ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1972
ТОМ VIII, ВЫП. 2

МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА С НЕРАВНОВЕСНЫМИ ЦЕНАМИ

Э. М. БРАВЕРМАН

(Москва)

ВВЕДЕНИЕ

Одной из целей математической экономики является изучение возможных механизмов согласованного функционирования большого числа элементов, потребляющих или выпускающих различные продукты. Основное внимание в этой связи уделяется разработке так называемых равновесных (и в частности, оптимальных) экономико-математических моделей [1—3].

Представляет интерес изучение на модельном уровне функционирования совокупности «производственных» элементов, когда цены существенно отличаются от равновесных или когда равновесных цен вообще не существует. В этих условиях нельзя формировать планы отдельных элементов независимо, так как такие планы окажутся несогласованными. Однако и при неравновесных ценах возможно согласованное функционирование сети элементов, но при этом согласованные планы должны включать, с одной стороны, «квоты» на потребление некоторых продуктов, спрос на которые превышает их выпуск, а с другой — «квоты» на выпуск некоторых продуктов, спрос на которые ограничен. Таким образом, в случае неравновесных цен естественно возникают понятия дефицитного и недефицитного продукта.

В настоящей работе согласованные планы, максимизирующие в определенном смысле прибыль каждого элемента, названы состояниями равновесия модели (при неравновесных ценах!).

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим сеть, состоящую из N «производственных» элементов P_1, $P_2, \ldots, P_N$. Пусть каждый элемент P_i выпускает один продукт P_i, потребляя продукты, выпускаемые другими элементами. Состояние элемента P_i будем характеризовать $(N+1)$-мерным вектором: $\{y_i, \xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{Ni}\} = \{y_i, x_i\} \geqslant 0$. Компоненты вектора $\{y_i, x_i\}$ интерпретируем следующим образом: y_i — количество продукта P_i, выпускаемое элементом P_i; ξ_{ki} — количество продукта P_k, потребляемое элементом P_i. С каждым элементом P_i свяжем некоторую область G_i, принадлежащую неотрицательному ортанту $(N+1)$-мерного пространства; область G_i будем понимать как область допустимых значений вектора $\{y_i, x_i\}$.

Среди элементов сети могут быть такие P_i, что существуют допустимые состояния с $y_i \neq 0$, даже если соответствующий вектор $x_i = 0$. Такие элементы будем называть «ресурсными». Ресурсные элементы могут поставлять продукцию другим элементам сети, ничего не потребляя из нее. Если сеть потребляет некоторые продукты извне, то эти продукты можно представить как продукцию некоторых ресурсных элементов сети.

Кроме части продукции элемента P_i, потребляемой другими элементами сети, некоторое количество ξ_{i0} продукта P_i, может поступать вовне. Совокупность N чисел $\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots, \xi_{N0}$ обозначим вектором x_0. По смыслу задачи все компоненты вектора x_0 неотрицательны.

Установим теперь некоторые условия на допустимые состояния рассматриваемой сети. Будем требовать, чтобы в любом состоянии сети соблюдался баланс по каждому продукту

$$y_i = \sum_{k=0}^{N} \xi_{ik}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

В силу (1) состояние сети однозначно определяется набором векторов $\{y_1, x_1\}$, $\{y_2, x_2\}, \ldots, \{y_N, x_N\}$, характеризующих состояние каждого элемента и не содержащих явно числа ξ_{i0}. В связи с этим в дальнейшем каждое конкретное состояние сети обозначим $(\{y_i, x_i\})$.

Следующие условия на допустимые состояния сети являются условиями на вектор x_0. Пусть на каждый продукт P_i установлена цена $c_i \geqslant 0$. Совокупность цен на все продукты обозначим вектором $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$. Предположим, что существуют такие функции $F_i(c, \xi_{10}, \ldots, \xi_{(i-1)0}, \xi_{(i+1)0}, \ldots, \xi_{N0})$, называемые «функциями спроса», и в любом допустимом состоянии удовлетворяются условия $\xi_{i0} \leqslant F_i(c, \xi_{10}, \ldots, \xi_{(i-1)0}, \xi_{(i+1)0}, \ldots, \xi_{N0})$. Если ввести в рассмотрение $(N-1)$-мерные векторы $x_{i0} = \{\xi_{10}, \ldots, \xi_{(i-1)0}, \xi_{(i+1)0}, \ldots, \xi_{N0}\}$, то эти условия можно записать короче

$$\xi_{i0} \leqslant F_i(c, x_{i0}), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Обычно в моделях в качестве функций спроса рассматриваются функции, зависящие лишь от вектора цен c. Если в некотором диапазоне изменения цен соотношения (2) выполняются как равенства, то, вообще говоря, в этом диапазоне цен все ξ_{i0} могут быть выражены как функции, зависящие только от c, и таким образом можно прийти к упомянутым выше представлениям о функциях спроса. Вместе с тем в (2) учтена также и возможность такой ситуации, когда некоторые продукты поставляются вовне в «недостаточном» количестве, так что в (2) соответствующие отношения имеют вид строгих неравенств. В этом случае естественно считать, что спрос на другие продукты зависит от поступающего вовне из сети количества этих «дефицитных» продуктов. Условия (1) и (2) носят характер «глобальных» ограничений на допустимые состояния сети. Для более полного описания допустимых состояний желательно указать «локальные» ограничения, т. е. условия, которым должно удовлетворять состояние каждого отдельного элемента. Они уже не столь очевидны, как (1), (2), и носят характер «гипотез о поведении» элементов при фиксированном векторе цен c.

2. СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что вектор цен c фиксирован некоторым произвольным образом. Как указывалось выше, состояния равновесия должны удовлетворять двум типам ограничений — «глобальным» вида (1) и (2) и «локальным», характеризующим выбор состояния отдельным элементом. Приводимое ниже определение равновесия включает ограничения обоих видов.

Определение. Состояние сети $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$, $\tilde{x}_i = (\xi_{1i}, \tilde{\xi}_{2i}, \ldots, \tilde{\xi}_{Ni})$ называется состоянием равновесия, если оно удовлетворяет условиям

1°. Выполнены соотношения (1) и (2).

2°. Существует подмножество I индексов номеров элементов такое,

что для всех $i \in I$ $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$, является решением задачи

$$\Pi_i = c_i y_i - \sum_{k=1}^{N} c_k \xi_{ki} = \max, \tag{3}$$

$$\{y_i, x_i\} \in G_i, \tag{4}$$

$$\xi_{ki} \leqslant \tilde{\xi}_{ki} \text{ для всех } k \in I, \tag{5}$$

а для всех $i \notin I$ $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$ является решением задачи

$$\Pi_i = c_i y_i - \sum_{k=1}^{N} c_k \xi_{ki} = \max, \tag{3, a}$$

$$\{y_i, x_i\} \in G_i, \tag{4, a}$$

$$\xi_{ki} \leqslant \tilde{\xi}_{ki} \text{ для всех } k \in I, \tag{5, a}$$

$$y_i \leqslant \tilde{y}_i. \tag{6}$$

3°. Для всех $i \notin I$ соотношения (2) выполняются как равенства.

Если известно состояние $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$ элемента P_i и множество индексов I, то тем самым однозначно восстанавливается, какая именно задача вида (3)—(5) или (3, a) — (5, a) и (6) определяет состояние этого элемента. Любую такую задачу будем называть локальной задачей $U_i\{c\}$, соответствующей состоянию $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$ и множеству индексов I, или просто локальной задачей $U_i\{c\}$.

В условии 2° определения состояния равновесия значком «$\sim$» помечены как решения локальной задачи $U_i\{c\}$, так и квоты, входящие в правые части (5), (5, a) и (6). Это вызвано тем обстоятельством, что по самому смыслу условия 2° соответствующие компоненты решения локальной задачи $U_i\{c\}$ как раз должны совпадать с этими квотами (для тех компонент решения, которые ограничены условиями (5), (5, a) и (6)). Для того чтобы в дальнейшем различать эти два типа величин, отмеченных значком «$\sim$», будем говорить «решение $\tilde{\xi}_{ki}$» либо «решение $\tilde{y}_i$» и соответственно «ограничение $\tilde{\xi}_{ki}$» либо «ограничение $\tilde{y}_i$».

Множество продуктов P_i, $i \in I$, можно назвать множеством «дефицитных» продуктов, так как их потребление другими элементами ограничено (условия (5) и (5, a)), а производимое количество — решение $\tilde{y}_i$ — определяется из решения задачи максимизации прибыли Π_i на допустимом множестве (4), (5). Наоборот, множество продуктов P_i, $i \notin I$, можно назвать множеством «недефицитных» продуктов, так как их потребление другими элементами не ограничено, а производимое количество — решение $\tilde{y}_i$ — ограничено (условие (6)) суммарным потреблением этого продукта.

Условия 2° определения равновесия и являются теми «локальными» ограничениями, о которых выше шла речь, так как в соответствии с ними состояние каждого элемента P_i определяется исходя из информации о допустимом для этого элемента множестве G_i состояний, о допустимых количествах дефицитных продуктов, потребляемых элементом P_i, и о суммарном спросе на продукт P_i, производимый этим элементом.

Из определения состояния равновесия никоим образом не следует, что при данном векторе цен c существует единственное состояние равновесия или хотя бы единственный способ разбиения множества продуктов на дефицитные и недефицитные. Более того, в теореме 1 будет показано, что множество состояний равновесия может быть бесконечным.

Определение. Будем говорить, что элемент P_i имеет нормальную технологическую характеристику, если при любом множестве дефицитных продуктов I и любом наборе ограничений $\tilde{\xi}_{ki}$, $k \in I$:

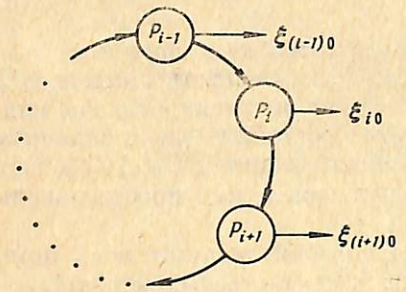
1) решение $\tilde{y}_i$ задачи (3)—(5) является неубывающей функцией ограничений $\tilde{\xi}_{ki}$, $k \in I$;

2) решение $\tilde{\xi}_{ki}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, задачи $(3, a)$, $(4, a)$, $(5, a)$, (6) является неубывающей функцией ограничения y_i.

Поскольку в этом определении предполагается наличие функциональных зависимостей решений от ограничений, то тем самым полагается однозначность соответствующих решений. Поэтому этот факт в дальнейшем специально оговариваться не будет.

Обозначим через $y_{i\max}$ решение $\tilde{y}_i$ задачи (3), (4) при отсутствии ограничений вида (5) и (6).

Теорема I. *Пусть:* 1) *все элементы сети являются элементами с нормальной технологической характеристикой и при каждом* $i = 1, 2, \ldots, N$, $c_i > 0$, $y_{i\max} > 0$, *а* G_i — *выпуклое ограниченное множество, содержащее начало координат;* 2) *область, определяемая* (2), *содержит непрерывную кривую* $x_0(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, $x(0) = 0$; $\xi_{i0}(s)$ — *монотонно неубывающие функции параметра* s; 3) *сеть не содержит ресурсных элементов.*



Тогда найдется такое $\bar{s}$, $0 \leqslant \bar{s} \leqslant S$, *что для любого* s, $0 \leqslant s \leqslant \bar{s}$, *существует состояние равновесия с* $\tilde{x}_0 = x_0(s)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Теорема I, так же как и теорема II, устанавливает факт существования равновесия в сети, поэтому эти теоремы могут рассматриваться как формальное оправдание введенного выше определения равновесия. В то же время теорема I дает следующее существенное свойство равновесия: в определенных условиях состояние равновесия в сети может иметь место при сколь угодно малом выпуске продуктов вовне. Иными словами, если в сети имеется некоторое состояние равновесия, то, хотя может существовать другое состояние равновесия, более «выгодное» для каждого элемента и обеспечивающее больший выпуск продуктов вовне, ни один элемент не может «собственными действиями» увеличить интенсивность производства либо потому, что не может получить больше дефицитного «сырья», либо потому, что продукция этого элемента не будет иметь «сбыта».

Поясним теперь роль условия 3) в теореме на следующем простом примере. Рассмотрим сеть, изображенную на рисунке, где каждый элемент получает продукцию лишь от одного «предшествующего» элемента и поставляет свою продукцию лишь одному «последующему» элементу сети и, может быть, вовне. Пусть ни один из элементов не является ресурсным, тогда суммарный выход каждого элемента однозначно определится его входом. Если в такой сети установилось некоторое состояние равновесия с достаточно малыми потоками продуктов между элементами, то продукция каждого элемента будет дефицитной и поэтому ни один элемент не может увеличить свое производство.

3. СОСТОЯНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Среди множества состояний равновесия сети, даваемых теоремой I, могут существовать состояния, обеспечивающие в некотором смысле

наибольшие потоки продукции. Некоторое множество таких «эффективных состояний равновесия выделяется следующим определением.

Определение. Состояние равновесия $(\{y_i^*, x_i^*\})$ с множеством дефицитных продуктов I^* называется состоянием предельного равновесия, если не существует другого состояния равновесия $(\{y_i^{**}, x_i^{**}\})$ такого, что $\xi_{ik}^{**} \geqslant \xi_{ik}^*$ для всех $i \in I^*$, $k = 0, 1, \ldots, N$, и хотя бы для одного $i \in I^*$ и одного k, $k = 0, 1, \ldots, N$, $\xi_{ik}^{**} > \xi_{ik}^*$.

Теорема II. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* I *и, кроме того, одно из двух следующих условий:* а) *при любом* i, $i = 1, 2, \ldots, N$, *функция спроса* $F_i(c, x_{i0})$ *является неубывающей функцией переменных* ξ_{k0},

б) *при любом* i, $i = 1, 2, \ldots, N$, *функция* $F_i(c, x_{i0})$ *равна компоненте* ξ_i *решения задачи*

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \xi_k = \max, \tag{7}$$

$$\sum c_k \xi_k = d, \tag{8}$$

$$\xi_k \leqslant \xi_{k0} \text{ для всех } k \neq i. \tag{9}$$

Тогда в сети существует состояние предельного равновесия.

Доказательство теоремы II приведено в Приложении.

Поясним смысл условий а) и б) теоремы. Условие а) охватывает следующие частные случаи: 1) комплектное потребление, когда при данном векторе цен c количество каждого продукта, потребляемое вовне, есть монотонно растущая функция количества одного из продуктов, например, ξ_{10}; 2) функции спроса $F_i(c, x_{i0})$ фактически не зависят от x_{i0} — потребления остальных продуктов; 3) сеть поставляет вовне лишь один продукт, так что все остальные функции спроса равны тождественно нулю.

Тот факт, что случаи 2) и 3) охватываются условием а), очевиден. Поэтому покажем лишь, что случай 1) также охватывается условием а).

По определению комплектного потребления при фиксированном векторе цен c

$$\xi_{i0} = \varphi_i(\xi_{10}), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{10}$$

где $\varphi_i(\xi_{10})$ — монотонно возрастающие функции, имеющие обратные функции

$$\xi_{10} = \varphi_i^{-1}(\xi_{i0}), \tag{11}$$

также монотонно возрастающие.

Рассмотрим в качестве функций спроса функции

$$F_1(c, x_{10}) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^{N} \varphi_k^{-1}(\xi_{k0}), \tag{12}$$

$$F_i(c, x_{i0}) = \varphi_i(\xi_{10}), \quad i = 2, 3, \ldots, N. \tag{13}$$

Для того чтобы показать, что условие а) охватывает случай комплектного потребления, достаточно убедиться, что соотношения

$$\xi_{i0} \leqslant F_i(c, x_{i0}), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{14}$$

где F_i определяются в (12) и (13), выполняются лишь в том случае, когда имеет место (10).

Предположим противное, т. е. что существуют такие числа ξ_{10}^*, $\xi_{20}^*, \ldots, \xi_{N0}^*$, что (14) имеет место, а хотя бы одно из равенств в (10) —

не имеет места. Это может быть только тогда, если в (14) при некотором $i = 2, \ldots, N$, выполняется строгое неравенство, так как в силу (13) равенства в (14) при $i = 2, \ldots, N$, означают выполнение (10).

Итак, пусть для некоторого i^*, $2 \leqslant i^* \leqslant N$,

$$\overset{*}{\xi}_{i^*0} < F_{i^*}(c, \overset{*}{x}_{i^*0}) = \varphi_{i^*}(\overset{*}{\xi}_{10}).$$

Поскольку, как указывалось выше, $\varphi_{i^*}^{-1}(\xi_{i^*0})$ — монотонно возрастающая функция, имеем

$$\xi_{10}^* > \varphi_{i^*}^{-1}(\overset{*}{\xi}_{i^*0}). \tag{15}$$

Для всех остальных i, $i \neq i^*$, $2 \leqslant i \leqslant N$

$$\xi_{10}^* \geqslant \varphi_i^{-1}(\xi_{i0}^*). \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в

$$\xi_{10}^* \leqslant F_1(c, x_{10}),$$

которое является первым из неравенств (14), и учитывая, что в (15) стоит строгое неравенство, имеем $\xi_{10}^* < \xi_{10}^*$. Последнее неравенство противоречиво. Таким образом, доказано, что условие а) охватывает случай комплектного потребления (10). В связи с этим а) может быть названо условием обобщенного комплектного потребления. Наоборот, б) может быть понято как условие полной взаимозаменяемости продуктов, так как одно и то же значение целевой функции в (7) может быть достигнуто замещением одного продукта другим в определенной пропорции, не зависящей от значения этой функции.

Приводимая ниже теорема III дает достаточное условие того, что некоторое реализовавшееся в сети состояние равновесия является состоянием предельного равновесия. Это условие формулируется таким образом, что для его проверки не требуется детального знания характеристик отдельных элементов и количеств потоков продуктов между элементами, а нужно лишь знать множество I индексов дефицитных продуктов и список продуктов, потребляемых каждым элементом.

Будем говорить, что область G_i зависит от продукта P_k, если среди векторов $\{y_i, x_i\} \in G_i$ существуют векторы с $\xi_{ki} \neq 0$. Каждому состоянию равновесия сети с некоторым множеством I индексов дефицитных товаров можно поставить в соответствие ориентированный граф, который строится следующим образом. Каждому элементу P_k, $k \in I$, ставится в соответствие одна и только одна вершина графа P_k, от которой проводится ребро к вершине P_i в том и только в том случае, если область G_i зависит от продукта P_k. Назовем такой граф ядром данного состояния равновесия.

Теорема III. *Если ядро некоторого состояния равновесия сети с элементами, имеющими нормальные технологические характеристики, не содержит цикла, то это состояние равновесия является предельным.*

Доказательство теоремы III приведено в Приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательству теоремы I предпошлем лемму, которая нужна также для доказательства теоремы II. В лемме используется ряд новых понятий.

Будем говорить, что состояние $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ не может быть промажорировано на множестве I, если не существует другого состояния $(\{y_i^*, x_i^*\})$, удовлетворяющего балансовому условию (1) и условию 2° определения

состояния равновесия, такого, что для всех $i \in I$ $\xi_{ij}^* \geqslant \tilde{\xi}_{ij}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, и хотя бы для одного $i^* \in I$ и одного j^* $\xi_{i^*j^*}^* > \tilde{\xi}_{i^*j^*}$.

Назовем состояние сети $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ с множеством индексов дефицитных продуктов I псевдоравновесием, если оно удовлетворяет (1) и 2° определения состояния равновесия и не может быть промажорировано на множестве I. В случае, когда $I = \phi$ (пустое множество), любое состояние сети, удовлетворяющее (1) и 2°, считается псевдоравновесием.

Рассмотрим некоторое состояние сети $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ с множеством индексов дефицитных продуктов I. Для всех i определим $\tilde{y}_{i\max}$ — **компоненту** y_i решения задачи

$$\Pi_i = c_i y_i - \sum_{k=1}^{N} c_k \xi_{ki} = \max, \tag{17}$$

$$\{y_i, x_i\} \in G_i,$$

$$\xi_{ji} \leqslant \tilde{\xi}_{ji}, \quad j \in I.$$

Лемма. *Пусть все элементы сети — с нормальными технологическими характеристиками; допустимые области G_i всех элементов — выпуклые ограниченные множества, а вектор цен $c > 0$.*

Если состояние $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ с множеством индексов I дефицитных продуктов является псевдоравновесием, то для любой непрерывной кривой $x_0(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, удовлетворяющей условиям 1) $x_0(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{x}_0 = \{\tilde{\xi}_{10}, \tilde{\xi}_{20}, \ldots, \tilde{\xi}_{N0}\}$, и 2) $\tilde{\xi}_{i0}(s) \equiv \tilde{\xi}_{i0}$, *если* $\tilde{y}_{i\max} = \tilde{y}_i$, *и* $\tilde{\xi}_{i0}(s)$ — *неубывающая функция параметра s, если* $\tilde{y}_{i\max} > \tilde{y}_i$, *найдется такое* $\bar{s}$, $0 < \bar{s} < S$, *и псевдоравновесие* $(\{y_i(\bar{s}), x_i(\bar{s})\})$ *с множеством индексов* $I_{\bar{s}}$, *что*

1°. *для каждого s, $0 \leqslant s \leqslant \bar{s}$, существует псевдоравновесие $(\{y_i(s), x_i(s)\})$ с множеством индексов дефицитных продуктов I_s, при котором вектор выпуска продуктов вовне равен $x_0(s)$;*

2°. *либо $\bar{s} = S$, либо существует такое i^*, $i^* \in I_{\bar{s}}$, что $\xi_{i^*0}(s) > \xi_{i^*0}(\bar{s})$ при $s > \bar{s}$;*

3°. *если $s_1 < s_2 \leqslant \bar{s}$, то $(\{y_i(s_1), x_i(s_1)\}) \leqslant (\{y_i(s_2), x_i(s_2)\})$ и $I_{s_1} \leqslant I_{s_2}$.*

Доказательство. Для упрощения записи изменим масштабы измерения количества продуктов так, чтобы все цены были равны 1. Поскольку по предположению все $c_i > 0$, это можно сделать.

Докажем сначала утверждение 1°. Рассмотрим некоторый элемент P_i и прибыль Π_i этого элемента, определяемую решением задачи

$$\Pi_i = y_i - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ki} = \max, \tag{18}$$

$$\{y_i, x_i\} \in G_i,$$

$$\xi_{ki} \leqslant \tilde{\xi}_{ki}, \quad k \in I,$$

$$y_i \leqslant \tilde{y}_i.$$

Определенная величина Π_i будет функцией $\tilde{y}_i$, $\Pi_i = \Pi_i(\tilde{y}_i)$. Функция $\Pi_i(\tilde{y}_i)$ является вогнутой функцией $\tilde{y}_i$ для тех значений аргумента, где она определена.

Это утверждение понадобится лишь для тех $\tilde{y}_i$, которые удовлетворяют условию

$$\tilde{y}_i \leqslant \tilde{y}_{i\max}. \tag{19}$$

Поэтому докажем вогнутость функции $\Pi_i(\tilde{y}_i)$ при условии (19), при выполнении которого решение задачи (18) удовлетворяет последнему ограничению как равенству.

Пусть x_i^1 — решение (18) при $\tilde{y}_i = y_i^1 \leqslant \tilde{y}_{i\max}$, а x_i^2 — решение (18) при $\tilde{y}_i = y_i^2 \leqslant \tilde{y}_{i\max}$. Для любого λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, введем обозначения $y_i^\lambda = \lambda y_i^1 + (1-\lambda) y_i^2$ и x_i^λ — соответствующие компоненты решения (18) с $\tilde{y}_i = y_i^\lambda$.

Из определения y_i^λ следует, что $y_i^\lambda \leqslant \tilde{y}_{i\max}$, поэтому решение (18) с $\tilde{y}_i = y_i^\lambda$ удовлетворяет последнему ограничению как равенству, откуда имеем

$$\Pi_i(y_i^\lambda) = y_i^\lambda - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ki}^\lambda \geqslant y_i^\lambda - \sum_{k=1}^{N} (\lambda \xi_{ki}^1 + (1-\lambda)\xi_{ki}^2) =$$

$$= \lambda\left(y_i^1 - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ki}^1\right) + (1-\lambda)\left(y_i^2 - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ki}^2\right) = \lambda \Pi_i(y_i^1) + (1-\lambda)\Pi_i(y_i^2).$$

В этой цепочке неравенств учтено, что вектор $\{y_i^\lambda, x_i^\lambda\}$ является решением (18), в то время как вектор $\{y_i^\lambda, \lambda x_i^1 + (1-\lambda) x_i^3\}$ — лишь допустимое решение этой задачи.

Соотношение (21) доказывает вогнутость функции $\Pi_i(\tilde{y}_i)$.

Обозначим через q_i минимальный наклон касательной к $\Pi_i(\tilde{y}_i)$ в точке

$$y_i = \frac{\tilde{y}_{i\max} - y_i(0)}{2} + y_i(0), \tag{20}$$

а через q — число, равное

$$q = \min_{i \notin I} q_i. \tag{21}$$

Число q_i удовлетворяет условию

$$0 < q_i \leqslant 1, \tag{22}$$

левое неравенство в котором имеет место потому, что наклон касательной к вогнутой функции равен нулю лишь в точке максимума, а правое — потому, что $\Pi_i(\tilde{y}_i)$ меньше $\tilde{y}_i$ (на величину $\sum \tilde{\xi}_{ki}$). Из (22) и определения q следует неравенство

$$0 < q \leqslant 1. \tag{23}$$

По известному свойству вогнутых функций

$$\Pi_i(\tilde{y}_i + \Delta y_i) \geqslant \Pi_i(\tilde{y}_i) + q_i \Delta y_i \geqslant \Pi_i(\tilde{y}_i) + q \Delta y_i \tag{24}$$

при $\Delta y_i \geqslant 0$ и $\tilde{y}_i + \Delta y_i \leqslant (\tilde{y}_{i\max} - y_i(0))/2 + y_i(0)$, поскольку при этих условиях наклон касательной к функции $\Pi_i(\tilde{y}_i)$ в точке $\tilde{y}_i + \Delta y_i$ больше q_i.

Выберем число s^* следующим образом:

1) если

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(S) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(0) + q \min_{k \notin I} (\tilde{y}_{k\max} - y_k(0))/2,$$

то положим

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(s^*) = \sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(0) + q \min_{k \notin I} (\tilde{y}_{k\max} - y_k(0))/2,$$

2) $s^* = S$ — в противном случае.

В силу непрерывности кривой $x_0(s)$ такое s^* существует.

Выберем теперь произвольное s, $0 \leqslant s \leqslant s^*$. Очевидно, для таких s имеет место

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(s) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(0) + q \min_{k \notin I} (\tilde{y}_{k\max} - y_k(0))/2. \tag{25}$$

Определим теперь последовательности

$$y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^l, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{26}$$

$$\xi_{ki}^1, \xi_{ki}^2, \ldots, \xi_{ki}^l, \ldots, \quad i, k = 1, 2, \ldots, N, \tag{27}$$

где ξ_{ki}^l — соответствующая компонента решения задачи (18) с $\tilde{y}_i = y_i^l$, рекуррентными соотношениями

$$y_i^1 = y_i(0) + \xi_{i0}(s) - \xi_{i0}(0), \tag{28}$$

$$y_i^{l+1} = y_i^l + \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^l - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{l-1} = \xi_{i0}(s) + \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^l, \tag{29}$$

в (29) положено $\xi_{ik}^0 = \xi_{ik}(0)$.

Так как все элементы по предположению являются элементами с нормальными технологическими характеристиками, то последовательности (26) и (27) монотонно не убывают. Из-за ограниченности областей G_i эти последовательности ограничены, следовательно, они имеют пределы при $l \to \infty$. Обозначим эти пределы через $y_i(s)$ и $\xi_{ik}(s)$ соответственно. Перейдем в (29) к пределу по $l \to \infty$, получим $y_i(s) = \xi_{i0}(s) + \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}(s)$. Таким образом, убеждаемся, что предельные величины удовлетворяют соотношению (1). Вместе с тем по построению последовательности (27) величины $\xi_{ki}(s)$ являются решением задачи (18) с $\tilde{y}_i = y_i(s)$.

Если теперь $y_i(s) \leqslant \tilde{y}_{i\max}$, то одновременно и $y_i(s)$ будет решением (18) с $\tilde{y}_i = y_i(s)$, а это и означает, что $y_i(s)$ и $\xi_{ki}(s)$, $i, k = 1, 2, \ldots, N$, будут удовлетворять условию 2° определения состояния равновесия.

Таким образом, для доказательства утверждения 1° остается определить, что $y_i(s) \leqslant \tilde{y}_{i\max}$ для всех i, $i \notin I$. С этой целью надо лишь показать, что при всех $l = 1, 2, \ldots$,

$$y_i^l \leqslant y_i(0) + \min_{k \notin I} \frac{\tilde{y}_{k\max} - y_{k0}}{2} < \tilde{y}_{i\max}. \tag{30}$$

Докажем соотношение (30). Из (24) и (29) имеем

$$\Pi_i(y_i^{l+1}) = \Pi_i\left(y_i^l + \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^l - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{l-1}\right) \geqslant \Pi_i(y_i^l) + q\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^l - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{l-1}\right)$$

или

$$\Pi_i(y_i^{l+1}) = y_i^{l+1} - \sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^{l+1} = y_i^l + \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^l - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{l-1} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^{l+1} \geqslant y_i^l - \sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^l + q\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^l - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{l-1}\right). \tag{31}$$

Из правого соотношения в (31) следует, что при $l \geqslant 1$

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_{ji}^{\,l+1} - \sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^{\,l} \leqslant (1-q)\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l} - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l-1}\right). \tag{32}$$

Воспользовавшись (24) и (28), аналогично устанавливаем

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^{\,1} - \sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^{\,0} \leqslant (1-q)\,(\xi_{i0}(s) - \xi_{i0}(0)). \tag{33}$$

Из (32) и (33) имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^{\,r} - \sum_{j=1}^{N} \xi_{ji}^{\,r-1}\right) \leqslant (1-q^r) \sum_{i=1}^{N} (\xi_{i0}(s) - \xi_{i0}(0)). \tag{34}$$

Оценим теперь величину $\sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l}$, воспользовавшись (33)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l} \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l} &= \left(\sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l} - \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l-1}\right) + \left(\sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l-1} - \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,l-2}\right) + \dots \\
&\dots + \left(\sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,1} - \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,0}\right) + \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,0} \leqslant \\
&\leqslant \left[\sum_{r=1}^{l} (1-q)^r\right]\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(s) - \sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}^{\,0}\right) + \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,0} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(s) - \sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(0)}{q} - \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(s) - \sum_{i=1}^{N} \xi_{i0}(0)\right) + \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,0}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Просуммируем (29) по l от 1 до L и учтем (28)

$$\begin{aligned}
y_i^{L+1} &= y_i^{\,1} + \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,L} - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,0} = y_i(0) + \xi_{i0}(s) - \xi_{i0}(0) + \\
&+ \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,L} - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ik}^{\,0}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание оценку (35) и условие (25) выбора s, получаем неравенство

$$\begin{aligned}
y_i^{L+1} &\leqslant y_i(0) + \frac{\sum_{k=1}^{N} \xi_{k0}(s) - \sum_{k=1}^{N} \xi_{k0}(0)}{q} \leqslant y_i(0) + \\
&+ \min_{k \in I} \frac{(\check{y}_{k_{\max}} - y_k(0))}{2} < \tilde{y}_{i_{\max}}.
\end{aligned}$$

Этим неравенством завершается доказательство утверждения 1° леммы, если в качестве $\bar{s}$ взять значение параметра s^*, определенное выше.

Докажем теперь утверждение 2°. В этой части доказательства леммы обозначим $s^* = s^1$, а соответствующее этому значению параметра состояние сети — $(\{\bar{y}_i^1, \bar{x}_i^1\})$. Если $s^1 = S$, то утверждение 2° доказано. Поэтому рассмотрим случай $s^1 < S$, когда в силу (30) $y_i^1 < \tilde{y}_{i\max}$, $i \notin I$, и выполнены условия леммы, т. е. существует s^2, $s^1 < s^2 \leqslant S$, соответствующее состояние $(\{\bar{y}_i^2, \bar{x}_i^2\})$, удовлетворяющие утверждению 1° леммы. Если $s^2 < S$, i, $i \notin I$, то, рассуждая аналогично, получаем $s^3 > s^2$ и т. д. Все члены последовательности $s^1 < s^2 < \ldots < s^l < \ldots$ ограничены числом S, поэтому эта последовательность имеет предел; обозначим его через $\bar{s}^1$. Поскольку все области G_i ограничены, то ограниченными являются векторы $(\{\bar{y}_i^l, \bar{x}_i^l\})$, причем в последовательности $(\{\bar{y}_i^l, \bar{x}_i^l\})$, $l = 1, 2, \ldots$, каждый член мажорирует * предыдущий (см. доказательство утверждения 1°); поэтому последовательность состояний также стремится к некоторому пределу $(\{\bar{y}_i^1, \bar{x}_i^1\})$. Это предельное состояние таково, что либо $\bar{s}^1 = S$, либо существует такое i^*, $i^* \notin I$, что $\bar{y}_{i^*}^1 = \tilde{y}_{i^*\max}$ (иначе в силу леммы нашлось бы другое состояние сети, мажорирующее это состояние и удовлетворяющие утверждению 1° леммы, а поэтому состояние $(\{\bar{y}_i^1, \bar{x}_i^1\})$ не могло бы быть предельным). Обозначим через $\bar{I}^1$ множество индексов таких, что $y_i(\bar{s}^1) = \tilde{y}_{i\max}$. Очевидно, $\bar{I}^1 \supset I$, и состояние $(\{\bar{y}_i^1, \bar{x}_i^1\})$ не может быть промажорировано на множестве $\bar{I}^1$, так как выпуск $\bar{y}_i$, $i \in \bar{I}^1$, не может быть увеличен (он уже равен $\tilde{y}_{i\max}$) без увеличения количеств $\tilde{\xi}_{j\bar{i}}$, $j \in I$; увеличение $\tilde{\xi}_{j\bar{i}}$, $j \in I$, не может иметь места, поскольку по условию исходное состояние $(\{y_i(0), x_i(0)\})$ является псевдоравновесием.

Определим теперь $\bar{y}_{i\max}^1$ — компоненту y_i решения задачи (17), заменив в этой задаче I на $\bar{I}^1$. Обозначим через $\bar{I}^2$ множество индексов i таких, что $y_i(\bar{s}^1) = \bar{y}_{i\max}^1$. Очевидно, $\bar{I}^2 \supseteq \bar{I}^1$ и состояние $(\{y_i(\bar{s}^1), x_i(\bar{s}^1)\})$ не может быть промажорировано на множестве $\bar{I}^2$. Затем строим множества $\bar{I}^3$ и т. д. до тех пор, пока не окажется $\bar{I}^{r+1} = \bar{I}^r$. Обозначим $\bar{I}^r = I^1$. Если существует такое i^*, $i^* \in I^1$, что $\xi_{i^*0}(s) > \xi_{i^*0}(\bar{s}^1)$, $s > s^1$, то положим $\bar{s} = \bar{s}^1$, $I^1 = I_s$ и тем самым докажем утверждение 2° леммы. Если такого i^* не нашлось и $\bar{s}^1 < S$, то выполнены все условия леммы, если в качестве фигурирующих в лемме состояния $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ и множества I взять состояние $(\{\bar{y}_i^1, \bar{x}_i^1\})$ и множество I^1. Следовательно, существует по доказанному значение параметра $\bar{s}^2$ и состояние псевдоравновесия $(\{y_i(\bar{s}^2), x_i(\bar{s}^2)\})$ и множество $I^2 \supseteq I^1$ такие, что либо 1) $\bar{s}^2 = S$, либо 2) $\bar{s}^2 < S$ и существует i^*, $i^* \in I^2$, такое, что $\xi_{i^*0}(s) > \xi_{i^*0}^{(\bar{s}^2)}$ при $s > \bar{s}^2$, либо 3) $\bar{s}^2 < S$ и выполнены вновь условия леммы; тогда обязательно $I^2 \supset I^1$. В случаях 1) и 2) утверждение 2° леммы доказано, в случае 3) продолжаем тот же процесс. Поскольку при этом на каждом k-м шаге множество индексов I^k только растет, то после конечного числа шагов обязательно реализуется случай 1) или 2). Утверждение 2° леммы доказано.

Утверждение 3° леммы доказывается следующим очевидным замечанием. Поскольку все элементы сети, по предположению, являются элементами с нормальными технологическими характеристиками, то с ростом s все члены последовательностей (26) и (27) монотонно не убывают, а следовательно, и пределы этих последовательностей с ростом s монотонно не убывают. Тем самым показано, что если $s^2 > s^1$, то $(\{y_i(s_2), x_i(s_2)\}) \geqslant (\{y_i(s_1), x_i(s_1)\})$. Соотношение $I_{s_2} \supseteq I_{s_1}$ следует из построения

* Вектор $\bar{z}$ мажорирует вектор $\tilde{z}$, если все компоненты вектора $\bar{z}$ не меньше соответствующих компонент вектора $\tilde{z}$.

множеств $I^1, I^2, \ldots, I^k, \ldots$ при доказательстве утверждения 2^0 леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы I. Состояние сети $y_i = 0$, $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяет условиям леммы. В силу этой леммы найдется такое $\bar{s}$, что для любого s, $0 \leqslant s \leqslant \bar{s}$, существует состояние сети $(\{\bar{y}_i, \bar{x}_i\})$, удовлетворяющее (1) и условию 2° определения состояния равновесия с $\bar{\xi}_{i0} = \xi_{i0}(s)$. Положим теперь все продукты дефицитными. Поскольку, по предположению, точка $x_0(s)$ удовлетворяет (2) как строгим неравенствам, то для доказательства теоремы надо лишь доказать, что состояние сети $(\{y_i, x_i\})$, являющееся в силу утверждения леммы решением задач (18) с $I = \phi$, одновременно есть решение задач (3), (4), (5) при $\tilde{\xi}_{ki} = \bar{\xi}_{ki}$, k, $i = 1, 2, \ldots, N$ (так как все продукты — дефицитны).

Предположим противное: для некоторого i^* решением задачи

$$\Pi_{i^*} = y_{i^*} - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ki^*} = \max,$$

$$\{y_{i^*}, x_{i^*}\} \in G_{i^*}, \tag{36}$$

$$y_{i^*} \leqslant \bar{y}_{i^*}$$

(здесь для простоты записи масштаб измерения продуктов изменен так, чтобы все цены были равны единице) является точка $\{\bar{y}_{i^*}, \bar{x}_{i^*}\}$, а решением задачи

$$\Pi_{i^*} = y_{i^*} - \sum_{k=1}^{N} \xi_{ki^*} = \max, \tag{37}$$

$$\{y_{i^*}, x_{i^*}\} \in G_{i^*},$$

$$\xi_{ki^*} \leqslant \bar{\xi}_{ki^*}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

— точка $\{\hat{y}_{i^*}, \hat{x}_{i^*}\}$, причем $\{\bar{y}_{i^*}, \bar{x}_{i^*}\} = \{\hat{y}_{i^*}, \hat{x}_{i^*}\}$.

Поскольку точка $(\{\bar{y}_{i^*}, \bar{x}_{i^*}\})$ допустима для задачи (37), то

$$\hat{y}_{i^*} - \sum_{k=1}^{N} \hat{\xi}_{ki^*} > \bar{y}_{i^*} - \sum_{k=1}^{N} \bar{\xi}_{ki^*}. \tag{38}$$

Из (38) и (36) следует, что $\hat{y}_{i^*} > \bar{y}_{i^*}$, так как в противном случае точка $\{\hat{y}_{i^*}, \hat{x}_{i^*}\}$ допустима для задачи (36) и поэтому точка $\{\bar{y}_{i^*}, \bar{x}_{i^*}\}$ не могла бы быть решением этой задачи. Покажем теперь, что, с другой стороны, неравенство

$$\hat{y}_{i^*} > \bar{y}_{i^*} \tag{39}$$

не может иметь места. Действительно, пусть (39) имеет место. Так как область G_{i^*} выпукла и включает начало координат, то точка $(\bar{y}_{i^*} / \hat{y}_{i^*})\{\hat{y}_{i^*}, \hat{x}_{i^*}\} = \{\bar{y}_{i^*}, (\bar{y}_{i^*} / \hat{y}_{i^*})\hat{x}_{i^*}\}$ допустима для задачи (36), вместе с тем учитывая, что элемент P_{i^*} не является ресурсным и, следовательно, $\sum_{k=1}^{N} \hat{\xi}_{ki^*} > 0$, имеем

$$\bar{y}_{i^*} - \frac{\bar{y}_{i^*}}{\hat{y}_{i^*}} \sum_{k=1}^{N} \hat{\xi}_{ki^*} > \bar{y}_{i^*} - \sum_{k=1}^{N} \bar{\xi}_{ki^*}. \tag{40}$$

В этом неравенстве учтено, что в силу ограничений (37)

$$\sum_{k=1}^{N} \hat{\xi}_{ki^*} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \xi_{ki^*}.$$

Из (40) следует, что решением задачи (36) должна быть точка $(\bar{y}_{i^*} / \hat{y}_{i^*})$ $\{\hat{y}_{i^*}, \hat{x}_{i^*}\}$, а не точка $\{\bar{y}_{i^*}, \bar{x}_{i^*}\}$. Это противоречие доказывает теорему I

Доказательство теоремы II. Достаточно доказать, что существует псевдоравновесие $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ с множеством индексов I, удовлетворяющее условиям 1° и 3° определения состояния равновесия, причем для доказательства выполнения условия 1° надо доказать только выполнение (2), так как выполнение (1) входит в определение понятия псевдоравновесия. Действительно, так как условие 2° определения состояния равновесия входит в определение псевдоравновесия, то псевдоравновесие, удовлетворяющее условиям 1° и 3° определения состояния равновесия, является состоянием предельного равновесия с множеством дефицитных продуктов I, так как по определению псевдоравновесия оно не может быть промажорировано на множестве I.

Докажем сначала теорему в предположении выполнения условия а). Пусть существует псевдоравновесие $(\{\tilde{y}_i^l, \tilde{x}_i^l\})$ с множеством индексов дефицитных продуктов I^l, удовлетворяющее (2). Определим $y_{i\,\max}^1$ — компоненту y_i решения (17) с $I = I^l$. Обозначим через I_1^l множество индексов i таких, что $\tilde{y}_i^l = y_{i\,\max}^1$. Затем введем $y_{i\,\max}^2$ — компоненту y_i решения (17) с $I = I_1^l$. Обозначим через I_2^l множество индексов i таких, что $\tilde{y}_i^l = y_{i\,\max}^2$ и т. д. На некотором $(k+1)$ шаге из-за конечности множества элементов сети будем иметь $I_{k+1}^l = I_k^l$. Положим $I_k^l = \bar{I}^l$. Очевидно, состояние $(\{\tilde{y}_i^l, \tilde{x}_i^l\})$ с новым множеством индексов дефицитных продуктов $\bar{I}^l$ будет также псевдоравновесием, удовлетворяющим (2). Возможны два случая: 1) все те индексы i, для которых соотношения (2) выполнены как строгие неравенства, принадлежат $\bar{I}^l$; 2) существует такое i^*, что

$$\tilde{\xi}_{i^*0}^l < F_{i^*}(c, \tilde{x}_{i^*0}^l), \qquad i^* \notin \bar{I}^l. \tag{41}$$

В первом случае выполнено условие 3° определения состояния равновесия и тем самым теорема доказана, поскольку состояние $(\{\tilde{y}_i^l, \tilde{x}_i^l\})$ удовлетворяет, по предположению, (2). Поэтому исследуем случай 2). Рассмотрим отрезок $x_0(s)$: $\tilde{\xi}_{i^*0}^l \leqslant \xi_{i^*0}(s) \leqslant F_{i^*}(c, \tilde{x}_{i^*0}^l)$, $\xi_{k0}(s) = \tilde{\xi}_{k0}^l$, $k \neq i^*$. Обозначим через $x_{k0}(s)$ $(N-1)$-мерный вектор, получаемый из вектора $x_0(s)$ исключением k-й компоненты. Так как все компоненты отрезка $x_0(s)$ не убывают с ростом s, то в силу а) не убывают и все функции спроса, т. е. при всех s имеют место соотношения

$$\xi_{k0}(s) = \tilde{\xi}_{k0}^l \leqslant F_k(c, x_{k0}(s)), \qquad k \neq i^*. \tag{42}$$

Кроме того, $x_{i^*0}(s) = \tilde{x}_{i^*0}^l$, так как единственная изменяющаяся на отрезке $x_0(x)$ компонента $\xi_{i^*0}(s)$ не входит в вектор $x_{i^*0}(s)$ и поэтому

$$\xi_{i^*0}(s) \leqslant F_{i^*}(c, x_{i^*0}(s)). \tag{43}$$

Из (42) и (43) следует, что каждая точка отрезка $x_0(s)$ удовлетворяет (2) и поэтому любое состояние сети с вектором x_0 выпуска вовне, лежащем на отрезке, удовлетворяет (2). В силу леммы существует псевдоравновесие $(\{\tilde{y}_i^{l+1}, \tilde{x}_i^{l+1}\})$ с множеством индексов I^{l+1} и вектором $\tilde{x}_0^{l+1}$, лежащим на отрезке и, следовательно, удовлетворяющим (2), мажорирующее состояние $(\{\tilde{y}_i^l, \tilde{x}_i^l\})$. Кроме того, либо $\xi_{i^*0}^{l+1} = F_{i^*}(c, \tilde{x}_{i^*0}^{l+1})$ (векторы $\tilde{x}_{i^*0}^l$ и $\tilde{x}_{i^*0}^{l+1}$ в данном случае совпадают), либо $i^* \in I^{l+1}$.

Таким образом, можно построить последовательность псевдоравновесий, удовлетворяющих (2), причем $(\{\tilde{y}_i^{l+1}, \tilde{x}_i^{l+1}\}) \geqslant (\{\tilde{y}_i^{l}, \tilde{x}_i^{l}\})$ и $I^{l+1} \supseteq I^l$. В качестве первого члена такой последовательности возьмем состояние $(\{0, 0\})$ с $I^0 = \phi$. Из-за ограниченности множеств G_i эти последовательности имеют пределы, которые обозначим $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ и I соответственно. Состояние $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ с множеством индексов I, очевидно, является состоянием псевдоравновесия, удовлетворяющим (2). Если последовательность $(\{\tilde{y}_i^l, \tilde{x}_i^l\})$ строилась так, что последовательно перебирались все i^*, удовлетворяющие (41), то предельное состояние будет удовлетворять условию 3° определения состояния равновесия. Поэтому в соответствии с замечанием, приведенным в начале доказательства теоремы, построенное предельное состояние является состоянием предельного равновесия. Таким образом, теорема в предположении выполнения условия а) доказана.

Перейдем теперь к условию б) теоремы. Без ограничения общности можно считать, что индексы упорядочены следующим образом

$$\frac{\alpha_i}{c_i} \geqslant \frac{\alpha_k}{c_k}, \qquad \text{если} \qquad i < k. \tag{44}$$

В условии упорядочения (44) функции спроса имеют вид

$$F_i(c, x_{i0}) = \begin{cases} \dfrac{d - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_k \xi_{k0}}{c_i}, & \alpha_i > 0, \\ 0, & \alpha_i \leqslant 0. \end{cases} \tag{45}$$

Состояние $(\{\tilde{y}_i^0, \tilde{x}_i^0\}) = (\{0, 0\})$ с $I^0 = \phi$ является псевдоравновесием, удовлетворяющим (2). Воспользовавшись отрезком $x_0(s)$ вида $0 \leqslant \xi_{10}(s) \leqslant F_1(c, 0)$, $\xi_{k0}(s) \equiv \tilde{\xi}_{k0}^0 = 0$, $k \neq 1$, по лемме получаем, что существует псевдоравновесие $(\{\tilde{y}_i^1, \tilde{x}_i^1\})$ с множеством I^1, $I^1 \supseteq I^0$, такое, что $\tilde{x}_0^1 = x_0(\bar{s})$, причем либо 1) $\tilde{\xi}_{10}^1 = F_1(c, 0)$, либо 2) $\xi_{10}^1 < F_1(c, 0)$, но $1 \in I^1$.

В случае 1) состояние $(\{\tilde{y}_i^1, \tilde{x}_i^1\})$ удовлетворяет соотношениям (2) с функциями спроса (45) как равенствам, так что условие 3° определения состояния равновесия оказывается выполненным и тем самым теорема доказана. В случае 2) рассмотрим отрезок $x_0(s)$ вида $\xi_{10}(s) \equiv \tilde{\xi}_{10}^1$, $0 \leqslant \xi_{20}(s) \leqslant F_2(c, \tilde{x}_{20}^1)$, $\xi_{k0}(s) \equiv \tilde{\xi}_{k0}^1 = 0$, $k \neq 1, 2$. Вновь в силу леммы убеждаемся в существовании псевдоравновесия $(\{\tilde{y}_i^2, \tilde{x}_i^2\})$ с множеством I^2, $I^2 \supseteq I^1$, таким, что вектор $\tilde{x}_0^2 = x_0(s)$ удовлетворяет соотношению (2), причем либо 1) $\tilde{\xi}_{20}^2 = F_2(c, \tilde{x}_{20}^1)$, либо 2) $\xi_{20}^2 < F_2(c, \tilde{x}_{20}^1)$, но индексы 1 и 2 принадлежат I^2. Опять в случае 1) теорема доказана, а в случае 2) аналогичным образом строим псевдоравновесие $(\{\tilde{y}_i^3, \tilde{x}_i^3\})$ с множеством индексов I^3 и т. д.

Если на L-м шаге, $L \leqslant N$, построено псевдоравновесие $(\{\tilde{y}_i^L, \tilde{x}_i^L\})$ и имеет место соотношение

$$\tilde{\xi}_{L0}^L = F_L(c, \tilde{x}_{L0}^L), \tag{46}$$

то теорема доказана. Действительно, из (45) и (46) следует, что

$$\xi_{L0}^L = \frac{d - \sum\limits_{i=1}^{L-1} c_i \tilde{\xi}_{i0}^L}{c_L}$$

или

$$d - \sum_{i=1}^{L} c_i \widetilde{\xi}_{i0}^{L} = 0. \tag{47}$$

Из (45) с учетом (47) и определения состояния $(\{\widetilde{y}_i^L, \widetilde{x}_i^L\})$ для всех $k > L$ имеем

$$\widetilde{\xi}_{k0}^{L} = F_k(c, \widetilde{x}_{k0}^{L}) = 0, \quad k > L. \tag{48}$$

Соотношения (46) и (48) с учетом того обстоятельства, что по построению множества I^L все k, меньшие L, принадлежат I^L, означают, что выполнено условие 3° определения состояния равновесия. В силу замечания в начале доказательства теоремы выполнение этого условия в свою очередь и означает доказательство теоремы.

Если же (46) не имеет места в течение N шагов, то все индексы принадлежат I^N, а это означает, что хотя в состоянии $(\{\widetilde{y}_i^N, \widetilde{x}_i^N\})$ при любом i соотношения (2) выполнены как неравенства, условие 3° определения состояния равновесия выполнено. Теорема доказана.

Доказательство теоремы III. Обозначим состояние, удовлетворяющее условию теоремы, через $(\{y_i^*, x_i^*\})$. Если это состояние не является предельным, то существует другое $(\{y_i^{**}, x_i^{**}\})$, такое, что

$$\xi_{ik}^{**} \geqslant \xi_{ik}^{*}, \quad i \in I, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{49}$$

и хотя бы для одного i^*, $i^* \in I$, и одного k^*

$$\xi_{i^*k^*}^{**} > \xi_{i^*k^*}^{*}. \tag{50}$$

Коль скоро ядро не содержит цикла, то оно имеет хотя бы одну вершину, в которую не входит ни одно ребро. Назовем такие вершины вершинами нулевого порядка, множество индексов которых обозначим через K_0. Вершинам нулевого порядка соответствуют элементы сети; состояние их определяется лишь из решения задачи (3), (4), поэтому

$$y_i^* = y_{i_{\max}}, \qquad i \in K_0. \tag{51}$$

Поскольку, по предположению, элементы P_i — элементы с нормальной технологической характеристикой, то не существует состояния сети такого, чтобы суммарный выпуск продукции элементами, соответствующими вершинам нулевого порядка, был больше $y_{i_{\max}}$. Поэтому в силу (51) имеем

$$y_i^{**} \leqslant y_i^*, \qquad i \in K_0,$$

или, с учетом (49),

$$\xi_{ik}^{**} = \xi_{ik}^{*}, \quad i \in K_0, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{52}$$

Для всех элементов определим $y_{i_{\max}}^1$, равное решению задачи (3), (4) с дополнительным ограничением

$$\xi_{ki} \leqslant \xi_{ki}^{*}, \qquad k \in K_0. \tag{53}$$

Выделим теперь вершины ядра, к которым подходят только ребра, исходящие из вершин нулевого порядка. Легко показать, что если $K_0 \neq I$, из-за предполагаемого по условию теоремы отсутствия циклов в ядре, такие вершины найдутся. Назовем эти вершины вершинами первого порядка, а множество индексов этих вершин обозначим через K_1.

Вершинам первого порядка соответствуют элементы, состояние которых определяется из решения задачи (3), (4), (5), причем ограничения (5) совпадают с (53). Поэтому

$$y_i^* = y_{i\max}^1$$

и, следовательно, в силу (49)

$$\xi_{ik}^{**} = \xi_{ik}^*, \quad i \in K_1, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{54}$$

Рассуждая аналогично, можно выделить вершины второго порядка, к которым подходят ребра, исходящие из вершин нулевого и первого порядка, и показать, что суммарный выпуск соответствующих элементов в рассматриваемых двух состояниях также не может быть различным, если имеет место (49). Последовательно повышая порядок выделяемых вершин, можно исчерпать все вершины ядра и тем самым показать, что в условиях теоремы требования (49) и (50) противоречивы.

Теорема III доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
2. А. И. Каценелинбойген, И. Л. Лахман, Ю. В. Овсиенко. Оптимальность и товарно-денежные отношения. М., «Наука», 1969.
3. H. Nikaido. Convex Structure and Economic Theory. Acad. Press, 1968.

Поступила в редакцию
11 X 1971