ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1971 том VII, вып. 3

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ЕМКОСТИ СКЛАДОВ ГОТОВОЙ ПРОДУКЦИИ

И. М. МАРТЫНОВ, Т. И. ПОПЕКО

(Артемовск)

В статье излагается методика расчета оптимальной емкости складских помещений для предприятий соляной промышленности.

Отсутствие или недостаточная емкость складских помещений может привести к остановке или замедлению темпа процесса добычи. Количественная оценка этого явления производится по следующей методике. Рассматривая количество соли, выпускаемое предприятием в готовом для отгрузки виде, как переменную случайную величину x, можно установить закон ее распределения $p(x)$ и определить таким образом вероятность выдачи различных количеств продукта за определенные периоды времени.

Одновременно необходимо установить вероятности возможности отгрузки соответствующих количеств продукта в используемые транспортные средства. При этом удобно рассмотреть законы распределения двух случайных величин: а) емкости y подвижного состава, загружаемого в единицу времени; б) продолжительности t перерывов в отгрузке, вызванных отсутствием подвижного состава.

Искомую емкость складского помещения также удобно разбить на две составляющие: Q, компенсирующую недостаток подвижного состава при его наличии, и R, компенсирующую перерывы в обеспечении подвижным составом.

Вероятность бесперебойной работы предприятия $P^{н}_{раб}$ при наличии любого количества транспортных средств определится для каждого интервала времени как сумма вероятностей событий, т. е. суммарная емкость склада Q и подвижного состава y равна или больше количества готовой продукции x, выпускаемого за данный интервал

$$P^{н}_{раб} = p_{н} \sum p(x_i)\, p(y + Q \geqslant x_i), \tag{1}$$

где $p_{н}$ — вероятность наличия загружаемых транспортных средств.

Вероятность же $P_{пр}{}^{н}$ прекращения процесса добычи (производства) из-за недостатка емкостей для размещения готовой продукции легко подсчитать по формуле

$$P^{н}_{пр} = 1 - P^{н}_{раб} = p_{н} \sum p(x_i)\, p(y + Q < x_i). \tag{2}$$

Рассматривая вероятности $p(x)$ и $p(y)$ как объективные характеристики процессов добычи и отгрузки, получим вероятность (а значит и долю времени) простоя как функцию емкости склада Q. Но доля времени простоя определяет и количество недоданной продукции A. При производительности N количество недоданной продукции $A = nTNP_{пр}{}^{н} = nTNp_{н}\Sigma p(x_i)\, p(y + Q < x_i) = f(Q)$.

Экономическая оценка $E_{н}$ понесенных предприятием потерь выразится

$$E_{н} = nTNep_{н}\Sigma p(x_i)\, p(y + Q < x_i), \tag{3}$$

где n — число рабочих дней в году; T — суточный технологический фонд времени добычи; N — часовая производительность добычи, *т/час*; e — потери от недодачи единицы объема продукции, *руб/т*.

Емкость склада Q определит суммарные затраты E_c на его создание и эксплуатацию. Эти затраты складываются из двух частей: зависящих от емкости ($E_з Q$) и не зависящих от нее (E_0)

$$E_c = E_0 + E_з Q, \tag{4}$$

где $E_з$ — доля зависящих затрат, приходящаяся на единицу емкости склада.

Таким образом, суммарные затраты E_c и потери $E_п$ предприятия при емкости складского помещения Q можно определить по формуле

$$E = E_c + E_п = E_0 + E_з Q + nTNeP_{пр}^{п}. \tag{5}$$

Как видно, $E = f(Q)$, и можно найти такое значение $Q = Q_{опт}$, при котором $E = E_{min}$.

Вероятность простоя цеха добычи (производства готовой продукции) при наличии емкости склада R и отсутствии подвижного состава в течение времени t можно определить по формуле

$$P_{пр}^{0} = p_0 p\left(t_i \geqslant \frac{R}{N}\right) = p_0 \sum_{t=\frac{R}{N}}^{t_{max}} p\,(t_i), \tag{6}$$

где p_0 — вероятность отсутствия транспортных средств для любого момента времени.

Тогда количество недоданного продукта $B = nTNP_{пр}{}^{0} = f(R)$.

Экономическая оценка вызванных этим потерь

$$E_п' = nTNep_0 p\left(t_i \geqslant \frac{R}{N}\right). \tag{7}$$

Аналогично изложенному выше, затраты, связанные с созданием и содержанием склада емкости R, равны

$$E_c' = E_0 = E_з R, \tag{8}$$

а общие суммарные затраты и потери при наличии емкости R складских помещений

$$E' = E_0 + E_з R + nTNep_0 p\left(t_i \geqslant \frac{R}{N}\right). \tag{9}$$

На основании (5) и (9) можно найти E и E', т. е. суммарные затраты и потери от недостатка и отсутствия транспортных средств при каждом значении емкости склада. Общая оптимальная емкость склада $V_{опт}$ будет соответствовать min $(E + E')$.

Для определения оптимальной емкости склада одной из соляных шахт был проведен анализ колебаний: а) количества соли, добываемого по двухчасовым периодам * (во время беспрепятственной отгрузки добытой соли); б) емкостей транспортных средств, предоставляемых шахте для погрузки по тем же периодам, и в) продолжительности периодов, когда шахта совсем не обеспечивалась транспортными средствами.

Статистические ряды распределения этих величин приведены в табл. 1, 2, 3, гистограммы соответственно — на рис. 1, 2 и 3.

---

* Двухчасовые периоды были обусловлены имеющимися на шахте учетными формами, позволившими проанализировать изменение рассматриваемых величин за 1967—1969 гг.

Таблица 1

Вероятности $p(x)$ выдачи от x_i' до x_i'' готовой продукции по двухчасовым периодам во время беспрепятственной отгрузки

$x_i'-x_i''$	0—60	60—120	120—180	180—240	240—300	300—360	360—420	420—480	480—540	540—600
$p(x_i)$	0,018	0,051	0,095	0,163	0,142	0,168	0,173	0,144	0,044	0,002

Таблица

Вероятности $p(y)$ погрузки y тонн соли по двухчасовым периодам

y	0—60	60—120	120—180	180—240	240—300	300—360	360—420	420—480	480—540	540—600	600—660	660—720	720—780	780-
$p(y)$	0,045	0,101	0,121	0,132	0,139	0,135	0,108	0,080	0,074	0,03	0,02	0,009	0,005	0,

Таблица 3

Вероятности $p(t)$ длительности простоя t час. шахты из-за отсутствия транспортных средств

$t_i'-t_i''$	0—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24
$p(t_i)$	0,440	0,213	0,153	0,113	0,020	0,007	0,033	0,007	0	0	0,007	0,007

Расчет $Q_{опт}$ производился следующим образом. Задаваясь рядом величин Q и зная $p(x)$ и $p(y)$, подсчитывали вероятности простоя шахты для различных значений Q. Так, для подсчета $P_{пр}^{н}$ при $Q=180$ *т* определялась вероятность p_1 работы шахты при добыче $x_1=0-60$ *т/час*; $p_н=0{,}855$

$$p_1 = p_н p(x_1)\, p(y+Q \geqslant x_1) = p_н p(x_1) \sum_{y=x_1-Q}^{y_{max}} p(y) = 0{,}018 \cdot 1 \cdot 0{,}855 = 0{,}015;$$

затем вероятность p_2 работы шахты при $x_2=60-120$ *т/час*: $p_2 = p_н p(x_2)\, p(y+Q \geqslant x_2) = 0{,}051$ и т. д.

Например, для $x_6=300-360$ *т/час*

$$p_6 = p_н p(x_6)\, p(y+Q > x_6) = p(x_6) \sum_{y=x_6-Q}^{y_{max}} p(y) =$$

$$= 0{,}168 \cdot 0{,}855\,(0{,}132 + 0{,}139 + 0{,}135 + 0{,}168 + 0{,}080 + 0{,}74 + 0{,}030 + 0{,}020 + 0{,}009 + 0{,}005 + 0{,}001) = 0{,}168 \cdot 0{,}855 \cdot 0{,}733 = 0{,}105.$$

Вероятность простоя шахты

$$P_{пр}^{н} = 1 - \sum_{i=1}^{10} p_i = 1 - 0{,}751 = 0{,}249.$$

Аналогично $P_{пр}^{н}$ вычисляется для значений Q до 600 *т* через интервал в 60 *т* (интервал принят для соизмеримости с целым числом отгружаемых вагонов, исходя из грузоподъемности четырехосного вагона).

Рассматривая вероятности $P_{пр}^{н}$ как долю времени простоя предприятия, определяли потери, вызванные недодачей продукции, в зависимости от емкости Q, используя (3). При $nTN = 1\,500$ тыс. *т*, $e=2$ *р/т*, $Q=180$ *т* вероятность простоя равна 0,249 и потери в денежном выражении составят 747 тыс. *руб/год* *.

Величины вероятностей $P_{пр}^{н}$ и $E_п$ для соответствующих Q приведены в табл. 4.

---

* Все объемные и стоимостные показатели условны.

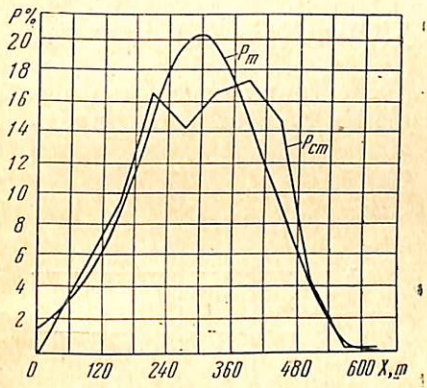

Рис. 1. Графики статистического $P_{ст}$ и теоретического $P_т$ распределения количества соли x, выдаваемого на поверхность по двухчасовым интервалам в периоды беспрепятственной отгрузки в транспортные средства

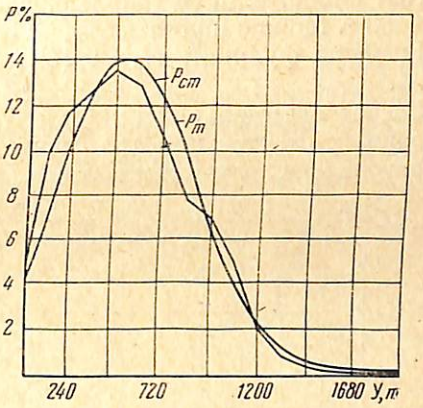

Рис. 2. Графики статистического $P_{ст}$ и теоретического $P_т$ распределений количества транспортных средств, y, загружаемых солью по двухчасовым периодам

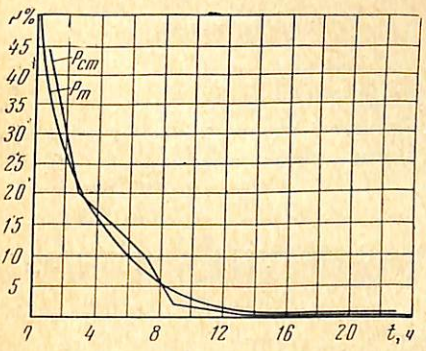

Рис. 3. Графики статистического $P_{ст}$ и теоретического $P_т$ распределения продолжительности t периодов отсутствия транспортных средств для отгрузки соли

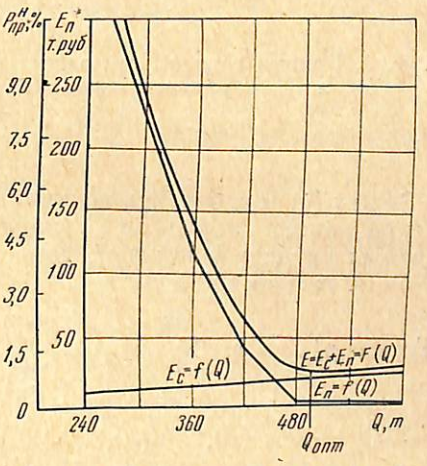

Рис. 4. Кривые зависимости затрат $E_п$, $E_с$ и E от емкости склада Q

В свою очередь приведенные затраты $E_с$ на сооружение и содержание склада емкости Q подсчитываются по (4). При $E_о = 0$ и $E_э = 20$ *руб/т* $E_с = 20\,Q$. Величины $E_с$ и $E = E_п + E_с$ для разных значений Q приведены в табл. 4.

Таблица 4

Q	180	240	300	360	420	480	540	600
$P^н_{пр}$	0,249	0,160	0,083	0,042	0,015	0,002	0,002	0,0025
$E_п$	747	480	249	126	45	6	6	4,5
$E^с$	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8	12
E	751	485	255	133	53,4	15,6	16,8	16,5

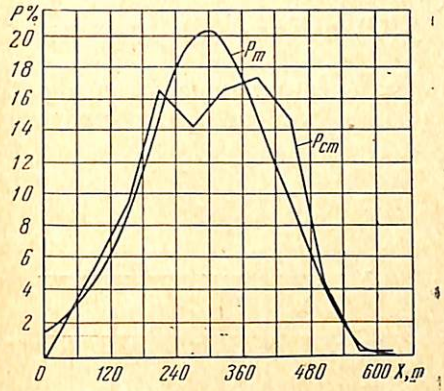

Рис. 1. Графики статистического $P_{ст}$ и теоретического $P_т$ распределения количества соли x, выдаваемого на поверхность по двухчасовым интервалам в периоды беспрепятственной отгрузки в транспортные средства

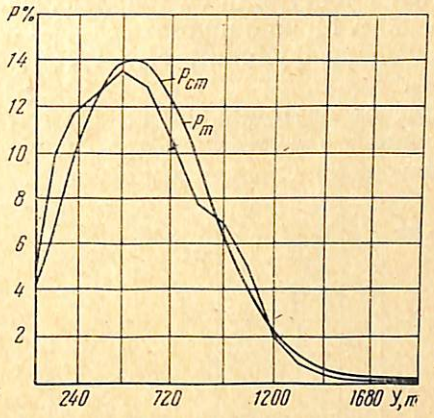

Рис. 2. Графики статистического $P_{ст}$ и теоретического $P_т$ распределений количества транспортных средств, y, загружаемых солью по двухчасовым периодам

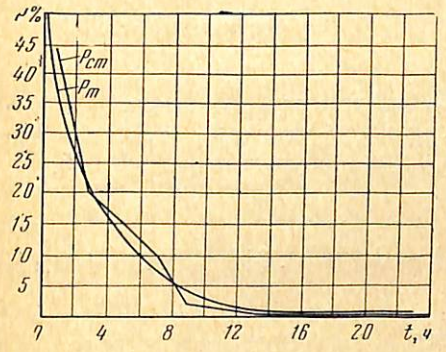

Рис. 3. Графики статистического $P_{ст}$ и теоретического $P_т$ распределения продолжительности t периодов отсутствия транспортных средств для отгрузки соли

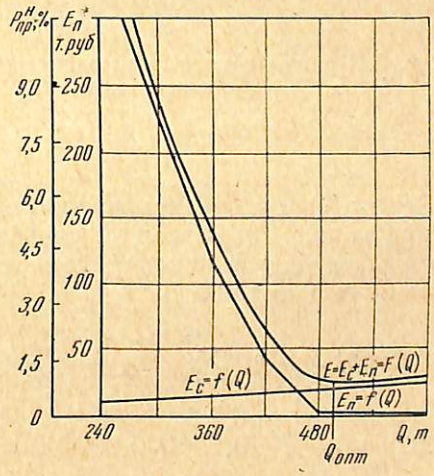

Рис. 4. Кривые зависимости затрат $E_п$, $E_с$ и E от емкости склада Q

В свою очередь приведенные затраты $E_с$ на сооружение и содержание склада емкости Q подсчитываются по (4). При $E_о = 0$ и $E_з = 20$ *руб/т* $E_с = 20\,Q$. Величины $E_с$ и $E = E_п + E_с$ для разных значений Q приведены в табл. 4.

Таблица 4

Q	180	240	300	360	420	480	540	600
$P^{н}_{пр}$	0,249	0,160	0,083	0,042	0,015	0,002	0,002	0,0025
$E_п$	747	480	249	126	45	6	6	4,5
$E_с$	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8	12
E	751	485	255	133	53,4	15,6	16,8	16,5

Как видно, $E_{min} = 15{,}6$ тыс. *руб/год* и соответствует емкости склада $Q = 480$ *т*. Можно принять $Q_{опт} = 500$ *т*.

Графики функций $E_п = f(Q)$, $E_с = f_1(Q)$ и $E = F(Q)$ приведены на рис. 4.

Расчет оптимальной емкости R для компенсации перерывов в работе, вызванных отсутствием транспортных средств для отгрузки продукции, производится следующим образом.

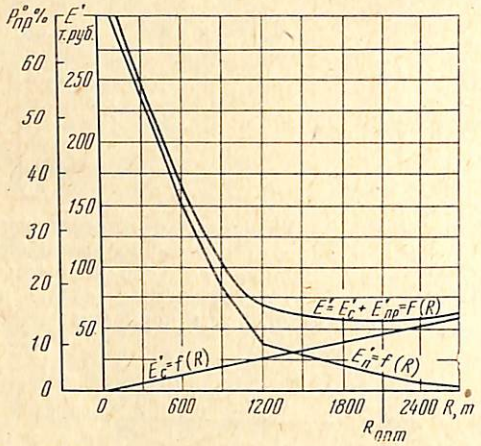

Рис. 5. Кривые зависимости затрат $E_п'$, $E_с'$ и E' от емкости склада R

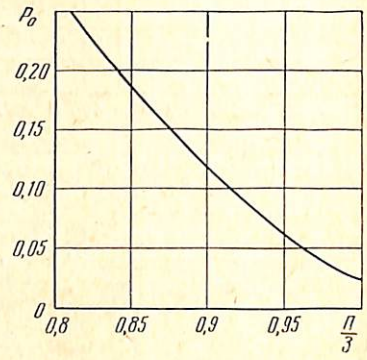

Рис. 6. График эмпирической зависимости вероятности p_0 от соотношения $\frac{П}{З}$

Зная $p(t)$ и задаваясь величинами R, найдем вероятность простоя шахты при каждом значении R, учитывая, что вероятность отсутствия транспортных средств в каждый момент времени составляет $p_0 = 0{,}145$. Пусть $R_1 = 300$ *т*; $N = 150$ *т/час*.

$$\text{Тогда } p^0_{пр_1} = p_0 \sum_{t=\frac{R_1}{N}}^{t_{max}} p(t_i) = \sum_{t=2}^{t=24} p(t_i) = 0{,}145\,(0{,}213 + 0{,}153 + 0{,}113 +$$

$$+0{,}020+0{,}007+0{,}033+0{,}007+0+0{,}0+0{,}007+0{,}007) = 0{,}145 \cdot 0{,}56 = 0{,}082.$$

Аналогично вычисляются остальные $p^0_{прj}$ для $R_j = 900$—3600 *т* через интервал в 300 *т*.

Затем определяются потери $E_п'$ по (7). При $nTNe = 3\,000\,000$ *руб/год*, $R_1 = 300$ *т* $E'_{п_1} = 3\,000\,000 \cdot 0{,}082 = 246$ тыс. *руб*. Аналогично для $R_2 = 600$ $p^0_{пр_2} = 0{,}051$ и $E'_{п_2} = 153$ тыс. *руб*. и т. д.

Таблица 5

R	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700	3000
$E'_п$	246	153	87	36	28	22	12	6	5	5
$E'_с$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
E'	252	165	105	60	58	58	54	54	59	65

Величины $E_п'$, $E_с'$ и E' для разных значений R приведены в табл. 5, соответствующие кривые — на рис. 5.

Как видно из табл. 5 и рис. 5, наименьшие затраты $E'_{min} = 54$ тыс. *руб/год* соответствуют емкости $R_{опт} = 2400$ *т*. При $R = 2400$ *т* $Q = 0$, следовательно, $V_{опт} = 2400$ *т*. Более надежным по отношению к вероятным харак-

теристикам расчет получается в том случае, когда можно установить хорошее согласие распределений $p(x)$, $p(y)$, $p(t)$ с теоретическими законами распределения.

Анализ данных величин для шахт рудоуправления «Артемсоль» показал, что первые две согласовываются с нормальным законом распределения, а вероятность продолжительности отсутствия вагонов $p(t)$ распределена по показательному закону. Расчет в таком случае можно производить исходя из теоретических значений вероятностей

$$p(x_i) = \Phi\left(\frac{x_i'' - \bar{x}}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_i' - \bar{x}}{\sigma_x}\right), \tag{10}$$

где x_i' и x_i'' — границы интервала значений x, для которого x_i является средним; $\bar{x}$ — среднее значение x для всех его значений; σ_x — среднеквадратичное отклонение величины x.

$$p(y + Q \geqslant x_i) = 1 - \Phi\left(\frac{x_i'' - Q - \bar{y}}{\sigma_y}\right)^*, \tag{11}$$

где $\bar{y}$ — среднее значение для всех значений y; σ_y — среднеквадратичное отклонение величины y.

Подсчет вероятности $p\left(t_i \geqslant \frac{R}{N}\right)$, если $p(t)$ подчиняется показательному закону распределения, производится по формуле

$$p\left(t \geqslant \frac{R}{N}\right) = e^{-\frac{R}{N\bar{t}}}, \tag{12}$$

где e — основание натуральных логарифмов; $\bar{t}$ — среднее значение величины t.

Результаты приведенного примера при использовании (10)—(12) несколько отклоняются в большую сторону: $V_{опт} = R_{опт} = 2500$ *т*. При этом возрастает точность расчета, так как можно рассматривать любые значения Q и R, независимо от интервалов величин x, y и t при образовании первичных статистических рядов.

Необходимо также отметить следующее важное обстоятельство. Поскольку склад является достаточно долговременным сооружением (приведенные затраты определяются с использованием нормативного срока окупаемости, равного 5—7,5 лет), нужно особенно тщательно установить и проанализировать *статистические показатели, используемые при расчете.*

Можно рекомендовать определить показатели распределений $p(x)$, $p(y)$, $p(t)$ и вероятность p_0 отсутствия транспортных средств для отгрузки в течение 3—4 последних лет и установить таким образом их стабильность или достаточно хорошо выраженную тенденцию на будущее. Возможное применение в последние годы данных величин может произойти вне их вероятностных законов, т. е. не по совокупности случайных причин, а в результате вполне определенного воздействия (повышение производительности предприятия, ликвидация узких мест в транспортном обслуживании, общий рост вагонного парка или тоннажа судов, выделенного для данных грузов и т. п.). Величины, изменение которых в будущем обусловлено предвидимыми планируемыми мероприятиями, должны быть соответственно скор-

* При пользовании для определения Ф таблицами, где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

ректированы. Наиболее точным, но и трудоемким способом корректировки является математическое моделирование (достаточное распространение получил, например, метод случайных чисел). Более простой метод — установление зависимости показателей распределения от факторов, плановое значение которых известно. Так, например, величина p_0 зависит от общего обеспечения потребными в перевозках железнодорожными вагонами. По данным 1960—1969 гг. можно установить графически и аналитически зависимость (рис. 6 *) p_0 от соотношения погрузки П и заявки З для рассматриваемого вида подвижного состава.

Зная планы производства на предстоящее десятилетие и перспективы увеличения транспортных средств данного ряда, можно с достаточной достоверностью определить p_0 на предстоящий период как по годам, так и в среднем. Аналогичная зависимость имеет место и для среднего времени отсутствия транспортных средств $\bar{t}$.

Расчеты оптимальной емкости склада готовой продукции по вышеизложенной методике были проведены для рудоуправления «Артемсоль». Полученная оптимальная емкость заложена рудоуправлением в проектное задание склада соли для шахты № 3.

Расчет оптимальной емкости складов для вновь строящихся предприятий можно производить с использованием статистических данных действующих предприятий подобного типа с соответствующей корректировкой по условиям работы нового предприятия, по его производственным особенностям и корректировкой предполагаемого поведения влияющих факторов в период предстоящей эксплуатации состава.

Поступила в редакцию
13 IV 1970

* Масштаб условен.