

ОБ ОДНОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ АЛГОРИТМЕ ВОГНУТОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

О. В. ГУСЕВА

(Ленинград)

Для задачи максимизации «сепарабельной» функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \max \quad (1)$$

при линейных ограничениях в [1, 2] построена случайная последовательность точек $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$, дающая сходимость $f(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \max_{x \in S} f(x)$ с вероят-

ностью 1.

В настоящей работе приводится некоторая оценка скорости этой сходимости. Рассматривается задача максимизации функции (1) в области S с ограничениями

$$\sum_{i=1}^n x_i = b, \quad (2)$$

$$h_i \leq x_i \leq H_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$; b, h_i, H_i — m -мерные векторы; $f_i(x_i)$ — выпуклые вверх функции переменных $x_{i1}, \dots, x_{im}$, непрерывные в S со всеми первыми и вторыми производными.

Для произвольного $x' \in S$ определяются «обмены»: обмен (i, j) выполняется в точке x' и переводит ее в точку $x'' \in S$, если x'' является решением задачи

$$\begin{aligned} f_i(x_i) + f_j(x_j) &= \max, \\ x_i + x_j &= x'_i + x'_j, \\ h_i &\leq x_i \leq H_i, \quad h_j \leq x_j \leq H_j, \\ x_k &= x'_k, \quad k \neq i, j. \end{aligned} \quad (3)$$

Набором обменов $(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)$ для $2l$ различных индексов $i_1, j_1, \dots, i_l, j_l$ называем задачу, состоящую из l задач (3) с индексами, соответственно $(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)$. Ниже (п. 5) построены наборы, число N которых допускает оценку $N \leq (2n)^{3/2}$, и такие, что каждый обмен входит в какой-либо набор. В дальнейшем везде рассматриваются эти конкретные наборы.

Пусть задана произвольная начальная точка $x^{(0)} \in S, f(x^{(0)}) \neq \max_{x \in S} f(x)$.

Занумеруем все наборы обменов числами $1, \dots, N$. Считая равновероятными все N номеров, выберем случайным образом номер η_0 . Выполним в $x^{(0)}$ набор обменов с этим номером, получаем точку $x^{(1)} \in S$. Затем выбираем таким же образом номер η_1 , набор обменов с этим номером в $x^{(1)}$ дает точку $x^{(2)} \in S$, и т. д. В результате получаем случайную последовательность точек

области S

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots \quad (4)$$

Вероятностная мера определяется на пространстве бесконечных последовательностей номеров $\eta = \eta_0, \eta_1, \dots$ как на последовательностях независимых случайных величин.

Теорема. Для произвольного $x^{(0)} \in S$ при всех $k \geq k_1$ с вероятностью

$$P(k) \geq 1 - cn^{2/3}k^{-1/2}$$

выполняется неравенство $\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(k)}) \leq ((\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(0)}))^{-3} + c'n^{-9/2}k)^{-1/3}$. Постоянные k_1, c, c' зависят от максимума градиента функции $f(x)$ в S , максимума вторых производных функций $f_i(x_i)$ в S и максимального линейного размера области S ; число k_1 зависит, кроме того, от разности $\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(0)})$.

Теорема доказывается с помощью следующих оценок. Пусть $\varphi(x) = f(x^{(0)}) + (\text{grad } f(x^{(0)}), x - x^{(0)})$. Тогда (п.1)

$$(\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(0)}))^2 \leq c_1 (\max_{x \in S} \varphi(x) - \varphi(x^{(0)})). \quad (5)$$

Если $d_k f$ — приращение функции $f(x)$ при выполнении набора обменов с номером k в точке $x^{(0)}$, то (п.2)

$$\sum_{k=1}^N d_k f \geq c_2 N^{-1} (\max_{x \in S} \varphi(x) - \varphi(x^{(0)}))^2, \quad c_2 > 0. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\sum_{k=1}^N d_k f \geq c_3 N^{-1} (\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(0)}))^4, \quad c_3 = c_2 c_1^{-2} > 0. \quad (7)$$

Пусть $d^{(i)}$ — приращение функции $f(x)$ в результате выполнения набора обменов с номером η_i в точке $x^{(i)}$ и $P(i, k)$ — вероятность того, что по крайней мере для i точек из $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ выполняются неравенства

$$d^{(i)} \geq c_3 N^{-2} (\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(i)}))^4. \quad (8)$$

$P\left(\frac{k}{N} \beta, k\right)$, где $1/2 \leq \beta < 1$, оценивается (п.3) на основании (7)

$$P\left(\frac{k}{N} \beta, k\right) \geq 1 - c_4 N^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Если для реализации $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots)$ в $i, i \geq k/N\beta$, точках из k точек $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ выполнено (8), то (п.4) при $k \geq k_1$

$$\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(k)}) \leq ((\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(0)}))^{-3} + c_5 N^{-3} k)^{-1/3}. \quad (10)$$

Утверждение теоремы следует теперь из (9) и (10) при оценке

$$N \leq (2n)^{3/2}, \quad (11)$$

устанавливаемой в п.5 и постоянных

$$\begin{aligned} c &= 2^{3/4} c_4, \\ c' &= 2^{-9/2} c_5. \end{aligned} \quad (12)$$

1. Пусть $x^{(0)} \in S$,

$$\varphi(x) = f(x^{(0)}) + (\text{grad } f(x^{(0)}), x - x^{(0)}), \quad \varphi(x^{(0)}) = f(x^{(0)})$$

и

$$M \equiv \max_{\xi, x \in S} |f_{\xi\xi}''(x)|, \quad (13)$$

где максимум второй производной функции (1) берется по всем направлениям ξ в точке x и всем $x \in S$.

Обозначим для любого $x \in S$ через f'_x, f_{xx}'' производные от $f(x)$ по направлению вектора $x - x^{(0)}$, и через S_0 — множество всех $x \in S$, для которых выполнено неравенство

$$\|x - x^{(0)}\| \leq f'_x(x^{(0)}) |M|^{-1}, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}^2. \quad (14)$$

Если $x \in S_0$, то для некоторого $y \in S_0$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^{(0)}) &= f'_x(x^{(0)}) \|x - x^{(0)}\| + \frac{1}{2} f_{xx}''(y) \|x - x^{(0)}\|^2 = \\ &= \varphi(x) - \varphi(x^{(0)}) + \frac{1}{2} f_{xx}''(y) \|x - x^{(0)}\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |f_{xx}''(y)| \|x - x^{(0)}\|^2 &\leq \frac{M}{2} \|x - x^{(0)}\|^2 \leq \frac{1}{2} |f'_x(x^{(0)})| \|x - x^{(0)}\|, \\ |(f(x) - f(x^{(0)})) - (\varphi(x) - \varphi(x^{(0)}))| &\leq \frac{1}{2} |\varphi(x) - \varphi(x^{(0)})|. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $\tilde{x}$ — точка максимума $f(x)$ в S , $f(\tilde{x}) = \max_{x \in S} f(x)$. Если $\tilde{x} \in S_0$, то положим $x' = \tilde{x}$. Если $\tilde{x} \notin S_0$, то на отрезке прямой l , соединяющем $x^{(0)}$ с $\tilde{x}$, находится точка $x' \in S_0$, для которой (14) удовлетворяется как равенство, и

$$|\varphi(x') - \varphi(x^{(0)})| = |f'_{x'}(x^{(0)})| \|x' - x^{(0)}\| = M \|x' - x^{(0)}\|^2. \quad (16)$$

Рассматриваемая на l функция $f(x)$ не убывает от $x^{(0)}$ к $\tilde{x}$ и выпукла вверх, поэтому $f(\tilde{x}) - f(x^{(0)}) \leq (f(x') - f(x^{(0)})) (\|\tilde{x} - x^{(0)}\|) / (\|x' - x^{(0)}\|)$.

Из (15), (16) и последнего неравенства находим

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^{(0)}) &\leq \frac{3}{2} (\varphi(x') - \varphi(x^{(0)})) \frac{\|\tilde{x} - x^{(0)}\|}{\|x' - x^{(0)}\|} = \\ &= {}^{3/2} M^{\frac{1}{2}} (\varphi(x') - \varphi(x^{(0)}))^{\frac{1}{2}} \|\tilde{x} - x^{(0)}\| \leq {}^{3/2} M^{\frac{1}{2}} D (\max_{x \in S} \varphi(x) - \varphi(x^{(0)}))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где D — максимальный линейный размер области S — оценка (5) с постоянной $c_1 = (3/2)^2 M D^2$.

Применяя для величины (13) неравенство

$$M \leq K_m, \quad K = \max_{i, jk; x \in S} \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} \right|, \quad (17)$$

получаем оценку (5) с постоянной

$$c_1 = (3/2)^2 m K D^2. \quad (18)$$

2. Для доказательства (6) оценим снизу отношение $d_k f / (d_k \varphi)^2$, где $d_k f, d_k \varphi$ — приращения функций $f(x), \varphi(x)$ в наборе обменов с номером k в точке $x^{(0)}$. Пусть x'' — точка, в которую переводится $x^{(0)}$ k -м набором обменов для функции $\varphi(x)$; x'' удовлетворяет ограничениям задачи k -го набора обменов и, следовательно, $d_k f \geq f(x'') - f(x^{(0)})$.

Если $x'' \in S_0$, то, согласно (15),

$$f(x'') - f(x^{(0)}) \geq \frac{1}{2}(\varphi(x'') - \varphi(x^{(0)})) = \frac{1}{2}d_k\varphi,$$

и

$$d_k f / (d_k \varphi)^2 \geq \frac{1}{2}(\varphi(x'') - \varphi(x^{(0)}))^{-1}.$$

Так как $\varphi(x'') - \varphi(x^{(0)}) = f'_{x''}(x^{(0)}) \|x'' - x^{(0)}\| \leq FD$, где

$$F \equiv \max_{x \in S} \|\text{grad } f(x)\|, \text{ то}$$

$$\frac{d_k f}{(d_k \varphi)^2} \geq (2FD)^{-1}. \quad (19)$$

Если $x'' \notin S_0$, то на отрезке прямой l' , соединяющем в S точки $x^{(0)}$ и x'' , находится точка $x' \in S$, для которой (14) выполняется как равенство

$$\|x' - x^{(0)}\| = |f'_{x'}(x^{(0)})| M^{-1}. \quad (20)$$

Так как $x' \in l'$, то x' удовлетворяет ограничениям k -го набора обменов и $d_k f \geq f(x') - f(x^{(0)})$. Согласно (15), $d_k f \geq f(x') - f(x^{(0)}) \geq \frac{1}{2}(\varphi(x') - \varphi(x^{(0)}))$ и

$$d_k f / (d_k \varphi)^2 \geq \frac{1}{2} \frac{\varphi(x') - \varphi(x^{(0)})}{(\varphi(x') - \varphi(x^{(0)}))^2}.$$

Применяя (20) и (17), оцениваем: $\varphi(x') - \varphi(x^{(0)}) = f'_{x'}(x^{(0)}) \|x' - x^{(0)}\| = f'_{x'}(x^{(0)}) M^{-1}$; $\varphi(x'') - \varphi(x^{(0)}) = f'_{x''}(x^{(0)}) \|x'' - x^{(0)}\| \leq f'_{x''}(x^{(0)}) D$;

$$d_k f / (d_k \varphi)^2 \geq \frac{1}{2} M^{-1} D^{-2} \geq \frac{1}{2} m^{-1} K^{-1} D^{-2}.$$

Отсюда и из (19) находим для отношения $d_k f / (d_k \varphi)^2$

$$\frac{d_k f}{(d_k \varphi)^2} \geq c_2,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \min \{F^{-1} D^{-1}, m^{-1} K^{-1} D^{-2}\} > 0, \quad F = \max_{x \in S} \|\text{grad } f(x)\|. \quad (21)$$

Для суммы $\sum_{k=1}^N d_k f$ получаем

$$\sum_{k=1}^N d_k f \geq c_2 \sum_{k=1}^N (d_k \varphi)^2 \geq c_2 N^{-1} \left(\sum_{k=1}^N d_k \varphi \right)^2. \quad (22)$$

$\sum_{k=1}^N d_k \varphi$ оценивается снизу

$$\sum_{k=1}^N d_k \varphi \geq \max_{x \in S} \varphi(x) - \varphi(x^{(0)}). \quad (23)$$

При доказательстве заметим, что задача максимизации в S линейной функции

$$\varphi(x) = c + \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_{1j}, \dots, x_{nj}), \quad \varphi_j(x_{1j}, \dots, x_{nj}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij}, \quad (24)$$

распадается на m задач, $j = 1, \dots, m$, содержащих каждая одно общее скалярное ограничение

$$\varphi_j(x_{1j}, \dots, x_{nj}) = \max,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad (25)$$

$$h_{ij} \leq x_{ij} \leq H_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для таких задач доказана оценка суммы приращений $\tilde{d}_k \varphi_j$ по всем обменам в произвольной точке $(x_{1j}^{(0)}, \dots, x_{nj}^{(0)}) : \sum \tilde{d}_k \varphi_j \geq \max_{s_j} \varphi_j - \varphi_j \times (x_{1j}^{(0)}, \dots, x_{nj}^{(0)})$; область S_j определена условиями (25) ([1] для случая ограничений (25): $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, 0 \leq x_{ij}$). Отсюда следует оценка суммы приращений по всем обменам $\sum \tilde{d}_k \varphi$ функции (24) в произвольной точке $x^{(0)} \in S : \sum \tilde{d}_k \varphi \geq \max_{x \in S} \varphi(x) - \varphi(x^{(0)})$. Так как каждый обмен входит в какой-либо набор обменов, то верно и (23). Неравенства (22) и (23) дают оценку (6) с постоянной c_2 (24).

В случае, когда условия (2) имеют вид: $\sum_{i=1}^n x_i = b, x_i \geq 0$, постоянная D в (21) равна

$$D = \left(2 \sum_{j=1}^m b_j^2 \right)^{1/2}. \quad (26)$$

3. Докажем неравенство (9). Так как все N наборов обменов в точке $x^{(j)}$ равновероятны и сумма приращений функции $f(x)$ в этих наборах оценивается по (7), то вероятность выполнения неравенства (8) не меньше чем $1/N$. Отсюда следует, что

$$P(i, k) \geq \tilde{P}(i, k) = \sum_{v=0}^i C_k^v p^v (1-p)^{k-v}, p = 1/N, C_k^i = \frac{k!}{i! (k-i)!}, \quad (27)$$

где $P(i, k)$ — вероятность того, что в последовательности испытаний Бернулли, где вероятность единичного успеха равна p , из k первых испытаний по крайней мере i будет успешным. При $k \rightarrow \infty, kp \rightarrow \infty$ вероятность нера-

венства $\xi' \leq \frac{l - kp}{\sqrt{kp(1-p)}} \leq \xi''$, где l — число успехов в k первых испытаниях,

асимптотически равна

$$\tilde{P}\left(\xi' \leq \frac{l - kp}{\sqrt{kp(1-p)}} \leq \xi''\right) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\xi'}^{\xi''} e^{-\xi^2/2} d\xi. \quad (28)$$

Точность приближения оценивается с помощью следующей предельной теоремы.

Теорема ([3]). Если независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ одинаково распределены, имеют дисперсию σ и конечный третий момент β_3 , то

$$\left| P\left\{ \frac{s_k - \bar{s}_k}{\sigma \sqrt{k}} < z \right\} - \Phi(z) \right| < C \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{k}}, \quad (29)$$

$s_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k, \bar{s}_k$ — математическое ожидание s_k ,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d\xi,$$

C — абсолютная постоянная, $C \leq 0,9051$.

Применяя (27), (28), (29) и неравенство

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi \leq \frac{2}{\sqrt{\pi z}},$$

получаем для вероятности $P(i, k)$, $i \geq k/N\beta$, где β — произвольное число из интервала $1/2 \leq \beta < 1$, оценку (9) с постоянной

$$c_4 = C + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^{-1}, \quad \alpha = 1 - \beta, \quad C \leq 0,9051. \quad (30)$$

4. Пусть $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ — реализация последовательности (4), $i \geq k/N\beta$ и для i точек из первых k точек $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ выполняется (8). Покажем, что тогда при k , больших некоторого k_1 , разность $\max_{x \in S} f(x) - f(x^{(k)})$ оценивается по (10).

Обозначим $\Delta_j \equiv \max_{x \in S} f(x) - f(x^{(j)})$,

$$\Delta_{j+1} = \Delta_j - d^{(j)}. \quad (31)$$

Пусть при $j = j_1, j_2, \dots, j_i$, $0 \leq j_1, \dots, j_i \leq k-1$ выполняется (8)

$$d^{(j)} \geq q\Delta_j^4, \quad q = c_3 N^{-2}. \quad (32)$$

Из (31), (32) следует, что нетрудно проверить, что

$$\Delta_{j_{l+1}+1} \leq \begin{cases} \Delta_{j_l+1} - q\Delta_{j_l+1}^4, & \Delta_{j_l+1} < (4q)^{-1/3}, \\ \frac{3}{4} \Delta_{j_l+1}, & \Delta_{j_l+1} \geq (4q)^{-1/3}, \end{cases} \quad l = 0, 1, \dots, i-1.$$

Выделим из последовательностей $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$ подпоследовательность

$$\Delta_0' = \Delta_0, \quad \Delta_1' = \Delta_{j_1+1}, \quad \Delta_2' = \Delta_{j_2+1}, \dots, \Delta_i' = \Delta_{j_i+1}, \quad (33)$$

$$\Delta_{l+1}' \leq \begin{cases} \Delta_l' - q(\Delta_l')^4, & \Delta_l' < (4q)^{-1/3}, \\ \frac{3}{4} \Delta_l', & \Delta_l' \geq (4q)^{-1/3}. \end{cases} \quad (34.a)$$

$$(34.b)$$

Возможны два случая: либо для числа $i_1 \geq i/2 \geq k\beta/2N$ — членов невозрастающей последовательности (33) выполняются неравенства (34.a), либо для числа $i_2 \geq i/2 \geq k\beta/2N$ ее членов выполняются неравенства (34.b). В первом случае Δ_i' оценивается $\Delta_i' \leq (\Delta_0^{-3} + 3qk\beta/2N)^{-1/3}$, во втором $\Delta_i' \leq \Delta_0(3/4)^{k\beta/2N}$. Первая оценка слабее второй при $k \geq k_1$, где k_1 определяется из

$$\Delta_0^{-3} + 3q \frac{k_1\beta}{2N} = \Delta_0^{-3} \left(\frac{3}{4} \right)^{-\frac{3k_1\beta}{2N}}, \quad \Delta_0 = \max_{x \in S} f(x) - f(x^{(0)}), \quad (35)$$

$$q = c_3 N^{-2}.$$

При $k \geq k_1$ в невозрастающей последовательности $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$ последний член $\Delta_k \leq \Delta_i' \leq (\Delta_0^{-3} + 3qk\beta/2N)^{-1/3}$, что совпадает с оценкой (10) для значения постоянной

$$c_5 = \frac{3}{2} \beta c_3. \quad (36)$$

5. Покажем, что можно составить N наборов обменов так, что каждый обмен войдет в какой-либо набор и будет выполнено неравенство (11).

Обмен определяется парой индексов $i, j = 1, \dots, n, i < j$.

Рассмотрим сначала все те пары, для которых

$$j = i + r, \quad \sqrt{n-1} < r \leq n-1. \quad (37)$$

При фиксированном r объединим пары $i, i+r$ в наборы, относя к k -му набору, $k = 1, 2, \dots$, пары $((k-1)r+1, kr+1), ((k-1)r+2, kr+2), \dots$.

Так как $kr+1 \leq n$, число таких наборов не превосходит $(n-1)/r$.

Общее число наборов для пар, удовлетворяющих (37)

$$N_1 \leq \sum_{\sqrt{n-1} < r \leq n-1} \frac{n-1}{r} \leq \sqrt{n-1} (n-1 - \sqrt{n-1}).$$

Пары i, j , для которых

$$j = i + r, \quad 1 \leq r \leq \sqrt{n-1}, \quad (38)$$

объединим в следующие наборы. При фиксированном r отнесем к k -му набору, $K = 1, 2, \dots, r+1$, пары $(k, r+k), (r+1+k, 2r+1+k), (2r+2+k, 3r+2+k), \dots$. Число таких наборов равно $r+1$. Общее число

наборов для всех пар, определяемых (38): $N_2 = \sum_{1 \leq r \leq \sqrt{n-1}} (r+1) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-1}) \sqrt{n-1}$. Число всех построенных наборов $N = N_1 + N_2 \leq (n-1)^{3/2} - \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)^{1/2} \leq (2n)^{3/2}$, что доказывает оценку (11).

Теорема доказана при постоянных c, c', k_1 , определяемых формулами (7), (12), (18), (21), (26), (30), (35), (36).

Автор благодарен Л. А. Оганесяну и Б. Г. Питтелю за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Гусева. Последовательность обменов в одной задаче выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1968, т. IV, вып. 3.
2. О. В. Гусева. Последовательность обменов в задаче выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 6.
3. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник. Независимые и стационарно связанные величины. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
12 II 1968