

## АНАЛИЗ ФАКТОРОВ УРОЖАЙНОСТИ И ЕЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

В. А. КОРОБОВ, Б. И. БУГЕРА

(Москва, Краснодар)

На примере производства озимой пшеницы в Северной зоне Краснодарского края рассматривается методика количественного анализа и прогнозирования показателя урожайности, базирующаяся на использовании математико-статистического аппарата производственных функций. В качестве модели урожайности обосновывается одна из трансцендентных функций, способная наиболее адекватно отразить специфику данного процесса. С помощью этой функции проведены конкретные расчеты по анализу влияния факторов урожайности и даны среднесрочные прогнозы ее уровня в целом по обследуемой зоне.

### 1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Выбор вида производственной функции имеет большое принципиальное значение. Из двух возможных подходов к решению этой задачи — эмпирического и теоретического — предпочтение следует отдать последнему. Производственная функция должна не только достаточно точно аппроксимировать некоторую информацию, но прежде всего достаточно адекватно отображать природу описываемого ею процесса, отвечая ряду теоретических и практических требований. Применительно к урожайности производственная функция должна иметь следующие свойства [1, 2]:

- 1) непрерывность, так как непрерывен сам процесс выращивания сельскохозяйственной культуры (в пределах производственного цикла);
- 2) неотрицательность при любых вещественных и положительных значениях аргументов (при наличии некоторых затрат величина урожайности не может быть отрицательной. Иными словами, рассматривается лишь 1-й квадрант декартовой системы координат);
- 3) ограниченность и однозначность при допустимых значениях аргументов (урожайность не может быть бесконечной или неоднозначной по своей величине при осуществлении вполне конкретных затрат);
- 4) обращение в нуль при отсутствии затрат хотя бы одного из наиболее существенных факторов (условие «закона минимума» Ю. фон Либиха);
- 5) дифференцируемость по всем переменным аргументам, существование непрерывных и конечных частных производных (хотя бы первого порядка) ввиду определенной эффективности каждого фактора урожайности;
- 6) отражение того, что сокращение одного из факторов, не находящегося в критическом минимуме, можно компенсировать приростом затрат других факторов (закон «совокупного действия факторов роста» Э. Митчеллиха);
- 7) варьированность эластичности производства при варьировании затрат производственных факторов (использование природных ресурсов, прису-

щее сельскохозяйственному производству, характеризуется тем, что по мере роста их потребления эластичность производства вначале повышается, но затем снижается, достигая нулевой величины, и может даже принять отрицательное значение (при отсутствии в данной области научно-технического прогресса));

8) наличие точки экстремума, соответствующей оптимальному режиму взаимодействия причинных факторов, и отражение депрессии выхода продукции при чрезмерных затратах отдельных факторов;

9) достаточное удобство в пользовании и возможность практического определения параметров и экономико-математических характеристик на основе существующей информации и вычислительных средств и методов.

Анализ показывает, что не всякая функция удовлетворяет этим условиям. Линейная, параболическая, гиперболическая, производственные функции Кобба — Дугласа, Митчерлиха — Бауля, Спилмана, Балмуканда, Ломакса и другие известные функции не отвечают им в полной мере [2]. Наиболее адекватной является трансцендентная функция, аналог которой впервые рассматривался в [3, 4]

$$y = a \prod_{i=1}^m x_i^{\beta_i} e^{-\gamma_i x_i}, \quad (1)$$

где  $y$  — величина урожайности;  $x_i$  — объем затрат  $i$ -го фактора;  $e$  — основание натуральных логарифмов;  $a$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  — параметры функции.

В экономико-математической литературе эта функция получила наименование «кинетической» [4]. Экономическая интерпретация ее параметров состоит в следующем. Параметр  $\beta_i$  является начальной эластичностью  $i$ -го фактора (безразмерная величина), параметр  $\gamma_i$  — скоростью роста величины общей эластичности производства данной функции в виде

$$\varepsilon_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} / \frac{y}{x_i} = \beta_i - \gamma_i x_i, \quad x_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, m-1 \wedge j \neq i,$$

с приростом затрат  $i$ -го фактора на единицу, т. е.

$$\gamma_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_i}, \quad x_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, m-1 \wedge j \neq i.$$

Размерность  $\gamma_i$  обратно пропорциональна единице измерения  $i$ -го фактора; мультипликатор  $a$  служит масштабноразмерным коэффициентом с размерностью, равной

$$[a] = \left[ \frac{d_0}{\prod_{i=1}^m d_i^{\beta_i}} \right],$$

где  $d_0$  — единица измерения показателя  $y$  (урожайности);  $d_i$  — единица измерения  $i$ -го фактора.

Рассматриваемая функция интересна прежде всего тем, что она способна уловить ситуацию, когда величина затрат переменного фактора является практически оптимальной. Если такая ситуация существует, то при математико-статистической обработке информации комбинация знаков управляющих параметров приводит к  $\beta_i > 0 \wedge \gamma_i > 0$ . При возрастающей эффективности затрат переменного фактора имеем  $\beta_i > 0 \wedge \gamma_i < 0$ , а при убывающей  $\beta_i < 0 \wedge \gamma_i < 0$  (на математическом анализе функции не бу-

дем останавливаться). Таким образом, при варьировании факторов данная функция способна характеризовать различную их эффективность. Наиболее интересный график функции представлен на рисунке.

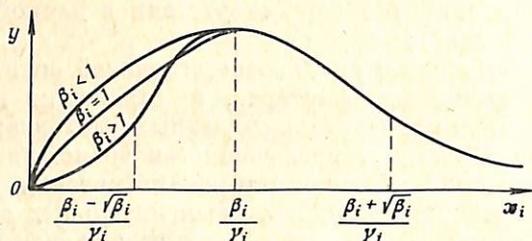


График кинетической функции при  $\beta_i > 0 \wedge \gamma_i > 0$

Кинетическая функция удобна и тем, что она допускает определение своих параметров на базе известных методов и алгоритмов. Например, посредством логарифмирования она приводится к линейному виду относительно своих параметров

$$\ln y = \ln a + \sum_{i=1}^n (\beta_i \ln x_i - \gamma_i x_i), \quad (2)$$

что позволяет определить их методом наименьших квадратов [2]. Этот метод не является, конечно, единственным способом определения искомых параметров производственной функции (возможны, например, метод максимального правдоподобия или метод экспертных оценок). Однако метод наименьших квадратов самый разработанный и, пожалуй, самый обоснованный из математико-статистических приемов обработки исходной информации. С помощью этого метода решена и наша конкретная задача.

## 2. ВЫБОР ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА УРОЖАЙНОСТЬ ОЗИМОЙ ПШЕНИЦЫ

При построении производственной функции немаловажное значение имеет выбор ее факторов (аргументов). Применительно к процессу урожайности эти факторы должны отражать основные стадии развития и формирования сельскохозяйственной культуры и быть вместе с тем наиболее значимыми с точки зрения своего влияния на величину урожайности.

Из всего комплекса различных факторов остановимся на метеорологических и экономических.

В первоначальную модель производственной функции вошли метеорологические показатели: 1) количество осадков в августе — сентябре (50% от фактического количества); 2) сумма отрицательных температур в период зимовки; 3) количество дней с оттепелями; 4) глубина промачивания почвы на начало марта, мм; 5) количество осадков весенне-летнего периода (80% от общей суммы за апрель, май и июнь); 6) число дней от возобновления вегетации до выхода растения в трубку; 7) число дней от всходов до прекращения вегетации; 8) число дней с суховеями; 9) число дней с дождями в период уборки.

Включение 6-го и 7-го факторов в число метеорологических сопряжено с тем, что на данных фазах развития озимой пшеницы они в наибольшей степени зависят все же от климатических условий. Что касается осадков, то так как они не во всей своей массе относятся к периодам посева, вегета-

ции и созревания зерна, нами взяты их неполные объемы (обоснование величины процента носит субъективный характер).

Из экономических и агрономических факторов берем следующие: 1) трудовые затраты на 1 га посева озимой пшеницы; 2) материально-денежные затраты на 1 га озимых; 3) количество тракторов в хозяйствах на 1 га озимых (в переводе на «условные» тракторы); 4) количество комбайнов на 1 га озимых; 5) объем внесенных удобрений на 1 га озимых (общая сумма минеральных и органических удобрений в ц/га); 6) процент благоприятных предшественников озимой пшеницы (подсолнечник, ячмень, соя, клевер, пар). Данный агрономический фактор призван отразить влияние на урожайность севооборота сельскохозяйственных культур.

Выбор такого состава факторов лимитировался исходной информацией. Оплата труда исключена, потому что: во-первых, она заведомо сильно связана с затратами труда; во-вторых, оплата труда в колхозах включает в себя еще и всевозможные дополнительные доходы, в то время как затраты труда относятся непосредственно к возделыванию озимой пшеницы. Внесенные удобрения взяты в своем суммарном количестве, ввиду того, что не во всех хозяйствах проводились дифференцированные по видам удобрения расчеты.

Итак, первоначально отобрано 15 факторов: 9 метеорологических, 5 экономических и один агрономический. В обследовании включено 80 колхозов. Исходя из имеющейся информации за 1965—1966 гг., требуется: 1) построить агрегированную кинетическую функцию, показывающую статистическую зависимость величины урожайности озимой пшеницы от включенных в анализ факторов; 2) проанализировать влияние на урожайность значимых факторов производственной функции; 3) произвести среднесрочный прогноз величины урожайности в целом по обследуемой зоне.

### 3. АНАЛИЗ ФАКТОРОВ УРОЖАЙНОСТИ

Математико-статистическая обработка первичной информации осуществлялась на базе функции (1). Полученные величины параметров (коэффициентов регрессии) проверялись на их статистическую значимость. Незначимые факторы отсеивались. В первую очередь отсеивался фактор, имевший самый незначимый коэффициент регрессии по сравнению с табличным значением  $t$ -критерия Стьюдента при уровне значимости  $p = 0,05$ . На первой итерации таким оказался фактор «количество дней с дождями в период уборки», во второй — «количество дней с суховеями» и т. д. В конечном счете получено следующее уравнение регрессии [2]

$$\ln y = 2,94 + 1,50 \ln x_1 - 0,0009x_1 + 1,46 \ln x_2 - 0,38x_2 + \\ + 0,25 \ln x_3 - 0,10x_3 + 0,66 \ln x_4 + 0,05x_4 + 4,70 \ln x_5 + \\ + 0,05x_5 + 40,10 \ln x_6 + 0,59x_6 - 51,80 \ln x_7 - 1,51x_7 + \\ + 1,43 \ln x_8 + 0,06x_8. \quad (3)$$

Коэффициенты этой регрессии взяты в качестве параметров кинетической функции

$$y = a \prod_{i=1}^8 x_i^{\beta_i} e^{-\gamma_i x_i} = 1,08 x_1^{1,50} e^{-0,0009x_1} x_2^{1,46} e^{-0,38x_2} \times \\ \times x_3^{0,25} e^{-0,10x_3} x_4^{0,66} e^{0,05x_4} x_5^{4,70} e^{0,05x_5} x_6^{40,1} \times \\ \times e^{0,59x_6} x_7^{-51,8} e^{-1,51x_7} x_8^{1,43} e^{0,06x_8}, \quad (4)$$

где  $e = 2,72$  — основание натуральных логарифмов;  $a = 1,08$  — результат потенцирования величины свободного члена регрессии (остальные параметры не требуют этой операции);  $x_1$  — затраты живого труда, чел/дни;  $x_2$  — количество комбайнов на 1000 га озимых;  $x_3$  — количество «условных тракторов на 1000 га озимых»;  $x_4$  — объем удобрений под озимые, ц/га;  $x_5$  — количество осадков за август — сентябрь, мм (50% от общей суммы);  $x_6$  — глубина промачивания почвы на начало марта, мм;  $x_7$  — количество дней от возобновления вегетации до выхода растения в трубку;  $x_8$  — количество осадков весенне-летнего сезона, мм (80% от общей суммы за апрель, май, июнь).

Экономико-математические характеристики влияния на урожайность озимой пшеницы значимых факторов кинетической функции

№№ ф/п	Показатели	%	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	$m_i$	19,7	3,3	4,5	10,3	5,1	47,1	64,4	32,5	120,0
2	$s_i$	0,4	0,1	0,1	0,2	0,3	2,0	0,9	0,3	2,7
3	$\sigma_i$	5,2	1,5	1,3	1,7	3,7	25,7	12,3	4,5	33,7
4	$v_i$	26,4	45,4	28,8	16,5	72,5	54,5	18,9	13,8	28,0
5	$r_i$	—	0,40	0,18	0,35	0,17	0,22	0,27	0,12	0,19
6	$t_{\beta_i}$	1,68	3,04	2,09	4,29	6,06	1,65	9,25	10,5	10,7
7	$t_{\gamma_i}$	—	5,69	2,07	1,69	1,66	9,86	7,91	2,20	1,67
8	$w_i$	—	9,13	1,38	2,44	1,58	0,98	0,59	-1,64	-0,92
9	$\varepsilon_i$	—	1,53	3,17	1,28	0,41	2,35	2,11	-2,73	-5,77

Примечание.  $y_0, x_i$  — урожайность и факторы производственной функции,  $i = 1, \dots, 8$ ;  $m_i, s_i$  — среднее арифметическое значение  $i$ -го признака и ошибка средней;  $\sigma_i, v_i$  — среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации  $i$ -го признака;  $r_i$  — чистый коэффициент корреляции  $i$ -го фактора;  $t_{\beta_i}, t_{\gamma_i}$  — критерии Стьюдента параметров функции,  $i = 0$  — свободный член регрессии;  $w_i, \varepsilon_i$  — предельная производительность и эластичность  $i$ -го фактора.

Корреляционное отношение и его ошибка:  $R \pm s_R = 0,70 \pm 0,09$ . Критерий Фишера  $f = 8,87$  при табличном  $f = 2,10$  со степенями свободы  $m_1 = 9$  и  $m_2 = 151$ . Параметры функции статистически значимы по  $t$ -критерию Стьюдента при табличном  $t_{0,05} = 1,66$  с уровнем значимости  $p = 0,05$  (см. строки 6—7 таблицы; для свободного члена  $t$ -критерий представлен в 1-м столбце, строка 6). Величины этих критериев характеризуют статистическую достоверность полученной функции урожайности. Другие необходимые характеристики сконцентрированы в таблице. Первые ее четыре строки (средние, их ошибки, среднеквадратические отклонения, коэффициенты вариации) вычислены по всей исходной информации (160 точек «хозяйство — годы»). Остальные (чистые коэффициенты корреляции, критерии Стьюдента коэффициентов регрессии, дифференциальные производительности и эластичности факторов) — получены на базе кинетической функции (4) при среднезональных величинах урожайности и факторов.

Как явствует из таблицы, среднеарифметические значения урожайности и факторов в Северной зоне Краснодарского края достаточно высоки (строка 1 таблицы). Стандартные ошибки средних свидетельствуют о небольшом различии между «генеральными» и «выборочными» средними, что повышает статистическую достоверность последних. Среднеквадратические отклонения (строка 3 таблицы) показывают значительную колеблемость показателей хозяйств вокруг соответствующих средних, что отражает неравномерность колхозов по условиям их хозяйствования. Для сравнения хозяйств лучшим показателем является коэффициент вариации (строка 4 таблицы). Особенно отличаются колхозы по затратам живого труда (в сред-

нем на 45,4%), объемам внесенных удобрений (72,5%) и количеству осадков в период посева и прорастания озимых (54,5%). Как следствие большой вариации факторов выступает заметная вариация и величины урожайности (26,4%). Силу связи между вариациями урожайности и факторов вскрывают чистые (частные) коэффициенты корреляции. Они более соответствуют данной цели, чем парные коэффициенты корреляции, которые не свободны от корреляции с зависимой переменной прочих факторов, содержащихся в уравнении регрессии. Ввиду этого целесообразно остановиться на чистых коэффициентах корреляции.

Наиболее сильно коррелируют с урожайностью (строка 5 таблицы) «труд» (0,40), «тракторы» (0,35), «глубина промачивания почвы на начало марта» (0,27), а наиболее слабо — «количество дней от возобновления вегетации до выхода растения в трубку» (0,12). Анализ с помощью средних и коэффициентов корреляции дает представление об общем положении дел в обследуемой зоне, но не о размере влияния на урожайность ее причинных факторов (коэффициенты корреляции говорят о наличии и силе статистической связи между вариациями переменных и не показывают размера самого влияния на зависимую переменную ее аргументов). Этой задаче отвечают такие экономико-математические характеристики производственной функции, как предельная (дифференциальная) производительность и эластичность, определяемые с помощью операции дифференцирования. В случае функции (1) эти характеристики имеют соответственно следующий вид

$$w_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = y(\beta_i x_i^{-1} - \gamma_i),$$

$$\varepsilon_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} / \frac{y}{x_i} = \beta_i - \gamma_i x_i,$$

$$x_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, m-1 \wedge j \neq i.$$

Проведенные расчеты величин дифференциальных (предельных) производительностей и эластичностей применительно к функции (4) при среднезональных значениях урожайности и факторов и при условии, что все переменные, кроме одной, зафиксированные на некотором постоянном уровне, показывают следующее (строки 8, 9 таблицы). Наибольший прирост урожайности, падающий в среднем на единицу приращения переменного фактора (дифференциальная производительность), и наибольшее соотношение между темпами приростов урожайности и переменного фактора (эластичность) имеют экономические ингредиенты: «труд» (его дифференциальная производительность и эластичность равны соответственно 9,13 ц/га на 1 тыс. чел/дней и 1,53%), «тракторы» (2,44 ц/га на 1 тыс. условных тракторов и 1,28%), «комбайны» (1,38 ц/га на 1 тыс. комбайнов и 3,17%); «удобрения» менее эффективны. Эффективность экономических факторов в целом, характеризуемая в [3] суммарной величиной частных эластичностей, в нашем случае есть

$$\eta_i = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i = 6,39 > 1.$$

Ввиду того что эта величина больше единицы, можно говорить о достаточной степени эффективности экономических факторов.

Метеорологические факторы имеют гораздо меньшие величины своих дифференциальных производительностей и эластичностей. Два последних из них характеризуются даже отрицательными значениями этих показате-

телей, что свидетельствует об их неблагоприятном воздействии на урожайность. Суммарная эластичность метеорологических факторов

$$\eta_2 = \sum_{i=5}^8 \varepsilon_i = -4,04 < 0$$

показывает в целом их неэффективность. Таким образом, с точки зрения эффективности возделывания озимой пшеницы «экономические силы» были гораздо более «производительными», чем метеорологические условия. В целом производство озимой пшеницы оставалось все же эффективным

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i = \eta_1 + \eta_2 = 2,35 > 1.$$

С помощью трансцендентной функции можно определить для анализируемого периода и оптимальный уровень затрат переменных факторов. В предположении, что нет никаких ограничений на использование ресурсов факторов, эта задача решается посредством отыскания точки безусловного экстремума производственной функции (при наличии некоторых ограничений следует решить соответствующую задачу на отыскание условного экстремума производственной функции). Свой экстремальные точки трансцендентная функция (1) имеет в случае  $\beta_i > 0 \wedge \gamma_i > 0$  (максимум) и  $\beta_i < 0 \wedge \gamma_i < 0$  (минимум). В обоих случаях экстремум достигается при величине переменной, равной

$$x_i^{(0)} = \beta_i / \gamma_i.$$

Применительно к конкретной функции урожайности (4) найдем для соответствующих переменных их оптимальные величины. Фактор «труд» имеет величину параметра  $\gamma_1 = 0,0009$ , что по существу равно нулю. Поэтому говорить об оптимальных затратах труда практически не приходится. Для факторов «комбайны», «тракторы» и «количество дней от возобновления вегетации до выхода растения в трубку» имеем следующие значения

$$\begin{aligned} x_2^{(0)} &= \frac{1,46}{0,38} = 3,9, \\ x_3^{(0)} &= \frac{0,25}{0,10} = 2,5, \\ x_7^{(0)} &= \frac{-51,80}{-1,51} = 34,3. \end{aligned}$$

Сравнивая их с соответствующими средними (строка I таблицы), заключаем, что в рассматриваемом периоде времени (1965—1966 гг.) первый и третий факторы находились примерно на оптимальных уровнях (первый несколько превосходил, третий отставал), а второй — превышал свое оптимальное значение почти в четыре раза. Видимо, целесообразно было бы проведение некоторых экономических мероприятий по более рациональному использованию в хозяйствах имеющегося тракторного парка (с точки зрения повышения эффективности производства озимой пшеницы).

Параметры остальных факторов функций (4) характеризуются «неэкстремальными» комбинациями своих знаков, а потому относительно таких переменных задача отыскания безусловного оптимума отпадает.

#### 4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УРОЖАЙНОСТИ ОЗИМОЙ ПШЕНИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛАСТИЧНОСТЕЙ ПРОИЗВОДСТВА

Производственные функции находят широкое применение не только в целях анализа, но и в целях прогнозирования. Прогнозирование с их помощью обычно осуществляется следующим образом. Сначала прогнозируется (например, по формуле «сложных процентов») каждый фактор, затем эти прогнозы подставляются в исходную функцию с известными ее параметрами и вычисляется прогноз зависимого показателя. Такой прием имеет тот недостаток, что он оперирует с прогнозами зависимой и независимых переменных без учета взаимосвязей динамик их развития. В качестве одного из возможных подходов к исправлению этого недостатка можно предложить динамическую модель

$$y_{\tau+1} = y_{\tau} + y_{\tau} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(\tau) t_i(\tau), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $y_{\tau+1}$ ,  $y_{\tau}$  — величина зависимой переменной в  $\tau$ -м и  $(\tau + 1)$ -м годах прогнозирования;  $\varepsilon_i(\tau)$ ,  $t_i(\tau)$  — эластичность и темп прироста  $i$ -го фактора как функции от времени прогнозирования  $\tau$ .

Эластичность характеризует «соотношение сил» между динамикой развития двух переменных, показывая процент изменения одной из них (зависимой) при приращении величины другой на один процент (сущность эластичности). Произведение эластичности на темп прироста фактора дает общий процент изменения зависимой переменной при данном сдвиге отдельного фактора. Сумма подобных произведений представляет собой темп прироста зависимой переменной, согласованный с соответствующими изменениями факторов. Этот темп прироста служит критерием корректировки величины показателя  $y$  в  $\tau$ -м году на последующий  $(\tau + 1)$ -й год прогнозирования.

В предлагаемой модели новый прогноз исходит из предыдущих значений зависимой переменной, эластичностей и темпов приростов факторов. В качестве начальной ( $\tau = 0$ ) величины зависимого показателя можно взять его базисное значение (последний год предыстории прогнозирования), либо среднюю за всю предысторию или же за некоторый период ее (например, за последние два — три года. Это зависит от однородности и репрезентативности предыстории прогнозирования). То же самое относится и к выбору начальных темпов прироста факторов. Начальные эластичности факторов вычисляются на основе производственной функции (например, кинетической). Эластичности и темпы факторов являются некоторыми функциями во времени (например, линейными трендами). При невозможности определить эти функции или уверенности, что они существенно не изменятся во времени, можно ограничиться начальными эластичностями и темпами факторов, распространив их величины из предыстории на период прогнозирования. В этом случае динамическая модель прогнозирования превращается в модифицированную модель «сложных процентов»

$$y_{\tau+1} = y_{\tau} + y_{\tau} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i t_i = y_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i t_i \right)^{\tau+1}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $y_0$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $t_i$  — базисные величины зависимой переменной, эластичности и темпа прироста  $i$ -го фактора,  $\tau = 0$ .

Преимущество модифицированной модели перед обычной формулой «сложных процентов»  $y_{t+1} = y_0(1 + t_y)^{t+1}$  состоит в том, что в ней темп прироста  $t_y$  определяется в соответствии с темпами прироста причинных факторов, а не исходя из динамики развития одного лишь показателя  $y$  (в обычной модели величина  $t_y$  представляет собой чаще всего среднюю геометрическую из темпов прироста показателя  $y$ , никоим образом не связанного со своими факторами).

Рассчитаем уровень урожайности озимой пшеницы на 1967—1970 гг. с помощью модифицированной модели «сложных процентов». За базисную примем двухлетнюю среднюю урожайность, за исходные эластичности — эластичности факторов кинетической функции (см. таблицу). В качестве исходных темпов приростов факторов возьмем индексы, вычисляемые по первичной информации как отношение приростов среднезональных значений факторов в 1966 г. к среднезональным значениям факторов в 1965 г. Для экономических факторов искомые индексы

$$t_1 = \frac{3,35 - 3,25}{3,25} = 0,03, \quad t_2 = \frac{4,54 - 4,46}{4,46} = 0,01,$$

$$t_3 = \frac{10,5 - 10,3}{10,3} = 0,01, \quad t_4 = \frac{5,2 - 5,0}{5,0} = 0,04.$$

Пусть они распространяются на весь период прогнозирования и в течение всего четырехлетнего периода прогнозирования метеорологические факторы не изменятся, т. е. их темпы прироста принимаются равными нулю. Иными словами, требуется выяснить, какова будет урожайность, если исходить из пессимистических оценок ее уровня (сохранение неблагоприятных метеорологических условий 1965—1966 гг. и прежней динамики развития экономических факторов). Пользуясь моделью (6), получаем на 1967—1970 гг. следующие прогнозы урожайности:  $y_{1967} = 19,7(1 + 1,53 \cdot 0,03 + 3,17 \cdot 0,01 + 1,28 \cdot 0,01 + 0,41 \cdot 0,04) = 19,7 \cdot (1 + 0,11) = 21,8$  ц/га;  $y_{1968} = 19,7(1 + 0,11)^2 = 24,2$  ц/га;  $y_{1969} = 19,7(1 + 0,11)^3 = 26,8$  ц/га;  $y_{1970} = 19,7(1 + 0,11)^4 = 29,7$  ц/га.

Рассчитаем теперь урожайность на тот же период, пользуясь обычной моделью «сложных процентов» (темпы прироста урожайности в 1966—1965 гг. составил величину  $t_y = (20,2 - 19,2) / 19,2 = 0,05$ ):  $y_{1967} = 19,7(1 + 0,05) = 20,7$  ц/га;  $y_{1968} = 19,7(1 + 0,05)^2 = 21,7$  ц/га;  $y_{1969} = 19,7(1 + 0,05)^3 = 22,8$  ц/га;  $y_{1970} = 19,7(1 + 0,05)^4 = 23,9$  ц/га.

Прогнозы по двум моделям различны ввиду использования в них разных темпов прироста зависимой переменной: вторая модель экстраполирует фактический темп прироста лишь зависимого показателя  $y$ , первая — пользуется его величиной, скорректированной на начальные эластичности и темпы факторов. В нашем примере пришлось ограничиться начальными эластичностями и темпами факторов без рассмотрения их как функций во времени из-за недостатка информации по выявлению трендов.

Фактическая урожайность озимой пшеницы в Северной зоне Краснодарского края в 1967—1970 гг. была следующей ц/га:  $y_{1967} = 22,7$ ,  $y_{1968} = 25,2$ ,  $y_{1969} = 14,8$ ,  $y_{1970} = 32,3$ . Сравнение с фактической урожайностью прогнозов по двум моделям показывает, что первая из них характеризуется более точными результатами. Это дает некоторое основание для заключения об определенной эффективности предлагаемой модели прогнозирования.

Таким образом, аппарат производственных функций может служить полезным инструментом для выявления и анализа закономерных взаимосвязей между исследуемыми переменными, для определения количествен-

ной оценки влияния на результат сельскохозяйственного производства его важнейших факторов, для получения достаточно точных прогнозов. Построение и анализ производственных функций (в частности, рассмотренной нами трансцендентной функции) содействует повышению эффективности планирования сельскохозяйственного производства — этой важнейшей отрасли общественного хозяйства.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Искаков, В. А. Коробов, Э. А. Игрон. Производственные функции и их применение в планировании сельского хозяйства. В сб. Использование математических методов и вычислительной техники в сельском хозяйстве. М., «Экономика», 1968.
2. В. А. Коробов. Некоторые вопросы разработки сельскохозяйственных производственных функций. Канд. дис. МГУ, 1970.
3. Э. Хеди, Д. Диллон. Производственные функции в сельском хозяйстве. М., «Прогресс», 1965.
4. A. N. Halter, H. O. Gartner, J. G. Hocking. A Note Above Transcendention Function. J. of Farm Economics, 1957, N 39(3).

Поступила в редакцию  
21.VII.1971