ЭКОНОМИКА 1971
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том VII, вып. 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА СССР НА АВМ

Г. Г. ШМАЕВ, Л. М. КУПАЕВА

(Новочеркасск)

В статье описывается простейшая однопродуктовая модель расширенного социалистического воспроизводства в виде системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которая трактует совокупный общественный продукт как единый однородный продукт, используемый для потребления и накопления.

Скорость выпуска [1—7] чистого продукта (национального дохода) $y(t)$ зависит от наличных производственных фондов $R(t)$ и количества применяемого труда $l(t)$ и определяется выражением

$$y(t) = U[R(t), l(t)]. \tag{1}$$

Функция $U(R, l)$ показывает величину национального дохода при условии наиболее целесообразного выбора способов использования производственных фондов и труда. Часть общего продукта $y_2(t)$ идет на потребление, а другая часть $y_1(t)$ — для прироста производственных фондов

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t). \tag{2}$$

Считаем, что скорость изменения производственных фондов пропорциональна накоплению

$$\frac{dR}{dt} = Ay_1(t), \tag{3}$$

Количество применяемого труда l пропорционально общей численности населения $l = bL(t)$, а население $L(t)$ растет по экспоненте, следовательно

$$\frac{dL}{dt} - aL = 0, \quad L(0) \neq 0. \tag{4}$$

Определим норму потребления

$$\mu(t) = \frac{y_2(t)}{L(t)} \tag{5}$$

и будем считать ее заданной. Дифференцируя (1) по времени t, получим

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial U}{\partial R} \cdot \frac{dR}{dt} + \frac{\partial U}{dl} \cdot \frac{dl}{dt}. \tag{6}$$

Если диапазон изменений переменных невелик (рассматриваем малый интервал времени), то частные производные в (6) можно считать постоянными

$$\frac{\partial U}{\partial R} = k_1^*, \quad \frac{\partial U}{\partial l} = k_2^*. \tag{7}$$

Подставив (3) и (7) в (6) и учитывая (2), (4), (5), получим систему уравнений, описывающих поведение однопродуктовой модели расширенного социалистического воспроизводства при принятых допущениях

$$\frac{dL}{dt} - aL = 0, \quad L(0) \neq 0;$$

$$y_2 = \mu(t) L(t);$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 y_1 + k_2 \frac{dL}{dt}, \quad y(0) \neq 0; \tag{8а}$$

$$y_1 = y - y_2,$$

где $k_1 = Ak_1^*$ и $k_2 = bk_2^*$.

Введем в модель вспомогательную переменную Θ — темп роста национального дохода

$$\Theta = \frac{100}{y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{8б}$$

Поведение модели исследовалось при постоянной норме потребления

$$\mu(t) = c = \text{const}, \tag{9а}$$

при линейном ее росте

$$\mu(t) = c + dt \tag{9б}$$

и при

$$\mu = Be^{\delta t}, \tag{9в}$$

т. е. при росте ее по экспоненте.

Переменные y, y_1, y_2 измеряются в процентах к величине чистого продукта (национального дохода) в 1950 г. ($y = 100\%$, когда $t - 1950$), $l(t)$, $L(t)$ — в миллионах человек, t — в годах, Θ — в процентах.

Для решения системы (8) применим аналоговую вычислительную машину (АВМ), которая позволяет в удобном масштабе времени наблюдать поведение основных переменных модели.

Чтобы привести исходную систему уравнений к виду, удобному для моделирования на АВМ, введем новые машинные переменные, которые отличаются от исходных только масштабными множителями

$$y = m_y y_m, \quad y_1 = m_y y_{1m}, \quad y_2 = m_y y_{2m},$$
$$L = m_L L_m, \quad \mu = m_\mu \mu_m \quad \Theta = m_\Theta \Theta_m,$$
$$t = m_\tau \tau, \tag{10}$$

где m_y, m_L, m_μ, m_Θ, m_τ — масштабы соответствующих переменных.

Подставив (10) в (8), получим систему машинных уравнений

$$\frac{dL_m}{d\tau} - m_\tau a L_m = 0, \quad L_m(0) \neq 0; \quad y_{2m} = \frac{m_\mu m_L}{m_y} \mu_m (m_\tau \tau) L_m;$$
$$\frac{dy_m}{d\tau} = m_\tau k_1 y_{1m} + \frac{m_L}{m_y} k_2 \frac{dL_m}{d\tau}, \quad y_m(0) \neq 0; \quad y_{1m} = y_m - y_{2m};$$
$$\Theta = \frac{1}{m_\Theta m_\tau} \cdot \frac{100}{y_m} \cdot \frac{dy_m}{d\tau}. \tag{11}$$

Обозначим

$$
\begin{gathered}
m_\tau a = \alpha; \\
\frac{m_\mu m_L}{m_y}\mu_m(m_\tau \tau) = \beta(\tau); \\
m_\tau k_1 = K_1; \\
\frac{m_L k_2}{m_y} = K_2, \quad \frac{100}{m_\Theta m_\tau} = n.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Опустив индекс m и подставив (12) в (11), получим

$$
\begin{gathered}
\frac{dL}{d\tau} - \alpha L = 0, \quad L(0) \neq 0; \\
y_2 = \beta(\tau) L; \\
\frac{dy}{d\tau} = K_1 y_1 + K_2 \frac{dL}{d\tau}, \quad y(0) \neq 0; \\
y_1 = y - y_2; \\
\Theta = \frac{n}{y}\frac{dy}{d\tau}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

По системе уравнений (13) построена блок-схема модели национального дохода (рис. 1). В модели использованы численные значения масштабов

$$
m_y = 10\,\frac{\%}{в}; \quad m_L = 10\,\frac{\text{млн. чел.}}{в}; \quad m_\mu = 0{,}02\,\frac{\%}{(\text{млн. чел.})\,в};
$$

$$
m_\Theta = 1\,\frac{\%}{в}; \quad m_\tau = 1\,\frac{\text{год}}{\text{сек.}}.
$$

В соответствии с исходными статистическими данными по национальному доходу СССР [8, 9] приняты значения параметров уравнений: $\alpha = a = 0{,}0113$; $c = 0{,}39$; $d = 0{,}055$; $n = 100$; $L(0) = 17{,}85$ $в$; $y(0) = 10{,}00$ $в$; $B = 0{,}494$; $\delta = 0{,}058$;

$$
\left.\begin{aligned} K_1 &= 0{,}074 \\ K_2 &= 4{,}49 \end{aligned}\right\}, \quad \mu = 0{,}39 = \text{const};
$$

$$
\left.\begin{aligned} K_1 &= 0{,}1060 \\ K_2 &= 3{,}83 \end{aligned}\right\}, \quad \mu = 0{,}39 + 0{,}055t;
$$

$$
\left.\begin{aligned} K_1 &= 0{,}106 \\ K_2 &= 3{,}83 \end{aligned}\right\}, \quad \mu = 0{,}494e^{0{,}058t}.
$$

Настройка схемы производилась следующим образом. В первую очередь по исходным статистическим данным настраивали контур, моделирующий уравнение роста населения $L(t)$. Умножая $L(t)$ на заданное значение $\mu(t)$, получаем y_2. С помощью коэффициентов K_1 и K_2 добиваемся совпадения величины национального дохода с исходными данными в двух точках (t — 1960 и t — 1967). Величина y_1 в схеме получается автоматически как разность y и y_2. Норма потребления воспроизводится либо с помощью делителя напряжения ($\mu = \text{const}$), либо с помощью блока переменных коэффициентов [$\mu = \mu(t)$], либо с помощью контура, дающего экспоненциальную кривую ($\mu = Be^{\delta t}$).

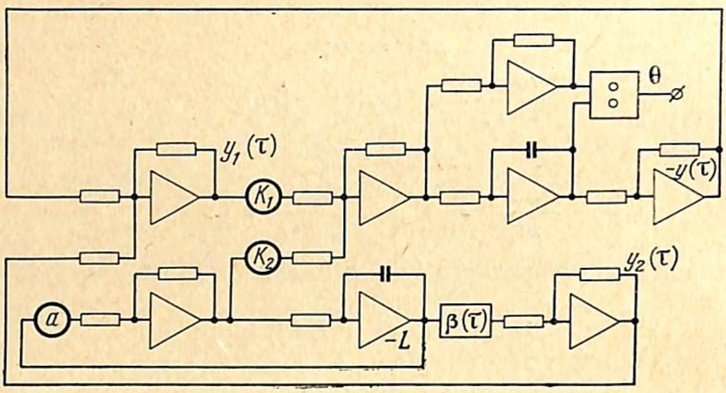

Рис. 1. Блок-схема модели национального дохода СССР

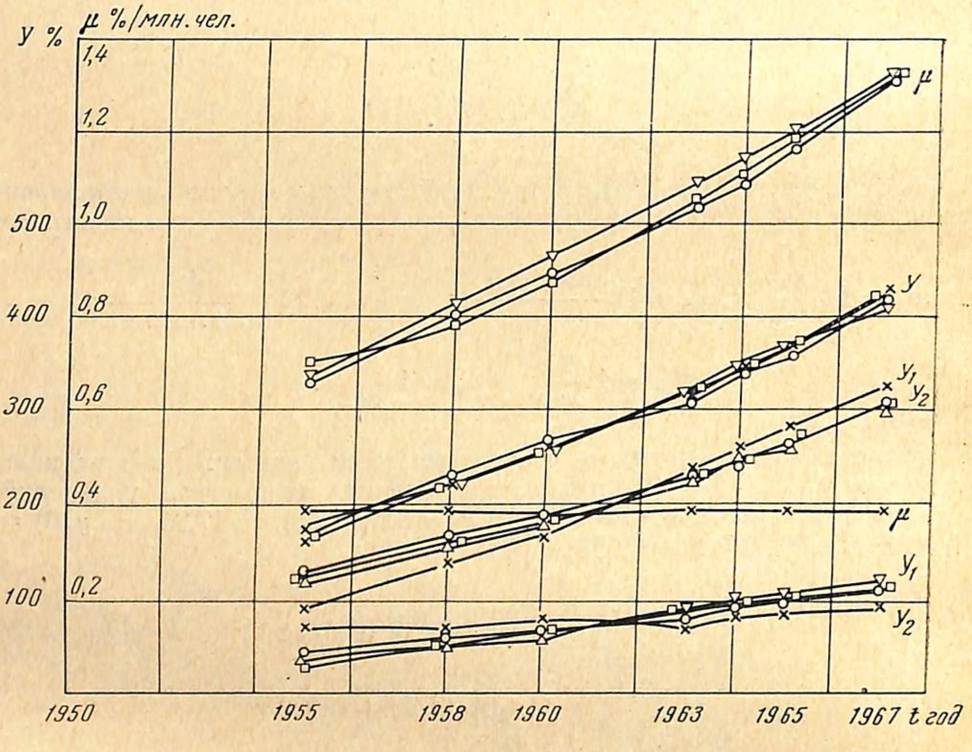

Рис. 2. Результаты моделирования национального дохода СССР: *а* — 000 — исходные значения, *б* — XXX — опытные значения при $\mu = \mathrm{const}$, *в* — △△△ — опытные значения при $\mu = c + dt$, *г* — □□□ — опытные значения при $\mu = Be^{\delta t}$

В частном случае при $\mu = c + dt$ удобно воспользоваться интегратором с заданным начальным значением c и входным напряжением d. При этом для получения $y_2 = \mu L$ нужен блок перемножения.

Достаточное представление о точности совпадения опытных и исходных данных [8, 9] дают графики y, y_1, y_2 на рис. 2. Для y_1 и y_2 при постоянной норме потребления не удается добиться удовлетворительного совпадения даже на отрезке времени в несколько лет. При линейной и экспоненциальной зависимости нормы потребления от времени совпадение y, y_1, y_2 со статистическими данными хорошее (средняя относительная погрешность $\delta = 2\%$) в течение 17 лет.

Предлагаемая в данной работе математическая модель, несмотря на простоту, воспроизводит падающий (растущий) характер темпа роста национального дохода. Эта особенность отличает ее от экспоненциальных однопродуктовых моделей роста экономики, для которых $\Theta = \text{const}$.

Нетрудно показать, что при принятых в модели допущениях, в пределе при $t \to \infty$ темп роста национального дохода стремится к установившемуся значению

$$\Theta_{\text{уст}} = 100\ K_1 = 7{,}4\%.$$

Систему уравнений (13) можно использовать для моделирования валового продукта промышленности. Для этого достаточно считать, что y соответствует валовому продукту промышленности, y_1 — производству средств производства, y_2 — производству предметов потребления.

Такой эксперимент по моделированию расширенного воспроизводства промышленности был проделан. Результаты моделирования с точностью 1—5% совпадают с исходными статистическими данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Боярский. Дифференциальные уравнения расширенного воспроизводства. В сб. Математический анализ расширенного воспроизводства, М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Л. И. Горьков. Однопродуктовая динамическая модель и анализ экономической эффективности капитальных вложений. В сб. [1].
3. В. Г. Гребенников. Некоторые проблемы взаимосвязи темпа роста национального дохода, фондоотдачи и нормы накопления (на примере односекторной модели). Экономика и матем. методы, 1968, т. IV, вып. 4.
4. E. D. Domar. Essays in the Theory of Economic Growth. N.— Y.—Oxford University Press, 1957.
5. Л. В. Канторович, И. Г. Глобенко. Однопродуктовая динамическая модель при наличии мгновенной превращаемости фондов. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 3.
6. Н. Е. Кобринский, А. М. Матлин. Экономико-математические модели планирования общественного производства (обзор). Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 2.
7. Б. Я. Коган. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963.
8. Народное хозяйство СССР в 1968 году. Статистический ежегодник. М., «Статистика», 1969.
9. Экономика стран социализма. 1967 год. М., «Экономика», 1968.

Поступила в редакцию
20 V 1970