замораживания.

Описанный алгоритм для $f_i(x_i)$ — парабол второй степени был запрограммирован на алголе с помощью транслятора МЭИ-3 для ЭВМ «Минск-22» в Информационно-вычислительном центре В/о «Союзсельхозтехника» в 1970 г.

Поступила в редакцию
4 V 1970