

О МОДЕЛЯХ ОПТИМИЗАЦИИ ХРАНЕНИЯ, ПЕРЕРАБОТКИ И РЕАЛИЗАЦИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРОДУКТОВ

Б. С. МУСАЕВ

(Баку)

Многие продукты сельского хозяйства в процессе хранения, транспортировки и реализации теряют частично или полностью ингредиенты, составляющие их пищевую (питательную) ценность. Производство этих продуктов носит в большей или меньшей мере сезонный характер, а потребляют их сравнительно равномерно в течение всего года. Поэтому возникает важная народнохозяйственная задача — максимизировать сохранность пищевой ценности исходных продуктов.

На практике эта задача решается созданием определенных режимов хранения (в обычных складских помещениях, на холодильниках и т. п.) и переработкой исходных продуктов (консервирование, сушка, выработка новых продуктов). Соотношение этих способов устанавливается в значительной мере интуитивно, экспертным путем, что не гарантирует от ошибок.

При попытке решать данную задачу путем оптимизационных расчетов первым и весьма сложным вопросом является выбор и обоснование критерия оптимальности. В качестве критерия нами предлагается *максимизация интегральной пищевой ценности продуктов (за весь период от получения исходного продукта до его реализации конечному потребителю)*. Целесообразность такого критерия обосновывается тем, что он ориентирует, при заданных ограничениях, на получение максимума полезного эффекта от определенной массы сельскохозяйственной продукции, подлежащей длительному хранению. Однако практическое его применение в оптимизационных расчетах связано с известными трудностями.

К сожалению, пока еще нет сколько-нибудь приемлемых способов единообразного соизмерения различных ингредиентов, составляющих тот или иной продукт. Поэтому приходится исходить из следующих предпосылок. Для каждого продукта с достаточной степенью обоснованности можно выделить главный, наиболее ценный ингредиент. Так, для большинства фруктов главным ингредиентом считаются инвертные сахара (фруктоза и глюкоза). Для остальных ингредиентов (также играющих большую роль) логично установить нижнюю границу их сохранности, за пределами которой даже максимальное сохранение основного ингредиента не компенсирует их недостаток.

Описываемая ниже задача разработана для нахождения по критерию максимума пищевой ценности оптимального варианта хранения яблок, их переработки и реализации от поступления на заготовительные пункты до продажи населению в свежем или переработанном виде.

Схема хранения, переработки и реализации яблок и продуктов из них с достаточной для наших целей точностью может быть основана на следующих предпосылках: 1) яблоки доставляются в место расположения хранилищ и перерабатывающих предприятий — пункт А; 2) весь объем поставок осуществляется одновременно; 3) розничная продажа осуществля-

ется в пункте Б; 4) яблоки могут храниться по одному из двух режимов хранения (I — в холодильнике, II — без холодильника); 5) продукты переработки хранятся только по II режиму хранения; 6) все, что переработано, потребляется; 7) исходный продукт (яблоки) может быть частично не использован; 8) продукты переработки не подвержены физической убыли; 9) продукты переработки сохраняют неизменной свою пищевую ценность (содержание ингредиентов в них не меняется); 10) при транспортировке яблок от пункта А до пункта Б имеет место их физическая убыль; 11) при хранении яблок наблюдается физическая убыль, размеры которой зависят от режима и времени хранения; 12) при хранении изменяется пищевая ценность яблок (содержание ингредиентов); изменения зависят от режима и времени хранения; 13) расстоянием от хранилищ до перерабатывающих предприятий в первом приближении можно пренебречь.

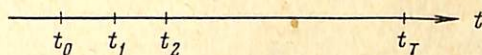
Будем учитывать возможность переработки яблок на следующие семь продуктов: 1) варенье, 2) джем, 3) сок, 4) компот, 5) соус, 6) повидло, 7) пюре*. Исходному продукту (яблокам) присвоим номер 0, остальным — номера в порядке перечисления.

Как в яблоках, так и в продуктах их переработки принимаются во внимание следующие ингредиенты: 1) редуцированные сахара (максимизируемый ингредиент); 2) витамин «С», 3) сахароза; 4) кислоты; 5) азотные вещества; 6) клетчатка; 7) пектин.

В рассматриваемой задаче возникает естественная периодичность, характерная для сельского хозяйства, с периодом в один год (от урожая до урожая). Этот период разобьем на ряд интервалов (не обязательно одинаковой длины) и примем дискретную сетку времени.

Введем необходимые определения и обозначения: Q — заданный объем поставок яблок, τ ; Q' — объем хранилищ по I режиму хранения, τ ; Q'' — объем хранилищ по II режиму хранения, τ ; j — номер продукта переработки, $j = 1, 2, \dots, J$, где J — общее количество продуктов переработки, $J = 7$; i — номер ингредиента, $i = 1, 2, \dots, I$, где I — общее количество ингредиентов, $I = 7$.

Остановимся на факторе времени. Началом отсчета (условным моментом поступления урожая данного года) будем считать 1 августа. Таким образом, рассматриваем один полный сезон — с 1 августа данного года по 1 августа следующего года. Разбиение года на интервалы осуществляется с помощью точек (см. рисунок), где t_0 совпадает с 1 августа данного года, а t_T — с 1 августа следующего года; T — количество интервалов.



Через $(\tau, \tau + 1)$ обозначаем интервал от момента t_τ до момента $t_{\tau+1}$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$.

Теперь можно формально ввести те элементы, которые в данной задаче играют роль «производственных способов» (или «технологий») и объединяются понятием расчетного продукта, включающим все существенные факторы — режим хранения, интервал потребления для исходного продукта, интервал переработки для продуктов переработки. Если нам задана 1 τ расчетного продукта, то тем самым однозначно определены содержание в ней всех ингредиентов и соответствующая ей поставка исходного продукта (в начальный момент).

Расчетный продукт $(0, \tau)'$ — это продукт 0, помещенный (после поставки в пункт А) в хранилище с I режимом хранения и выпущенный в

* Анализ фактического материала ряда перерабатывающих предприятий показал, что указанные семь продуктов составляют около 95% всего объема выпуска.

розничную продажу (пункт Б) на интервале $(\tau, \tau + 1)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$.

Расчетный продукт $(0, \tau)''$ — это продукт 0, помещенный в хранилище со II режимом хранения и выпущенный в розничную продажу на интервале $\tau, \tau + 1$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$.

Расчетный продукт $(j, \tau)'$ — это продукт переработки j , полученный на интервале $\tau, \tau + 1$ из исходного продукта, хранившегося с момента поставки при I режиме хранения. Здесь $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $j = 1, 2, \dots, J$.

Расчетный продукт $(j, \tau)''$ — это продукт переработки j , полученный на интервале $(\tau, \tau + 1)$ из исходного продукта, хранившегося с момента поставки при II режиме хранения, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $j = 1, 2, \dots, J$.

Введем обозначения для некоторых констант, входящих в условия задачи: K_j — количество исходного продукта, τ , перерабатываемого при изготовлении 1 τ продукта j , $j = 1, 2, \dots, J$; M_1^{τ} — верхнее ограничение по мощности, τ , для переработки исходного продукта на продукты 1 и 2 на интервале $(\tau, \tau + 1)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$. Совместное ограничение по мощности для выработки продуктов 1 и 2 вводится из условий технологии; M_j^{τ} — верхнее ограничение по мощности, τ , для переработки исходного продукта на продукт j на интервале $(\tau, \tau + 1)$, $j = 3, 4, \dots, J = 7$; $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; α — коэффициент физической убыли (при некоторых условиях) того количества яблок, которое при данных условиях остается сохранным, если в начальный момент была заложена на хранение ровно 1 τ ; γ — коэффициент физической убыли исходного продукта при транспортировке от А до Б; q_{τ}' — коэффициент физической убыли исходного продукта на интервале $(\tau, \tau + 1)$ при I режиме хранения, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; q_{τ}'' — коэффициент физической убыли исходного продукта для интервала $(\tau, \tau + 1)$ при II режиме хранения; $K_i'(j, \tau)$ — содержание ингредиента i в 1 τ расчетного продукта $(j, \tau)'$; $i = 1, 2, \dots, I$; $j = 0, 1, \dots, J$; $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $K_i''(j, \tau)$ — содержание ингредиента i в 1 τ расчетного продукта $(j, \tau)''$; $i = 1, 2, \dots, I$; $j = 0, 1, \dots, J$; $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; N_i — нижнее ограничение по суммарному (за весь период) потреблению ингредиента $i = 2, 3, \dots, I$; $V_{\tau}(j)$ — верхнее ограничение по сбыту продукта j на интервале $(\tau, \tau + 1)$; $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $j = 0, 1, \dots, J$.

Введем обозначения для искоемых величин (переменные задачи): $x'(j, \tau)$ — объем выработки расчетного продукта $(j, \tau)'$, $j = 1, 2, \dots, J$; $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $x''(j, \tau)$ — объем выработки расчетного продукта $(j, \tau)''$, $j = 1, 2, \dots, J$; $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $y_{\tau}'(0)$ — объем реализации расчетного продукта $(0, \tau)'$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $y_{\tau}''(0)$ — объем реализации расчетного продукта $(0, \tau)''$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $y_{\tau}(j)$ — объем реализации продукта переработки j на интервале $(\tau, \tau + 1)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$; $j = 1, 2, \dots, J$.

Используя эти обозначения, имеем: $K_1'(0, \tau)y_{\tau}'(0)$ — количество ингредиента 1, полученное потребителем в составе расчетного продукта $(0, \tau)'$; $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$. Аналогично $K_1''(0, \tau)y_{\tau}''(0)$ — количество ингредиента 1, полученное потребителем в составе расчетного продукта $(0, \tau)''$. Следовательно, суммарное количество ингредиента 1 за весь период в составе исходного продукта

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} (K_1'(0, \tau)y_{\tau}'(0) + K_1''(0, \tau)y_{\tau}''(0)). \quad (1)$$

Количество ингредиента 1, полученного потребителем с продуктами переработки, нельзя выразить через объемы реализации $y_{\tau}(j)$, ибо здесь отсутствует дифференциация на реализацию расчетных продуктов $(j, \tau)'$ и $(j, \tau)''$. Иначе говоря, мы ввели переменные $y_{\tau}(j)$ вместо $y_{\tau}'(j)$ и $y_{\tau}''(j)$.

Это возможно, поскольку потребитель не различает, при каком режиме хранился тот исходный продукт, продукт переработки которого он закупает. Нет разницы и в цене реализации. Но есть разница в содержании ингредиентов, которую нельзя учесть, оперируя суммарной величиной $y_{\tau}(j) \times \times y_{\tau}(j) = y'_{\tau}(j) + y''_{\tau}(j)$. Поэтому воспользуемся указанным выше принципом — «все, что переработано, потребляется» — и выразим нужную нам величину через объемы выработки соответствующих расчетных продуктов $x'(j, \tau)$ и $x''(j, \tau)$. Получаем, что $K_1'(j, \tau)x'(j, \tau)$ — количество ингредиента 1, содержащееся в выработанном расчетном продукте $(j, \tau)'$; $K_1''(j, \tau)x''(j, \tau)$ — количество ингредиента 1, содержащееся в выработанном расчетном продукте $(j, \tau)''$. Суммарное количество ингредиента 1, полученное потребителем за весь период в составе всех продуктов переработки,

$$\sum_{j=1}^J \sum_{\tau=0}^{T-1} (K_1'(j, \tau)x'(j, \tau) + K_1''(j, \tau)x''(j, \tau)). \quad (2)$$

Объединение (1) и (2) дает выражение для критерия оптимальности

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=0}^{T-1} (K_1'(0, \tau)y'_{\tau}(0) + K_1''(0, \tau)y''_{\tau}(0)) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{\tau=0}^{T-1} (K_1'(j, \tau)x'(j, \tau) + K_1''(j, \tau)x''(j, \tau)) \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя для любого из ингредиентов те же рассуждения, что и для ингредиента 1, имеем аналогичное (3) выражение для суммарного количества ингредиента, полученного потребителем за весь период. Поэтому *ограничения снизу по потреблению ингредиентов* можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=0}^{T-1} (K_i'(0, \tau)y'_{\tau}(0) + K_i''(0, \tau)y''_{\tau}(0)) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{\tau=0}^{T-1} (K_i'(j, \tau)x'(j, \tau) + K_i''(j, \tau)x''(j, \tau)) \geq N_i; \quad i = 2, 3, \dots, I. \end{aligned} \quad (4)$$

Ограничения сверху по сбыту исходного продукта (платежеспособный спрос)

$$y'_{\tau}(0) + y''_{\tau}(0) \leq V_{\tau}(0), \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1. \quad (5')$$

Ограничения сверху по сбыту продуктов переработки

$$y_{\tau}(j) \leq V_{\tau}(j), \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (5'')$$

Ограничения сверху по (совместным) мощностям переработки на продукты 1 и 2

$$x'(1, \tau) + x''(1, \tau) + x'(2, \tau) + x''(2, \tau) \leq M_1^{\tau}, \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1. \quad (6')$$

Ограничения сверху по мощности переработки на продукты 3, 4, ..., J

$$x'(j, \tau) + x''(j, \tau) \leq M_j^{\tau}, \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1; \quad j = 3, 4, \dots, J. \quad (6'')$$

Баланс исходного продукта определяется так. Сначала выписываются выражения для количеств исходного продукта, обеспечивающих получение 1 т того или иного расчетного продукта. Через $K'(j, \tau)$ обозначается количество исходного продукта, поставка которого в начальный момент

дает нам 1 τ расчетного продукта $(j, \tau)'$, $j = 0, 1, \dots, J$; $\tau = 0, 1, \dots, T-1$. Аналогично вводится $K''(j, \tau)$.

Учитывая физическую убыль при транспортировке и хранении, а также коэффициенты закладки при переработке, получаем

$$\begin{aligned} K'(0, \tau) &= 1 / \gamma q_{\tau}', & K''(0, \tau) &= 1 / \gamma q_{\tau}'', \\ K'(j, \tau) &= K_j / q_{\tau}', & K''(j, \tau) &= K_j / q_{\tau}''. \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать ограничения по балансу исходного продукта (отдельно для каждого из режимов хранения)

$$Q' \geq \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{1}{q_{\tau}'} \left(\frac{y_{\tau}'(0)}{\gamma} + \sum_{j=1}^J K_j x'(j, \tau) \right), \quad (7')$$

$$Q'' \geq \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{1}{q_{\tau}''} \left(\frac{y_{\tau}''(0)}{\gamma} + \sum_{j=1}^J K_j x''(j, \tau) \right). \quad (7'')$$

Балансы производства и сбыта продуктов потребления составляются следующим образом. Прежде всего выражается формально принцип «все, что переработано, потребляется»

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} y_{\tau}(j) = \sum_{\tau=0}^{T-1} (x'(j, \tau) + x''(j, \tau)), \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (8')$$

Неравенства, похожие по форме на уравнения (8') и гарантирующие, что потребности не будут «опережать» производство продукта, записываются

$$\sum_{\tau=0}^t y_{\tau}(j) \leq \sum_{\tau=0}^t (x'(j, \tau) + x''(j, \tau)), \quad (8'')$$

$$j = 1, 2, \dots, J, \quad t = 0, 1, \dots, T-2.$$

Неотрицательность всех переменных непосредственно следует из смысла задачи

$$\begin{aligned} x'(j, \tau) &\geq 0, & x''(j, \tau) &\geq 0, & y_{\tau}'(0) &\geq 0, & y_{\tau}''(0) &\geq 0, \\ y_{\tau}(j) &\geq 0, & j &= 1, 2, \dots, J, & \tau &= 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, модель оптимизации по критерию максимума пищевой ценности формализуется в виде (3) — (9).

Остановимся на некоторых характерных чертах модели. Группа ограничений (5'') — это верхние границы для переменных $y_{\tau}(j)$. Существуют, как известно, модификации симплекс-метода, в которых наличие двусторонних ограничений на переменные учитывается алгоритмически (см., например, [1, гл. 5, § 7]). Это дает возможность уменьшить размеры задачи линейного программирования.

Обозначим через M количество ограничений задачи (3) — (9)*, через M^* — то же, но не принимая во внимание верхние границы (5''); N — количество переменных задачи (3) — (9). $M = I + 3TJ + 1$; $M^* = I + 2TJ + 1$; $N = 3TJ + 2T$.

Сравнивая M и M^* , видим ту экономию, которую дает алгоритмический учет двусторонних ограничений. Все последующие расчеты ведем, счи-

* Разумеется, условия неотрицательности не учитываются при подсчете количества ограничений.

тая, что имеет место алгоритмический учет двусторонних ограничений. Подсчитываем заполненность матрицы задачи, т. е. количество ненулевых элементов Δ' . Получим (без учета строки целевой функции)

$$\Delta' = T(J+1)\left(2I + \frac{11}{2}\right) + \frac{3}{2}T(TJ-1) - 2T - 2TJ.$$

В вычислениях мы ориентировались на симплекс-метод, запрограммированный в виде универсальной системы стандартных программ (СП) в [2]. Мы видим [2, стр. 10] (с учетом специфики нашей задачи и введенных обозначений), что система СП заведомо может быть применена для решения задачи при условиях

$$(m+2)^2 + \Delta' + 2n \leq 4 \times 4096, \quad m \leq 125.$$

Здесь (см. выше) $m = M^*$, $n = N$. Так как $I = J = 7$, $M^* = 14T + 8$; $N = 23T$

$$\Delta' = \frac{277}{2}T + \frac{21}{2}T^2.$$

Отсюда получаем запись условий применимости

$$\varphi(T) \equiv (14T + 10)^2 + \frac{277}{2}T + \frac{21T^2}{2} + 46T \leq 4 \times 4096, \quad (10)$$

$$14T + 8 \leq 125. \quad (11)$$

Из (11) сразу следует

$$T \leq 8. \quad (12)$$

Далее, легко подсчитать, что

$$\varphi(8) > 4 \times 4096, \quad \varphi(7) < 4 \times 4096. \quad (13)$$

Из монотонности функции $\varphi(T)$ и из целочисленности T вытекает, что система (12), (13) эквивалентна единственному условию

$$T \leq 7. \quad (14)$$

Поскольку T выгодно взять большим (это уменьшает неточности, связанные с дискретностью времени), то естественно было бы принять T равным максимально возможному значению, т. е. 7. Однако выбор значения T в нашей задаче оказался иным в связи с тем, что наряду с описываемой мы разработали модель, где в качестве критерия оптимальности выступает максимум прибыли от хранения, переработки и реализации определенной массы исходного продукта (из-за недостатка места эта модель здесь не приводится). Чтобы было возможно провести совместное рассмотрение и сравнение результатов расчетов по обоим моделям, для них принята единая разметка шкалы времени, а именно $T=6$. Так как различным моментам времени соответствует различная интенсивность нагрузки по переработке и реализации, принимаем следующую неравномерную разметку шкалы времени (см. табл. 1).

Таблица 1

0	1	2	3	4	5	6
1 августа	1 октября	1 ноября	1 декабря	1 января	1 февраля	1 августа

В частности, интервал 5,6 принят столь длительным потому, что: 1) интенсивность реализации на нем заведомо низкая; 2) переработка полностью отсутствует.

Информация для численных расчетов была нами собрана и обобщена на основе фактических материалов, относящихся к Баку и обслуживающим его зонам, а также к консервным заводам ряда других районов страны. Остановимся на некоторых допущениях, принятых в численных расчетах.

На заготовительные пункты и пункты переработки поступают яблоки нескольких сортов, различающихся по содержанию в них ингредиентов. Поэтому возникает проблема агрегации и нахождения средних величин, могущих быть примененными в практических расчетах. Некоторые допущения были приняты также при установлении нижних границ сохранности ингредиентов.

Для решения обеих задач оптимизации (на максимум пищевой ценности и максимум прибыли) была выбрана универсальная система СП [2]. Система предназначена для ЭВМ М-20 и может быть также использована для ЭВМ М-220, БЭСМ-3М, БЭСМ-4. Эта программа позволяет решать задачи довольно большого объема. В ней предусмотрена компактная запись исходных данных (записываются только ненулевые элементы исходной матрицы).

Наши задачи решались на ЭВМ М-220. Задача на максимизацию пищевой ценности была решена за 157 симплексных итераций, общее время решения — около 55 мин.; задача на максимизацию прибыли решена за 118 симплексных итераций, общее время ее решения — около 52 мин.

Следует отметить, что практически обе задачи пришлось выводить из ЭВМ несколько раз, в основном для устранения ошибок в подготовке и кодировании информации. Некоторые ошибки обнаруживались лишь после подстановки полученного ошибочного решения в ограничения.

Вкратце остановимся на результатах решения по модели I (максимизация пищевой ценности) и по модели II (максимизация прибыли). Для сравнения результатов была выбрана единая система переменных, к которой и приводим все показатели по обоим моделям: $y'_\tau(0)$ — объем реализации продукта 0 на интервале $(\tau, \tau + 1)$ по I режиму хранения; $y''_\tau(0)$ — объем реализации продукта 0 на интервале $(\tau, \tau + 1)$ по II режиму хранения; $y_\tau(j)$ — объем реализации продукта переработки j на интервале $(\tau, \tau + 1)$; $x(j, \tau)$ — объем переработки яблок на продукт j на интервале $(\tau, \tau + 1)$.

Переменные $y'_\tau(0)$ и $y''_\tau(0)$ непосредственно входят в обе модели; $y_\tau(j)$ непосредственно входит в модель I, а для модели II

$$y_\tau(j) = \sum_{v=0}^{\tau} y_{v,\tau}(j).$$

Наконец,

$$x(j, \tau) = \begin{cases} x'(j, \tau) + x''(j, \tau) & \text{— для модели I,} \\ \sum_{v=\tau}^{T-1} y_{v,\tau}(j) & \text{— для модели II.} \end{cases}$$

При сопоставлении результатов решения по обоим моделям получаются следующие выводы: 1) продукты переработки 2, 3, 5, 7 не производятся в обеих моделях, иначе говоря, они невыгодны по обоим критериям; 2) продукт 6 производится только в модели I, т. е. производство повидла оказалось выгодным по критерию максимизации пищевой ценности и невыгодным по критерию прибыли; 3) продукты переработки 1 и 2 производятся и сбываются в обеих моделях в одинаковых количествах и по одному и тому же графику, т. е. для этих продуктов оба критерия эквивалентны; 4) исходный продукт для каждого из режимов хранения

дает разные результаты по обеим моделям (как по количеству, так и по графику).

Итак, в целом критерии I и II существенно не эквивалентны (хотя по некоторым продуктам и имеет место эквивалентность). Особенно ясно это видно на примере продукта 6.

Разумеется, подобная констатация факта недостаточна. Необходим критический анализ существующих цен на продукты переработки яблок и постановка и решение проблемы о соответствующем стимулировании спроса. В конечном счете должны максимально совпадать три подхода, в основу которых положены: а) прибыль промышленности и торговли, б) здоровье потребителя, в) степень удовлетворения спроса потребителя.

Рассмотренным выше моделям присущ недостаток, характерный для известной задачи о диете [3], — не учитывается потребность в разнообразии. Вполне возможно, что оптимальный план будет содержать всего 1—2 продукта.

В пределах чисто линейной схемы было бы трудно учесть потребность в разнообразии, но это возможно при переходе к целочисленной линейной модели. Требование разнообразия (в его простейшем варианте) можно записать как ограничение снизу на количество фактически потребляемых продуктов. О формализации этого условия см. [4—6]. Там же можно найти целый ряд моделей дискретного программирования, в том числе и модели с фиксированными доплатами, которые могут быть применены в исследуемых нами задачах. Однако введение целочисленности существенно осложняет структуру задачи и заметно увеличивает вычислительные трудности. Поэтому особенно ценны те направления обобщения задачи, которые одновременно достаточно актуальны и не связаны с решением чрезмерно сложных вычислительных проблем. Укажем некоторые из таких направлений.

Ясно, что принятая нами разметка шкалы времени на шесть интервалов слишком груба для оперативных задач. Попробуем оценить возможности оперативного планирования при другой, более совершенной вычислительной технике. Для определенности рассмотрим модель максимизации пищевой ценности. Беря за основу ту же программу, видим, что основное ограничение по памяти имеет вид

$$T = (14T + 10)^2 + \frac{277T}{2} + \frac{21T^2}{2} + 46T \leq P,$$

где P — размер памяти.

Рассмотрим три варианта разметки шкалы времени: 1) месячное планирование ($T = 12$); 2) недельное ($T = 52$); 3) ежедневное ($T = 365$).

Таблица 2

T	12	52	365
$\Phi(T)$	35 410	581 630	2 768 0605

Выпишем соответствующие значения функции T (см. табл. 2), откуда видно, что ежедневное планирование предъявляет нереальные (на сегодняшний день) требования к памяти ЭВМ. Что же касается двух других вариантов оперативного планирования, то они вполне реальны (хотя планирование по неделям и может потребовать использования ЭВМ с достаточно большой памятью).

Остановимся теперь на возможности перехода к многопродуктовым моделям, т. е. к моделям, в которых вместо одного исходного продукта

(яблоки) рассматривается несколько исходных продуктов (яблоки, виноград и т. д.) *. В простейшем случае ограничения многопродуктовой задачи распадаются на несколько независимых блоков. А так как целевая функция линейна, то и вся многопродуктовая задача состоит из нескольких однопродуктовых задач.

Подобная легкость перехода от однопродуктовой к многопродуктовой модели связана с тем, что при переходе мы не внесли необходимых изменений в структуру модели: 1) не учли, что некоторые продукты переработки являются «комплексными», т. е. сырье для их переработки содержит несколько исходных продуктов (например, компот-ассорти); 2) не ввели общего ограничения на платежеспособный спрос.

В пределах однопродуктовой модели такое ограничение было бы неестественным; так возникали лишь ограничения по спросу на каждый отдельный продукт (исходный и переработанный). Эти ограничения выражались в натуральной форме как верхние ограничения по сбыту.

При переходе к многопродуктовой задаче возникает естественный вопрос: какую часть своего бюджета потребитель выделяет на фрукты? ** И, как следствие, возникает упомянутое выше ограничение по платежеспособному спросу, которое связывает отдельные однопродуктовые блоки ограничений в единую (блочную) задачу. Складывается блочная задача, в которой (в первом приближении) всего лишь одно общее ограничение. Здесь должен работать не только метод декомпозиции Данцига — Вулфа [3], но и параметрический подход Е. Г. Гольштейна [7] и итеративный метод Ю. Ю. Финкельштейна [8], специально приспособленные к случаю одного дополнительного ограничения.

Таким образом, появляется реальная возможность решения соответствующих задач по всей группе «фрукты — овощи». О распространении этого подхода на рассмотрение всех пищевых продуктов следует говорить с известной осторожностью, поскольку доля комплексных продуктов переработки может здесь оказаться значительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Линейное программирование. Теория и конечные методы. М., Физматгиз, 1963.
2. Г. Р. Орешкин. Универсальная система стандартных программ для решения задач линейного программирования в различных формах записей (ЭВМ М—20). М., 1969 (ЦЭМИ АН СССР).
3. Дж. Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., «Прогресс», 1966.
4. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование. М., «Наука», 1969.
5. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретные задачи математического программирования. В сб. Итоги науки. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966. М., 1967 (ВИНИТИ).
6. А. А. Корбут. Целочисленные задачи линейного программирования. В сб. Экономико-математические методы. Вып. 2, М., «Наука», 1965.
7. Е. Г. Гольштейн. О возможности расширения применимости частных методов линейного программирования. В сб. Планирование и экономико-математические методы. М., «Наука», 1964.
8. Ю. Ю. Финкельштейн. Итерационный метод для решения транспортной задачи с дополнительным линейным ограничением и оценка числа итераций. Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1963, т. 3, № 6.

Поступила в редакцию
5 XI 1970

* Говоря о многопродуктовых моделях, будем иметь в виду модели максимизации прибыли, так как для нескольких исходных продуктов мы не умеем соизмерять их пищевую ценность.

** Возможно, наиболее естественной постановкой задачи в данном случае является рассмотрение в целом всей группы «фрукты — овощи». При этом, однако, становится необходимым учитывать ряд дополнительных факторов, в том числе: а) колхозный рынок, б) импорт.