

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ПОДВИЖНОГО СОСТАВА ДЛЯ МАРШРУТОВ ГОРОДСКОГО ПАССАЖИРСКОГО ТРАНСПОРТА

Ю. Н. ШУЛЬГА, В. В. ОВЧАРЕНКО

(Донецк)

1. ПРОСТЕЙШАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Маршруты, по которым движутся транспортные средства, всегда можно представить как замкнутые линии, имеющие начальную и конечную остановки.

Пусть при движении в прямом направлении транспортная единица последовательно поступает на i , $i = 1, \dots, N$, остановок, а в обратном — на i , $i = N + 1, \dots, M$, остановок.

Под изолированным маршрутом будем понимать замкнутую линию, остановки на которой обслуживают транспортные средства одного маршрута; под неизоллированным — замкнутую линию, часть (или все!) остановок которой обслуживают транспортные средства нескольких маршрутов.

Предположим, что имеется L , $L = 1, \dots, z$, кольцевых маршрутов, на каждом из которых расположено M_L остановок. При этом подавляющая часть из них является общими, т. е. обслуживающими все маршруты. Рассмотрим r -й маршрут, $r \in z$. Обозначим через λ_{ikrj} — интенсивность поступления пассажиров на i -ю остановку, которые пользуются транспортными средствами r -го маршрута в течение k -го часа j -й временной зоны; q_{ikrj} — среднее число пассажиров, высаживающихся из транспортной единицы r -го маршрута в течение k -го часа j -й временной зоны; Q_{ikrj} — среднюю наполняемость транспортной единицы r -го маршрута на i -й остановке в течение k -го часа j -й временной зоны; Q_r — вместимость транспортной единицы r -го маршрута; t_{krj} — маршрутный интервал для транспортных единиц r -го маршрута в течение k -го часа j -й временной зоны.

Тогда наполняемость транспортной единицы r -го маршрута в течение k -го часа j -й временной зоны при движении, например, в прямом направлении может быть описана системой рекуррентных соотношений

$$t_{krj}\lambda_{ikrj} - q_{ikrj} + Q_{i-1,krj} = Q_{ikrj},$$

$$Q_{0krj} = 0, \quad i = 1, \dots, N_r - 1. \quad (1)$$

Здесь определяется такой маршрутный интервал t_{krj} , при котором на остановках не создается очередей. Суммируя (1) по i , получим

$$t_{krj} \sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikri} - \sum_{i=1}^{N_r-1} q_{ikrj} = Q_{N_r-1,krj}. \quad (2)$$

Очевидно, имеет место равенство

$$Q_{N_r-1,krj} = q_{N_r,krj}, \quad (3)$$

так как все пассажиры, находящиеся в транспортной единице на предпоследней остановке, высаживаются на последней остановке. Заменяя $Q_{N_r-1, k\tau j}$ (2) его значением из (3), получим

$$t_{krj} = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} q_{ikrj}}{\sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj}}. \quad (4)$$

Число транспортных единиц m_{krj} , которое необходимо выделить на маршрут, как указывается в [1], прямо пропорционально времени туда T_{rj} и обратно пропорционально маршрутному интервалу t_{krj}

$$m_{krj} = \frac{T_{rj}}{t_{krj}}. \quad (5)$$

Подставляя теперь значение t_{krj} из (4) в (5), будем иметь

$$m_{krj} = \frac{T_{rj} \sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj}}{\sum_{i=1}^{N_r} q_{ikrj}}. \quad (6)$$

Величина $\sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj}$ является суммарной интенсивностью для r -го маршрута. Получить эту величину путем прямых хронометражных наблюдений оказывается практически невозможно. Здесь предлагается вероятностный метод ее оценки.

Пусть Π_{ikrj} — число пассажиров, высаживающихся на i -й остановке в течение k -го часа j -й временной зоны из транспортных средств r -го маршрута и n_{ikrj} — число поступлений транспортных единиц r -го маршрута за то же время. Тогда имеет место равенство

$$q_{ikrj} = \frac{\Pi_{ikrj}}{n_{ikrj}}. \quad (7)$$

Если t_{krj}' — статистический маршрутный интервал, то

$$n_{ikrj} = \frac{60}{t_{krj}'}. \quad (8)$$

Подставляя значение n_{ikrj} из (8) в (7), получим

$$q_{ikrj} = \frac{t_{krj}' \Pi_{ikrj}}{60}. \quad (9)$$

Предположим, что оптимальный маршрутный интервал равен t_{krj}' , тогда среднее число пассажиров, высаживающихся на i -й остановке, будет

$$q_{ikrj} = \frac{t_{krj}' \Pi_{ikrj}}{60}. \quad (10)$$

Выделяя из (8) отношение $\frac{\Pi_{ikrj}}{60}$ и подставляя его значение в (10), получим

$$q'_{ikrj} = \frac{t_{krj}}{t'_{krj}} q_{ikrj}. \quad (11)$$

Используя (4) и (11), будем иметь

$$t_{krj} \left[\sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj} - \frac{1}{t'_{krj}} \sum_{i=2}^{N_r} q_{ikrj} \right] = 0. \quad (12)$$

Так как $t_{krj} \neq 0$, то

$$t'_{krj} \sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj} = \sum_{i=2}^{N_r} q_{ikrj}. \quad (13)$$

Суммируя по k , $k = 1, \dots, l_j$, части равенства (13), найдем

$$\sum_{k=1}^{l_j} t'_{krj} \sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj} = \sum_{k=1}^{l_j} \sum_{i=1}^{N_r} q_{ikrj}. \quad (14)$$

Обозначим через p_{rj} статистическую вероятность использования транспортных средств r -го маршрута в течение j -й временной зоны. Так как величина $\sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj}$ представляет собой суммарную интенсивность только той части входящего пассажиропотока на остановки, которая пользуется транспортными средствами r -го маршрута, а $\sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikj}$ — общую суммарную интенсивность входящего пассажиропотока, то

$$\sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikrj} = p_{rj} \sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikj}. \quad (15)$$

Подставив правую часть (15) в (14), найдем

$$p_{rj} = \frac{\sum_{k=1}^{l_j} \sum_{i=2}^{N_r} q_{ikrj}}{\sum_{k=1}^{l_j} t'_{krj} \sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikj}}. \quad (16)$$

(6) теперь переписывается следующим образом

$$m_{krj} = \frac{T_{rj} p_{rj} \sum_{i=1}^{N_r-1} \lambda_{ikj}}{\sum_{i=2}^{N_r} q_{ikrj}}, \quad (17)$$

где p_{rj} определяется по (16).

Значения m_{krj} , полученные из (17), очевидно, являются приближенными. Их оптимальность необходимо проверять не только теоретически, но и в реальных условиях функционирования пассажирского транспорта. Здесь предлагается алгоритм проверки, основанный на анализе значений теоретической функции наполнения транспортных средств на ос-

тановках маршрута. При выводе (17) не учитывалось неравенство

$$Q_{ikrj} \leq Q_r. \quad (18)$$

Значение m_{krj} , найденное из (17), не гарантирует невозможности переполнения транспортных средств. Для того, чтобы убедиться, что переполнения не произойдет, вычислим значения функции наполнения, воспользовавшись системой равенств

$$t_{krj} \lambda_{ikj} p_{rj} - \frac{t_{krj}}{t_{krj}} q_{ikrj} + Q_{i-1,krj} = Q_{ikrj}, \quad (19)$$

$$Q_{0krj} = 0, \quad i = 1, \dots, N_r - 1.$$

Определяем, что

$$t_{krj} = \frac{T_{rj}}{m_{krj}}. \quad (20)$$

Если для всех значений Q_{ikrj} будет иметь место неравенство (18), то ясно, что переполняться транспортные единицы не будут. Если хотя бы для одного из значений Q_{ikrj} оно не выполняется, то количество транспортных средств необходимо увеличить.

В качестве оценки наполняемости транспортных средств примем величину

$$\bar{Q}_{krj} = \frac{\sum_{i=1}^{N_r-1} Q_{ikrj}}{N_r - 1}, \quad (21)$$

которая характеризует среднюю наполняемость транспортной единицы. Кроме того, в тех же целях можно использовать

$$\eta_{krj} = \frac{\bar{Q}_{krj}}{Q_r} 100\%. \quad (22)$$

Для решения вопроса о том, когда и на сколько следует увеличить или уменьшить количество транспортных единиц на маршруте, необходимо учесть долю пассажиров, которые будут оставаться на остановке при числе транспортных единиц, выделенных на линию. Долю таких пассажиров можно оценить вероятностью того, что случайный пассажир окажется необслуженным. Определение такой вероятности может показать, насколько приемлемо использование изложенного выше метода.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАССАЖИРСКИХ ПЕРЕВОЗОК

Для построения математической модели, более приближенной к реальному транспортному процессу, рассмотрим его как функционирование сложной системы, состоящей из подсистем массового обслуживания. Целесообразно выделить два вида систем: остановки маршрута и транспортные единицы. Они взаимосвязаны и являются составными частями сложной системы пассажирских перевозок.

Остановимся на первом виде. Обслуживающими каналами этого вида системы являются места для ожидания на остановке. Требованием на обслуживание является пассажир. Через случайные интервалы времени,

распределение которых описывается показательным законом, на остановку поступают транспортные средства с вместимостью Q_r пассажиров. Если транспортная единица поступила на остановку, то она должна взять всех пассажиров, которые пользуются r -м маршрутом. Обработка хронометражных данных показывает, что поток пассажиров на остановки достаточно удовлетворительно описывается распределением Пуассона.

Остановка имеет, вообще говоря, неограниченное количество мест для ожидания, которые в модели интерпретируются как обслуживающие каналы. Считается, что если пассажир поступил на остановку, то требование заняло канал обслуживания. Однако большое скопление пассажиров на остановке случается весьма редко и поэтому вероятностью этого можно пренебречь. Тогда число мест для ожидания, а следовательно, и число каналов окажется величиной ограниченной. Для определенности будем считать, что число мест для ожидания на i -й остановке равно R_i . Так как i -я остановка может обслуживать L маршрутов, $L = 1, \dots, z$, то для каждого из них следует выделить R_{iL} мест для ожидания. Будет иметь место равенство

$$R_i = \sum_{L=1}^z R_{iL}. \quad (23)$$

Количество обслуживающих каналов с учетом их функционирования, обеспечивающих работу r -го маршрута, назовем r -й системой массового обслуживания. Число обслуживающих каналов в этой системе равно R_{ir} . Если в момент поступления очередного требования все каналы оказываются занятыми, то оно теряется. Это значит, что если на i -й остановке уже находится R_{ir} пассажиров, ожидающих r -й маршрут, то $(R_{ir} + 1)$ -й пассажир этого класса не остается на этой остановке, а направляется к другой. В дальнейшем будем считать, что

$$R_{ir} < Q_r. \quad (24)$$

Поступление транспортной единицы освобождает сразу k_{ir} каналов, где k_{ir} — количество пассажиров, собравшихся на i -й остановке в r -й системе к моменту поступления транспортной единицы r -го маршрута.

В такой интерпретации функционирование любой L -й системы массового обслуживания для каждого часа временной зоны опишется системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_1 p_0(t) + [1 - p_0(t)], \\ p_i'(t) &= p_{i-1}(t) \lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) p_i(t), \quad i < R, \\ p_R'(t) &= \lambda_1 p_{R-1}(t) - \lambda_2 p_R(t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

с учетом нормирующего условия

$$\sum_{i=1}^R p_i(t) = 1, \quad (26)$$

где $p_i(t)$ — вероятность того, что в системе находится i требований; λ_1 — интенсивность потока пассажиров на остановку; λ_2 — интенсивность поступления транспортных средств на остановку; R — число обслуживающих каналов в системе.

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, из (25) и нормирующего условия (26) получим вероятности

$$p_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (27)$$

$$p_i = \frac{\lambda_1 \lambda_2^i}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{i+1}}, \quad i < R, \quad (28)$$

$$p_R = \frac{\lambda_1^R}{(\lambda_1 + \lambda_2)^R}. \quad (29)$$

Используя обычную формулу для математического ожидания, найдем среднее число пассажиров, находящихся в L -й системе на остановке в любой момент времени t . Имеем

$$\bar{c} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - p_R). \quad (30)$$

На практике R достаточно велико, а так как вероятность p_R мала, ею можно пренебречь.

Тогда полагая: $\bar{c} = \bar{c}_{ikrj}$; $\lambda_1 = \lambda_{ikj}$; $\lambda_2 = (t_{krj})^{-1}$, будем иметь

$$\bar{c}_{ikrj} = \lambda_{ikj} p_{rj} t_{krj}, \quad (31)$$

где p_{rj} — вероятность использования транспортных средств r -го маршрута в течение j -й временной зоны.

(31) позволяет определить среднее число пассажиров, находящихся в r -й системе на i -й остановке в любой момент k -го часа j -й временной зоны.

Ко второму виду систем массового обслуживания относятся транспортные единицы. Обслуживающим каналом здесь является место для пассажира. Таких мест в транспортной единице Q_r и, следовательно, система — многоканальная. При прибытии транспортной единицы на i -ю остановку ее ожидает группа пассажиров, состоящая из $\bar{c}_{ikrj}$ человек. Так как среднее количество пассажиров, ожидающих транспортную единицу на остановках, величины случайные и не равные между собой, то входящий поток состоит из групп, содержащих случайное число требований (пассажиров). Входящий групповой поток характеризуется интенсивностью $\gamma_r = (t_r)^{-1}$, где t_r — интервал перегона для транспортных средств r -го маршрута. Временем обслуживания является длительность поездки пассажира τ_{krj} . Пассажиры, которые не смогли сесть в транспортную единицу на i -й остановке, считаются потерянными и больше в обслуживании не участвуют.

Таким образом, транспортную единицу можно представить как многоканальную систему массового обслуживания с отказами, групповым входящим потоком и случайным числом требований в группе.

Приведем аналитическое решение в предположении, что входящий групповой поток является простейшим, что соответствует ситуации, когда городской маршрут имеет большую протяженность с неодинаковыми расстояниями между остановками. Если требование простейшего потока не удовлетворяется, то процесс целесообразно моделировать.

Обозначим через π_s вероятность того, что в группе будет находиться точно s требований (пассажиров), а через ϕ_k — что в системе (транспортной единице) находится точно k требований. ϕ_k определяется из системы

уравнений [2]

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha \varphi_0, \\ \varphi_{k+1} &= \frac{\alpha + k}{k + 1} \varphi_k - \frac{\alpha}{k + 1} \sum_{i=1}^k \pi_i \varphi_{k-i}, \quad k < Q_r, \\ \varphi_{Q_r} &= \frac{\alpha}{Q_r} \sum_{s=1}^{Q_r} \varphi_{Q_r-s} \sum_{i=s}^{\infty} \pi_i, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где $\alpha = \alpha_{krj} = \gamma_r \tau_{krj}$.

Входящий поток будет состоять из групп, которые содержат

$$\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots, \bar{c}_{N-1} \quad (33)$$

требований. Здесь $\bar{c}_i$ — среднее число пассажиров, которое определяется по (31). Может оказаться, что некоторые значения в ряде (33) будут повторяться, в этом случае есть смысл говорить о частоте повторений. Обозначим через m_s частоту появления числа s в ряде (33) и составим частоты $m_s / (N_r - 1)$; эти частоты примем в качестве статистической оценки вероятностей π_s . Если числа s не оказалось в ряде (33), то соответствующие $m_s = 0$. Тогда

$$\pi_s = \frac{m_s}{N_r - 1}. \quad (34)$$

Очевидно, для вероятностей π_s выполняется равенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} \pi_s = 1. \quad (35)$$

В качестве критерия эффективности функционирования системы здесь будет рассмотрена, как уже указывалось ранее, вероятность отказа требованию в обслуживании, которая определяется

$$\varphi_{\text{отк}} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{Q_r} k \varphi_k}{\alpha_{krj} \sum_{s=1}^{\infty} s \pi_s}. \quad (36)$$

Среднее число пассажиров, находящихся в транспортной единице, равно

$$\bar{Q}_r = \sum_{k=1}^{Q_r} k \varphi_k. \quad (37)$$

За время движения в прямом или обратном направлении транспортной единицей обслуживается в среднем

$$\bar{Q}_{r,1} = \frac{T_{rj}}{2\tau_{krj}} \sum_{k=1}^{Q_r} k \varphi_k \quad (38)$$

пассажиров; поступает в транспортную единицу

$$\bar{Q}_{r,2} = \frac{T_{rj}}{2} \gamma_r \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_k \quad (39)$$

пассажиров и получает отказ в обслуживании

$$\bar{Q}_{r,3} = \varphi_{\text{отк}} \bar{Q}_{r,2} \quad (40)$$

пассажиров.

Имея такие данные о процессе пассажирских перевозок, можно сделать довольно обоснованные выводы, которые позволят повысить эффективность управления подвижным составом на линии.

Очевидно, решение задачи, полученное методами теории массового обслуживания, окажется более точным. Однако в этом случае вычислительная процедура является довольно сложной и длительной. Кроме того, этот метод требует дополнительной информации: определения средней длительности поездки, среднего времени перегона, среднего числа пассажиров, находящихся на остановке. Поэтому целесообразно показать, что результаты использования методов средних достаточно близки данным, полученным методами теории массового обслуживания.

3. ПРИМЕР

Определим необходимое число автобусов марки «Икарус-620» для заданного маршрута города Жданова, который соединяет остановку «Швейная фабрика» с пос. Западный. Исходя из реального распределения пассажиропотоков по часам, были введены следующие временные зоны: 1-я — с 6-00 до 9-00; 2-я — с 9-00 до 12-00; 3-я — с 12-00 до 15-00; 4-я — с 15-00 до 19-00; 5-я — с 19-00 до 22-00. Напряженности пассажиропотоков в течение временных зон показали, что хронометражные наблюдения для 1-й, 2-й и 3-й временных зон необходимо проводить на остановках, расположенных в обратном направлении: от остановки «Конечная» к остановке «Швейная фабрика», а для 4-й и 5-й — в прямом направлении.

Названия остановок, значения интенсивностей входящих пассажиропотоков и среднего числа пассажиров, высаживающихся на остановках маршрута, для всех временных зон по часам, а также значения маршрутных интервалов приведены в табл. 1, 2 и в 3-м столбце табл. 3.

Вероятности использования автобусов 3-го маршрута в течение каждой временной зоны вычислялись по (16). Эти значения приведены в 6-м столбце табл. 3 при

$$\Lambda = \sum_i \lambda_i \text{ и } \bar{q} = \sum_i q_i.$$

Из табл. 3 следует, что автобусами 3-го маршрута в течение 1-й временной зоны в среднем пользуется 30% пассажиров. Время тура для автобусов 3-го маршрута $T = 45$ мин.

С помощью (17) подсчитаем необходимое количество автобусов для каждого из часов 1-й временной зоны. Имеем

$$m_{6-7} = \frac{21,7 \cdot 0,3 \cdot 45}{43,4} \approx 7,$$

$$m_{7-8} = \frac{32,4 \cdot 0,3 \cdot 45}{65,7} \approx 7,$$

$$m_{8-9} = \frac{21,4 \cdot 0,3 \cdot 45}{37,2} \approx 8.$$

Необходимое количество автобусов для других временных зон по часам приведены в табл. 3 (столбец 7); значения нового маршрутного интервала рассчитанные по (20), в столбце 8.

Наполнение автобусов на остановках маршрута определялось с помощью (19). Значения наполняемости автобусов приведены в табл. 4 и 5.

Таблица 1

Характеристики входящего и выходящего пассажиропотоков
(обратное направление)

№ п/п	Название остановок	1-я временная зона (часы)						2-я временная зона (часы)						3-я временная зона (часы)							
		6—7		7—8		8—9		9—10		10—11		11—12		12—13		13—14		14—15		15—16	
		λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q
1.	Швейная фабрика	—	11,0	—	15,0	—	9,0	—	4,0	—	25,0	—	13,0	—	11,4	—	10	—	6,0	1,6	0
2.	Ул. Советская	—	0,8	—	6,0	0,1	9,0	—	6,0	—	7,0	0	4,7	—	6,6	—	3,9	—	4,6	2,3	0
3.	Ул. Энгельса	—	6,5	0,2	8,0	0,1	9,0	0,2	16,0	0,2	8,0	0,2	6,0	0,2	5,7	0,2	8,2	0,2	8,0	1,6	1,1
4.	Дом связи	1,4	19,1	3,0	17,5	1,7	2,5	1,5	15,0	1,6	12,0	2,0	10,0	2,0	8,0	2,3	8,0	2,0	6,4	5,5	2,5
5.	Детская поликлиника	2,3	3,7	2,6	6,5	2,3	6,1	2,0	3,7	1,6	4,7	2,4	4,0	1,6	1,8	2,4	3,4	2,0	3,2	1,4	8,6
6.	Проспект Строителей	9,2	1,5	11,2	4,0	6,6	1,4	3,0	1,7	2,1	1,7	2,7	3,0	2,5	1,8	3,0	2,5	4,4	2,4	0,9	2,4
7.	Ул. Бахчиванджи	4,3	0	6,3	0,3	5,6	0,2	4,0	0,4	3,3	2,8	1,7	1,4	1,8	2,6	1,9	0,9	1,8	0,6	1,6	7,7
8.	Ул. Лавицкого	2,4	0,8	3,8	8,4	1,4	0	2,5	0,8	8,2	0	1,3	0,9	1,1	0	1,8	0,5	1,5	0	0	3,4
9.	Конечная	2,1	0	5,3	0	3,6	0	0,2	0	2,2	0	1,9	0	1,2	0	2,4	0	2,0	0	0,0	18,0
	Σ	21,7	43,4	32,4	65,7	21,4	37,2	16,4	47,6	19,2	61,2	12,2	42,0	10,4	37,9	14,0	37,4	13,9	31,2	13,1	43,7

Таблица 2

Характеристики входящего и выходящего пассажиропотоков (прямое направление)

№ п/п	Название остановок	4-я временная зона (часы)								5-я временная зона (часы)			
		16—17		17—18		18—19		19—20		20—21		21—22	
		λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q	λ	q
1.	Швейная фабрика	2,2	0	2,6	0	2,1	0	3,0	0	2,3	0	0,4	0
2.	Ул. Советская	2,0	0	3,0	0	1,8	0	1,3	0	1,4	0	1,2	0
3.	Ул. Артема	1,0	1,0	1,2	3,0	2,0	1,1	3,0	0,8	2,0	0,5	0,7	0,2
4.	Ул. Энгельса	2,7	1,0	2,7	1,8	1,5	4,3	2,4	3,5	1,2	2,4	1,3	0,6
5.	Дом связи	4,3	3,5	3,4	3,0	5,0	3,0	4,5	2,3	2,1	0,5	3,0	1,1
6.	Детская поликлиника	1,0	7,3	1,6	9,8	3,4	7,3	2,4	6,4	1,1	4,3	1,3	2,0
7.	Проспект Строителей	1,1	1,8	1,4	0	0,9	13,0	0,9	2,6	0,8	2,6	0,5	7,4
8.	Ул. Бахчиванджи	0,7	11,5	0,6	15,6	0,4	11,5	0,3	15,0	0,4	5,0	0,2	4,7
9.	Ул. Лавицкого	0	4,3	0,1	4,2	0	8,8	0	10,4	0	5,8	0	1,7
10.	Конечная		18,0		22,0		18,0		12,0		10,0		6,0
	Σ	15,0	48,4	16,6	59,4	17,1	67,0	17,8	53,0	11,3	31,1	8,6	23,7

Вместимость автобусов «Икарус-620» составляет $Q = 62$ пассажиров. Анализируя данные о наполнении автобусов из табл. 4 и 5, приходим к выводу, что переполнение не наблюдается ни на одной из остановок маршрута, однако значения отношения η , рассчитанные по (22), указывают на весьма малую загрузку автобусов. Создается впечатление, что их количество можно уменьшить без ущерба для перевозки пассажиров.

Чтобы убедиться в том, что загрузка автобусов достаточно оптимальна, а, следовательно, (17) дает практически приемлемые результаты, представим работу каждого автобуса 3-го маршрута как функционирование системы массового обслуживания.

Возьмем отрезок времени с 6-00 до 7-00. Среднее время перегона $t_{6-7} = 2$ мин. Следовательно, интенсивность входящего потока $\gamma_{6-7} = 0,5$ групп/мин; время обслуживания — отношение средней дальности

Таблица 3

Значения параметров движения

№ п/п	Часы	t'_k	Δ	$\bar{q}$	p	m	t_k
1	6—7	6,2	21,7	43,4	0,3	7	6,43
2	7—8	6,9	32,4	65,7	0,3	7	6,43
3	8—9	6,0	21,4	37,2	0,3	8	5,65
4	9—10	7,0	16,4	47,6	0,38	6	7,50
5	10—11	10,9	19,2	61,2	0,38	6	7,50
6	11—12	13,0	12,2	42,0	0,38	5	9,00
7	12—13	6,5	10,4	37,9	0,46	6	7,50
8	13—14	5,9	14,0	37,4	0,46	8	5,65
9	14—15	6,0	13,9	31,2	0,46	10	4,50
10	15—16	6,1	13,1	43,7	0,58	9	5,0
11	16—17	6,0	15,0	48,4	0,58	9	5,0
12	17—18	6,2	16,6	59,4	0,58	8	5,65
13	18—19	6,0	17,1	67,0	0,58	7	6,43
14	19—20	8,1	17,8	53,0	0,34	6	7,50
15	20—21	8,8	11,3	31,1	0,34	6	7,50
16	21—22	8,8	8,6	23,7	0,34	6	7,50

Таблица 4

Наполнение автобуса «Икарус-620» на остановках (обратное направление)

Часы	Название остановок									η
	Швейная фабрика Q_1	ул. Советская Q_2	ул. Энергетика Q_3	Дом связи Q_4	Детская поликлиника Q_5	Проспект Строителей Q_6	ул. Бахчиванджи Q_7	ул. Лавицкого Q_8	Конечная Q_9	
6—7	—	9,40	10,20	16,70	33,10	32,40	16,20	7,88	4,05	26%
7—8	—	10,00	16,00	23,60	35,30	36,80	19,20	9,20	10,30	32%
8—9	—	7,80	16,80	25,90	25,40	27,60	17,80	8,50	6,10	27%
9—10	—	7,49	12,89	26,72	35,95	33,58	26,56	15,52	9,12	34%
10—11	—	25,55	30,45	35,48	37,89	35,62	30,82	23,37	6,27	45%
11—12	—	21,42	24,71	27,53	27,69	22,29	15,15	10,32	6,50	33%
12—13	—	5,10	12,69	18,57	20,93	17,53	11,16	7,94	4,14	20%
13—14	—	7,91	11,65	19,00	20,69	17,71	12,31	9,19	6,24	21%
14—15	—	9,88	13,33	18,91	19,57	17,83	10,52	7,24	4,14	20%

Таблица 5

Наполнение автобуса «Икарус-620» на остановках (прямое направление)

Часы	Название остановок									η
	Швейная фабрика Q_1	ул. Советская Q_2	ул. Артема Q_3	ул. Энергетика Q_4	Дом связи Q_5	Детская поликлиника Q_6	Проспект Строителей Q_7	ул. Бахчиванджи Q_8	ул. Лавицкого Q_9	
15—16	4,64	11,31	15,04	28,91	25,85	26,47	24,72	21,90	15,21	31%
16—17	6,38	12,18	14,25	21,25	30,82	27,66	29,36	21,84	18,27	33%
17—18	8,58	18,48	19,71	26,98	35,47	31,83	36,45	22,25	18,80	34%
18—19	7,84	14,56	20,92	22,22	37,87	43,24	33,60	23,59	14,79	39%
19—20	7,86	11,27	18,39	21,45	31,11	31,50	31,47	18,46	8,89	32%
20—21	6,02	9,69	14,51	15,61	20,69	19,91	19,79	16,59	11,66	25%
21—22	1,05	4,20	5,87	8,76	15,68	17,39	12,41	8,93	7,49	15%

Таблица 6

Вероятностные характеристики процесса

№ п/п	Число занятых пассажиром мест	φ_k/φ_0	φ_k	$k\varphi_k$	№ п/п	Число занятых пассажиром мест	φ_k/φ_0	φ_k	$k\varphi_k$
1	0	1,00	0,00050	0,00000	27	26	51,34	0,02567	0,66742
2	1	3,78	0,00189	0,00189	28	27	47,45	0,02373	0,64071
3	2	8,56	0,00428	0,00856	29	28	43,26	0,02163	0,60561
4	3	15,25	0,00762	0,02286	30	29	39,37	0,01968	0,57072
5	4	23,48	0,01174	0,04696	31	30	35,72	0,01786	0,53580
6	5	31,24	0,01562	0,07810	32	31	32,45	0,01622	0,50282
7	6	40,56	0,02028	0,12168	33	32	29,19	0,01460	0,46720
8	7	49,83	0,02492	0,17444	34	33	26,21	0,01310	0,43230
9	8	58,70	0,02935	0,23480	35	34	23,36	0,01168	0,39712
10	9	66,12	0,03306	0,29754	36	35	20,77	0,01039	0,36365
11	10	72,93	0,03646	0,36460	37	36	18,41	0,00920	0,33120
12	11	78,28	0,03914	0,43054	38	37	16,11	0,00805	0,29785
13	12	82,10	0,04105	0,49260	39	38	14,05	0,00703	0,26714
14	13	84,36	0,04218	0,54834	40	39	12,13	0,00606	0,23634
15	14	85,72	0,04286	0,60004	41	40	10,46	0,00523	0,20920
16	15	85,17	0,04259	0,63885	42	41	8,98	0,00449	0,18409
17	16	83,99	0,04200	0,67200	43	42	7,60	0,00380	0,15960
18	17	82,18	0,04109	0,69853	44	43	6,37	0,00318	0,13674
19	18	79,53	0,03977	0,71586	45	44	5,24	0,00262	0,11528
20	19	76,73	0,03836	0,72884	46	45	4,24	0,00212	0,09540
21	20	73,79	0,03690	0,73800	47	46	3,36	0,00168	0,07728
22	21	70,34	0,03517	0,73857	48	47	2,58	0,00129	0,06063
23	22	66,56	0,03328	0,73216	49	48	1,90	0,00095	0,04560
24	23	63,19	0,03160	0,72680	50	49	1,31	0,00066	0,03234
25	24	59,15	0,02958	0,70992	51	50	0,79	0,00040	0,02000
26	25	55,43	0,02772	0,69300	52	51	0,34	0,00017	0,00867
					53	52	0,02	0,00001	0,00052
	Σ						1960,96	0,98051	18,68

поездки пассажира к средней скорости движения автобуса, равно

$$\tau_{6-7} = \frac{4,6 \text{ км}}{37 \frac{\text{км}}{\text{час}}} = 7,56 \text{ мин.}$$

Тогда

$$\alpha_{6-7} = 0,5 \cdot 7,56 = 3,78.$$

Используя (32), подсчитаем среднее число пассажиров, находящихся на остановках в любой момент времени. Имеем: $\bar{c}_1 = 4$; $\bar{c}_2 = 5$; $\bar{c}_3 = 8$; $\bar{c}_4 = 18$; $\bar{c}_5 = 4$; $\bar{c}_6 = 3$; $\bar{c}_7 = 1$; $\bar{c}_8 = 1$.

Соответствующие вероятности π_k , отличные от нуля, примут значения согласно (34): $\pi_1 = 0,25$; $\pi_3 = 0,125$; $\pi_4 = 0,25$; $\pi_5 = 0,125$; $\pi_8 = 0,125$; $\pi_{12} = 0,125$. Из (29) найдем финальные вероятности состояний.

Необходимые данные приведены в табл. 6. Так как имеет место неравенство

$$\sum_{k=53}^{62} \varphi_k < 0,0001,$$

то значения вероятностей φ_k , $k = 53, \dots, 62$, в расчет не принимались

$$\sum_{k=0}^{62} \frac{\varphi_k}{\varphi_0} = 1960,96; \varphi_0 = 0,00050.$$

Среднее число пассажиров, находящихся в автобусе,

$$\sum_{k=1}^{62} k\varphi_k = 18,68,$$

а среднее число пассажиров в группе требований входящего потока

$$\sum_{s=1}^s s \cdot \Pi_s = 5,5.$$

Тогда вероятность отказа пассажиру в обслуживании, согласно (36)

$$\varphi_{\text{отк}} = 1 - \frac{18,68}{(5,5 \cdot 3,78)} = 0,102,$$

т. е. 10,2% пассажиров окажутся необслуженными.

При движении в обратном направлении автобус не обслужит количество пассажиров, которое можно определить по (40)

$$\bar{Q}_{3,3} = \frac{45}{2} \cdot 0,102 \cdot 0,5 \cdot 5,5 = 6.$$

Очевидно, после того, как по обратному направлению пройдут все 7 автобусов, эта цифра возрастет до 42, что больше максимального наполнения автобусов. Поэтому уменьшать число автобусов на 3-м маршруте нецелесообразно.

Следует полагать, что среднее количество пассажиров, находящихся в автобусе, и средняя наполняемость автобуса на остановках маршрута должны быть близкими по величине, так как являются одним и тем же параметром, характеризующим наполнение автобуса. Только первая из этих величин найдена при рассмотрении автобуса как системы массового обслуживания, а вторая — методом средних. Действительно: $\bar{Q}_{6-7} = 16,61$ пассажиров;

$$\sum_{k=1}^{62} k\varphi_k - Q_{6-7} = 18,68 - 16,61 = 2,07$$

пассажиров, что составляет 11%. Таким образом, в реальных условиях величину $\sum_{k=1}^{Q_r} k\varphi_k$ можно принять приближенно равной $\bar{Q}_k$. Это позволяет определять вероятность отказа пассажиру в обслуживании, не производя громоздких вычислений, связанных с определением финальных вероятностей.

Воспользовавшись снова (36) и заменяя $\sum_{k=1}^{62} k\varphi_k$ на $\bar{Q}_{6-7}$, получим

$$\varphi'_{\text{отк}} = 1 - \frac{16,61}{20,79} = 0,2.$$

Разность $\varphi_{\text{отк}} - \varphi'_{\text{отк}} = 0,098$, т. е. 9,8%, что можно считать приемлемым на практике.

Вычислим по приближенной формуле вероятность отказа пассажиру в обслуживании для времени с 7-00 до 8-00 и с 8-00 до 9-00. Время обслуживания с 7-00 до 8-00 составляет $\tau_{7-8} = 6$ мин. и $a_{7-8} = 3$.

Используя вышеизложенную методику, найдем

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\pi_s' = 8,0 \text{ и } Q_{6-7} = 20,17.$$

Тогда

$$\Phi'_{\text{отк}} = 1 - \frac{20,17}{8,3} = 0,16$$

или 16%.

Аналогично с 8-00 до 9-00 имеем:

$$\tau_{8-9} = 7,56 \text{ мин.}, \alpha_{8-9} = 3,78, \sum_{s=1}^{\infty} s\pi_s = 4,75 \text{ пассажиров; } \bar{Q}_{8-9} = 17,36 \text{ пассажиров.}$$

Тогда

$$\Phi'_{\text{отк}} = 1 - \frac{17,36}{3,78 \cdot 4,75} \approx 0,04,$$

т. е. 4%.

Нетрудно видеть, что расчетная формула (17) дает практически надежные результаты и ее можно применять при определении необходимого числа транспортных средств для внутригородских маршрутов. Следует отметить, что расчетное число транспортных средств нужно всегда проверять в эксплуатационных условиях.

Рассмотренная методика может быть использована при решении аналогичных задач на железнодорожном, воздушном и водном транспорте.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Страментов, В. Г. Сосянц, М. С. Фишельсон. Городской транспорт. М., Стройиздат, 1969.
2. О. А. Новиков, С. И. Петухов. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М., «Сов. радио», 1969.

Поступила в редакцию
25 III 1970