ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1972 том VIII, вып. 2

МАГИСТРАЛЬНЫЙ РОСТ В ДИНАМИЧЕСКИХ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МОДЕЛЯХ

С. М. МОВШОВИЧ

(Москва)

Теоремы о магистрали являются полезным инструментом исследования асимптотического поведения оптимальных траекторий динамических моделей народного хозяйства. Они позволяют определять тенденции развития отраслевой структуры, цен и темпа роста. Изучение асимптотического поведения цен дает теоретический фундамент построения моделей ценообразования, устанавливая связь между оптимальными динамическими ценами и ценами, полученными на основе различных затратных принципов [1]. К настоящему времени теоремы о магистрали установлены для целого ряда экономических моделей. Литературные ссылки содержатся, например, в [2]. Однако в изученные ранее схемы не укладываются многие важные модели, к числу которых относится модель, рассмотренная в [3]. Балансовые связи между параметрами состояния ее в последовательные моменты времени задаются соотношениями

$$\begin{gathered}
(A'-E)x_t'+cy_t+\Gamma z_t+B\sum_{\tau=0}^{\tau_0}\Psi(\tau)x_t^\tau\leqslant 0,\\
lx_t'-y_t\leqslant 0,\\
x_t'-z_t\leqslant 0,\\
z_t-\sum_{\tau=0}^{\tau_0}\Phi(\tau)x_t^\tau\leqslant z_{t-1},\\
x_t^\tau\leqslant x_{t-1}^{\tau+1},\quad \tau=0,1,\ldots,\tau_0-1,\\
x_t',\ y_t,\ z_t,\ x_t^\tau\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,T.
\end{gathered}\tag{1}$$

Основной целью данной работы является доказательство теорем о магистрали для (1). Попутно будет получено частичное обобщение результатов [4, 5], где каждая отрасль располагает множеством технологических процессов. Специальные предположения обеспечивают выбор одного (эффективного) процесса в каждой отрасли на всей оптимальной траектории, исключая конечное (не зависящее от T) число периодов. В (1) каждая отрасль располагает лишь одним процессом, и в этом смысле модели [4, 5] являются более общими, хотя на квадратную матрицу, составленную из эффективных процессов, накладывается ряд ограничений, которым модель (1) не удовлетворяет. Из этих ограничений, в частности, следуют и приведенные ниже условия 1) — 4).

Представим (1) в более компактной форме

$$L_1x_t\leqslant L_2x_{t-1},\quad x\geqslant 0,\ t=1,\ldots,T,\tag{2}$$

где L_1 и L_2 — квадратные матрицы порядка n; $x_t = (x_t', y_t, z_t, x_t^0, \ldots, x_t^{\tau_0})$ — n-мерный вектор, описывающий состояние экономики в момент t. Наряду с (2) рассмотрим двойственную ей систему

$$p_{t-1}L_1 \geqslant p_tL_2, \quad p_t \geqslant 0, \quad t = 1, \ldots, T-1. \tag{3}$$

Системам (2) и (3) соответствуют прямая и двойственная модели Неймана

$$\alpha \to \max \text{ при } \alpha L_1 x \leqslant L_2 x, \quad x \geqslant 0, \tag{4}$$

и

$$\beta \to \min \text{ при } \beta p L_1 \geqslant p L_2, \quad p \geqslant 0. \tag{5}$$

Если система (1) разрешима и неразложима, а диагональные матрицы $\Phi(\tau)$ и $\Psi(\tau)$ строго согласованы, то решение (4) $(\alpha_0, \bar{x})$ существует, причем неймановский темп роста $\alpha_0 \geqslant 1$, а неймановский вектор пропорций $\bar{x}$ единствен и положителен. Если $\alpha_0 > 1$, то справедлива теорема двойственности $(\alpha_0 = \beta_0)$. Неймановский вектор цен $\bar{p}$ также единствен и положителен.

В дальнейшем, отвлекаясь от конкретной структуры (1) матриц L_1 и L_2, будем рассматривать произвольную систему (2), удовлетворяющую следующим условиям: 1) L_1 и L_2 — квадратные матрицы порядка n, $L_2 \geqslant 0$; 2) из $L_1 x \leqslant 0$, $x \geqslant 0$ следует, что $x = 0$; 3) неймановские векторы $\bar{x}$ и $\bar{p}$ существуют, единственны и положительны; 4) среди корней характеристического уравнения $|\lambda L_1 - L_2| = 0$ на круге радиуса α_0 расположен лишь простой корень $\lambda = \alpha_0$.

Обозначим через $X_t^{t+m} = (x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+m})$ последовательность из $m+1$-го вектора. Последовательность X_0^T, удовлетворяющую (2), будем называть ее траекторией, а соответствующую последовательность X_t^{t+m} $0 \leqslant t \leqslant T-m$, — отрезком траектории. Множество последовательностей $L(m) = \{X_t^{t+m}: L_1 x_\tau = L_2 x_{\tau-1}, x_\tau \geqslant 0, \tau = t+1, \ldots, t+m\}$ назовем неймановским. Очевидно, при любых t и m неймановское множество непусто и является конусом. Пусть $\rho(x, y) = \left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|} \right\|$ — угловое расстояние между двумя ненулевыми векторами в евклидовом пространстве $\rho(x, Y) = \min\limits_{u \in Y} \rho(x, y)$ — угловое расстояние между вектором и конусом Y. Положим $L_\varepsilon(m) = \{X_t^{t+m}: L_1 x_\tau \leqslant L_2 x_{\tau-1}, \quad x_\tau \geqslant 0, \quad \tau = t+1, \ldots, t+m, \rho(X_t^{t+m}, L(m)) \leqslant \varepsilon\}$.

Лемма 1. *По заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольной траектории X_0^T из $X_t^{t+m} \notin L_\varepsilon(m)$ следует*

$$\bar{p} L_1 x_{t+m} \leqslant (1-\delta)\alpha_0^m p L_1 x_t. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (6) неверно, т. е. найдутся последовательности отрезков $X_t^{t+m}(k)$ и $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$ такие, что $X_t^{t+m}(k) \notin L_\varepsilon(m)$, но $\bar{p} L_1 x_{t+m}(k) > (1-\delta_k)\alpha_0^m \bar{p} L_1 x_t(k)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\|X_t^{t+m}(k)\| \leqslant \text{const}$. Переходя к пределу по $k \to \infty$, получим $\bar{p} L_1 x^0_{t+m} = \alpha_0^m \bar{p} L_2 x_t^0$. Так как $\bar{p} > 0$, $\alpha_0 \bar{p} L_1 = \bar{p} L_2$ и $L_1 x_\tau^0 \leqslant L_2 x^0_{\tau-1}$, то $L_1 x_\tau^0 = L_2 x^0_{\tau-1}$, $\tau = t+1, \ldots, t+m$, т. е. $X_t^{0,t+m} \in L(m)$. С другой стороны, из непрерывности углового расстояния следует, что $\rho(X_t^{0,t+m}, L(m)) \geqslant \varepsilon$. Лемма доказана.

Система (2) вместе с начальными условиями x_0 определяет множество траекторий экономической динамики. Выбор оптимальной траектории определяется функцией общественной полезности, заданной на множестве траекторий, $U = U(X_0^T)$. Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение, вытекающее из условий 1) — 4). Для произвольного $c \geqslant 0$ найдется такое натуральное k, что для любого t и любой траектории X_0^T справедливо

$$cx_t \leqslant k\bar{p}L_1x_t. \tag{7}$$

Для доказательства предположим, что (7) неверно. Тогда найдутся последовательность t_n и траектории $X_0^{t_n}$ такие, что $cx_{t_n} > n\bar{p}L_2x_{t_n} \geqslant \geqslant n\bar{p}L_1x_{t_n-1}$. Положив $y_t = x_t / \|x_t\|$ и $\rho_t = \|x_t\|/\|x_{t+1}\|$, получим, что $\frac{c}{n}y_{t_n}\rho_{t_n} > \bar{p}L_2y_{t_n}\rho_{t_n} \geqslant \bar{p}L_1y_{t_n+1}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y_{t_n} \to y_0$, $y_{t_n+1} \to y_1$. При этом $L_1y_1 \leqslant L_2y_0$. Если $L_2y_0 = 0$, то $L_1y_1 \leqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$, что противоречит условию 2). Если $L_2y_0 \geqslant 0$, то для некоторого δ и достаточно больших n справедливо $\bar{p}L_2y_n > \delta$, так как $\bar{p} > 0$. Но тогда $\frac{c}{n}y_{t_n} > \delta > 0$ для достаточно больших n, что противоречит ограниченности cy_{t_n}. Неравенство 7 доказано.

Следствие 1. Пусть

$$U(X_0^T) = cx_T, \quad c \geqslant 0. \tag{8}$$

Если $x_0 > 0$, то по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое число M, что для любого T и любой оптимальной траектории $\bar{X}_0^T$ число непересекающихся отрезков, для которых $\bar{X}_t^{t+m} \notin L_\varepsilon(m)$, не превосходит M. Этот факт непосредственно следует из теоремы 2 в [6].

По существу утверждение следствия 1 отличается от теоремы о магистрали Раднера лишь тем, что неймановское множество, близость к которому гарантируется, имеет высокую размерность (не меньше n). Поэтому для получения более содержательных утверждений необходим дальнейший анализ свойств оптимальных траекторий. Рассмотрим сначала целевую функцию $U(X_0^T)$ иного вида. Пусть

$$U(X_0^T) = \sum_{t=1}^{T} \lambda^t u(x_t), \tag{9}$$

где $u(x)$ — выпуклая вверх монотонно возрастающая (из $x_1 > x_2$ следует $u(x_1) > u(x_2)$) гладкая функция, определенная на положительном ортанте пространства E^n. Для такой целевой функции число отрезков оптимальной траектории, для которых $\bar{X}_t^{t+m} \notin L_\varepsilon(m)$ может, вообще говоря, неограниченно возрастать с ростом T. Однако справедливо утверждение, близкое к установленному в следствии 1. Обозначим через $M_{T,t}$ число непересекающихся отрезков траектории X_0^T, для которых $X_\tau^{\tau+m} \notin L_\varepsilon(m)$ при $\tau + m \leqslant t$, $\bar{u}(a) = u(a\bar{x})$. Очевидно, $\bar{u}^\tau(a)$ — выпуклая функция, определенная и дифференцируемая при $a \geqslant 0$, $a \in E^1$.

Следствие 2. *Пусть* $x_0 > 0$, функция $U(X_0^T)$ удовлетворяет условиям

$$\lambda\alpha_0 \geqslant 1, \quad \lim_{a\to\infty} \bar{u}'(a)a^{1-\mu}\ln a \geqslant \Delta > 0, \quad \mu = -\ln\lambda / \ln\alpha_0. \tag{10}$$

Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое M, что для любого t_0 и произвольной оптимальной траектории $\bar{X}_0^T$ число $M_{T,t_0} < M$ для всех T, превосходящих некоторое T_0.

Доказательство. Пусть утверждение неверно. Тогда для произвольного M найдется такое t_0, что существуют траектории произвольно большой длины T, для которых $M_{T,t_0} > M$. Пусть $\bar{x} \leqslant x_0$, тогда последовательность x_0, $x_t = \alpha_0^t\bar{x}$, $t = 1, \ldots, T$, образует траекторию. Из (6) и (7) следует, что $c\bar{x}_t \leqslant k\bar{p}L_1\bar{x}_t \geqslant k\alpha_0^t(1-\delta)^M\bar{p}L_2x_0$ при $t \geqslant t_0$, т. е. полагая, что $r = k\bar{p}L_1x_0 / \min\limits_i c_i$ и e — n-мерный вектор с единичными компонентами, получим

$$\tilde{x}_t \leqslant \alpha_0{}^t(1-\delta)^M re, \quad t \geqslant t_0. \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что можно выбрать M и соответственно t_0 такими, чтобы $\tilde{x}_t \leqslant \rho x_t$ для некоторого $\rho < 1$ и всех $t \geqslant t_0$. Из оптимальности $\tilde{X}_0{}^T$ следует

$$\sum_{t=t_0+1}^{T} \lambda^t(u(\rho\alpha_0{}^t\bar{x}) - \bar{u}(\alpha_0{}^t\bar{x})) \geqslant \sum_{t=1}^{t_0} \lambda^t(u(x_t) - u(\tilde{x}_t)) \geqslant -c(t_0),$$

причем $c(t_0)$ не зависит от T, т. е., учитывая (10), получим

$$-c(t_0) \leqslant (\rho - 1) \sum_{t=t_0+1}^{T} \bar{u}'(\rho_1\alpha_0{}^t)\lambda^t\alpha_0{}^t \leqslant \frac{\Delta_1(\rho-1)}{\ln\alpha_0} \sum_{t=t'+1}^{T} \frac{\lambda^t\alpha_0{}^t}{\alpha^{t-\mu t}t} =$$

$$= \frac{\Delta_1(\rho-1)}{\ln\alpha_0} \sum_{t=t'+1}^{T} \frac{1}{t},$$

где $\rho \leqslant \rho_1 \leqslant 1$, $0 < \Delta_1 \leqslant \Delta$, $t' \geqslant t_0$. Из расходимости гармонического ряда вытекает, что последнее соотношение невозможно при достаточно большом T. Полученное противоречие доказывает следствие.

Перейдем теперь к анализу свойств траекторий, близких к неймановскому множеству.

Лемма 2. *Для любых натурального N и $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что из*

$$X_t^{t+m} \in L_\varepsilon(m), \qquad t = 0, \ldots, N-m, \tag{12}$$

следует существование последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_N$, для которой

$$L_1y_t = L_2y_{t-1}. \;\; t = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

и $\rho(x_t, y_t) < \delta$ для всех $t = 0, 1, \ldots, N$.

Поскольку матрица L_1 может быть вырожденной, для доказательства леммы нам потребуется установить сначала, из каких y может исходить последовательность, удовлетворяющая (13). При этом прояснится, почему в лемме 1 рассматривались отрезки траектории длины m и чему m должно быть равно. Попутно установим некоторые свойства траекторий системы (13). Точку x назовем m-продолжимой, если существует отрезок траекторий $X_0{}^m$, $x_0 = x$, системы

$$L_1x_t = L_2x_{t-1}, \;\; t = 1, \ldots, T. \tag{14}$$

Множество m-продолжимых точек обозначим R_m. Точки, из которых исходят траектории произвольной длины, объединим в множество R.

Лемма 3. *Пусть $X_0{}^T$ — траектории системы (14). Тогда найдется натуральное k, не превосходящее $n-1$, такое, что точки x_t отрезка траектории X^{T-k} принадлежат R, а сам отрезок при заданном x_0 определяется единственным образом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о 1. Если L_1 — невырожденная матрица, то $x_t = L_1{}^{-1} L_2x_{t-1}$, т. е. R совпадает со всем пространством, а $k = 0$. Пусть теперь L_1 — вырожденная матрица, $L_1{}^T = (L_{11}{}^T, L_{12}{}^T)$, причем $L_{12} = M_1L_{11}$, а ранг матрицы L_{11} равен числу ее строк (T — знак транспонирования). Первое соотношение (14) можно представить в виде

$$L_{11}x_1 = L_{21}x_0, \quad 0 = (L_{22} - M_1L_{21})x_0, \text{ где } L_2{}^T = (L_{21}{}^T, L_{22}{}^T), \tag{15}$$

т. е. $R_1 = \{x\colon (L_{22} - M_1 L_{21})x = 0\}$. Для существования x_2 необходимо, чтобы $x_1 \in R_1$

$$L_{11}x_1 = L_{21}x_0,\ (L_{22} - M_1 L_{21})x_1 = 0. \tag{15$'$}$$

Если матрица $Q_1{}^T = (L_{11}{}^T, (L_{22} - M_1 L_{21})^T)$ невырождена, то $R = R_1$, а $k = 1$. Если Q_1 — вырожденная матрица и $Q_1{}^T = (L_{11}{}^T, (L_{22}{}^1 - M_1{}^1 L_{21})^T, (L_{22}{}^2 - M_1{}^2 L_{21})^T)$, где $(L_{22} - M_1 L_{21})^T = ((L_{22}{}^1 - M_1{}^1 L_{21})^T, (L_{22}{}^2 - M_1{}^2 L_{21})^T)$, а $L_{22}{}^2 - M_1{}^2 L_{21} = M_2{}^1 L_{11} + M_2{}^2 (L_{22}{}^1 - M_1{}^1 L_{21})$, то (15′) эквивалентно системе

$$L_{11}x_1 = L_{21}x_0,\ (L_{22}{}^1 - M_1{}^1 L_{21})x_1 = 0,\ 0 = M_2{}^1 L_{21}x_0. \tag{15$''$}$$

Отсюда, как и раньше, $R_2 = R_1 \cap \{x : M_2{}^1 L_{21}x = 0\}$. Положим $Q_2{}^T = (L_{11}{}^T, (L_{22}{}^1 - M_1{}^1 L_{21})^T, (M_{21}{}^1 L_{21})^T$. Если Q_2 вырождена, этот процесс можно продолжить, причем будут строиться множества $R_3, R_4, \ldots, R_k$ и матрицы $Q_3, \ldots, Q_k$ до тех пор, пока матрица Q_k окажется невырожденной. Докажем, что невырожденная матрица встретится не позднее, чем при $k = n - 1$. Это доказательство существенно опирается на теорию регулярных пучков матриц [7, гл. XII].

2. Докажем прежде всего, что пучок матриц $L_1 - \lambda L_2$ регулярный, т. е. существует такое число λ_0, что определитель $|L_1 - \lambda_0 L_2| \neq 0$. Пусть это неверно и $|L_1 - \lambda L_2| = 0$ при любом действительном λ. Положим $L(\alpha) = \alpha L_1 - L_2$. Из единственности $\bar{x}$ следует, что ранг $L(\alpha_0) = n - 1$. Положим (с помощью перенумерации, если это необходимо) $L(\alpha) = \begin{pmatrix} L_{11}(\alpha), & L_{12}(\alpha) \\ l_{21}(\alpha), & l_{22}(\alpha) \end{pmatrix}$, где $L_{11}(\alpha_0)$ — невырожденная матрица ранга $n - 1$. Из вырожденности $L(\alpha)$ при любом α следует, что $(l_{21}(\alpha), l_{22}(\alpha)) = M(\alpha)(L_{11}(\alpha), L_{12}(\alpha))$, а $L_{11}(\alpha)$ невырождена при $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 + \Delta$ для некоторого $\Delta > 0$. Если $x = (x_1, x^n)$, где x_1 — $(n-1)$-мерный вектор, то, положив $x^n = \bar{x}^n$, из системы $L(\alpha)x = 0$ получим $x_1(\alpha) = -L_{11}{}^{-1}(\alpha)L_{12}(\alpha)\bar{x}^n$. Так как $x_1(\alpha_0) = \bar{x}_1 > 0$, то существует неотрицательное решение системы $L(\alpha)x = 0$ при $\alpha > \alpha_0$, что противоречит определению α_0. Итак, $L_1 - \lambda L_2$ — регулярный пучок матриц.

3. Система (14) эквивалентна системе

$$Az_t = Bz_{t-1},\quad t = 1, \ldots, T, \tag{16}$$

где $A = PL_1Q$, $B = PL_2Q$, $z = Q^{-1}x$, P, Q — произвольные невырожденные матрицы n-го порядка. Выберем P и Q так, чтобы получить каноническое представление пучка $L_1 - \lambda L_2$. При этом $A = (E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots, E_{n_k}, I)$, $B = (H_{n_1}, H_{n_2}, \ldots, H_{n_k}, E)$. Здесь через запятую записаны последовательные ненулевые клетки квазидиагональных матриц A и B; E_i — единичная матрица порядка i; E — единичная матрица порядка $n - \sum_{l=1}^{k} n_l$; H_i — матрица порядка i, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю; $I = (\lambda_1 E_{i_1} + H_{i_1}, \ldots, \lambda_s E_{i_s} + H_{i_s})$ — матрица в жордановой форме. Так как A — вырожденная матрица, то в некоторых клетках I диагональные элементы λ_r равны нулю. Процесс построения последовательности матриц, эквивалентных Q_i, описанный выше, затрагивает именно эти клетки, так как остальные объединяются в матрицу, эквивалентную L_{11}. Рассмотрим ход процесса для одной из вырожденных клеток. Пусть $S^0 = \lambda E_r + H_r$, $\lambda = 0$,— вырожденная клетка порядка r матрицы A. В матрице B этой клетке соответствует клетка E_r. Первые $r - 1$ строк S^0 входят в матрицу, эквивалентную L_{11}. Так как M_1 — нулевая матрица-строка порядка $r - 1$, то $(L_{22} - M_1 L_{21})_{\text{экв}} = (0, \ldots,$

$\ldots,0,1)$, т. е. $S^{(1)} = S^0 + \Gamma_{rr}$, где $\Gamma_{\alpha\beta}$ — матрица порядка α, у которой элемент $\gamma_{\alpha\beta} = 1$, а остальные — нули. Клетка $S^{(1)}$ снова вырождена. На следующем шаге $M_2^1 = (0,\ldots,0,1)$ и $S^{(2)} = S^0 + \Gamma_{r,\,r-1}$. Продолжая процесс после r — 1-го шага, получим невырожденную матрицу $S^{(r-1)} = S^0 + \Gamma_{r,\,1}$ В процессе построения матрицы, эквивалентной Q_i, все вырожденные клетки матрицы $(Q_{i-1})_{\text{экв}}$ преобразуются одновременно. Поэтому процесс построения невырожденной матрицы $(Q_k)_{\text{экв}}$ завершается после не более чем n — 1-го шага. Для исходной системы (14) получим $Q_k^T = (L_{11}^T(L_{22}^1 - M_1^1L_{21})^T, (M_2^{11}L_{21})^T, \ldots, (M_k^1L_{21})^T)$ и соответственно $R = R_k$, $R_1 = \{x : (L_{22} - M_1L_{21})x = 0\}$, $R_i = R_{i-1} \cap \{x : M_i^1L_{21}x = 0\}$, $i \geqslant 2$. Непустота R следует из того, что $\bar{x} \in R$. Множество R является подпространством E^n. Если X_0^T — траектория (14), то $Q_kx_t = \begin{pmatrix} L_{21}x_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ для всех $t \leqslant T - k$, так как эти $x_t \in R$. Отсюда следует, что отрезок X_0^{T-k} определяется единственным образом. Лемма доказана.

В конструкции доказательства по существу использовался лишь факт регулярности пучка матриц $L_1 - \lambda L_2$. Поэтому аналогично лемме 3 можно доказать:

Следствие 1. Пусть X_0^T — траектория (14). Тогда существует невырожденная матрица Q такая, что $L_1^1x_t = Q^1x_{t-1}$, $0 = Q^2x_{t-1}$ для всех $t \geqslant k$, где $k \leqslant n - 1$, $Q^T = (Q_1^T, Q_2^T)$. Если при этом фиксирована точка x_T, то отрезок траектории X_k^T определяется единственным образом.

Следствие 2. Пусть X_0^T — траектория системы (14). Тогда существует такая невырожденная матрица C порядка n, что

$$x_t = Cx_{t-1}, \qquad n - 1 \leqslant t \leqslant T - n + 1. \tag{17}$$

Доказательство. Существуют невырожденные матрицы Q_k и Q такие, что $Q_kx_t = \begin{pmatrix} L_{21}x_{t-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 < t \leqslant T - n + 1$ и $\begin{pmatrix} L_1^1x_t \\ 0 \end{pmatrix} = Qx_{t-1}$, $n - 1 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда для $n - 1 \leqslant t \leqslant T - n + 1$ и произвольного λ получим $\left(\lambda Q_k + \begin{pmatrix} L_1^1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) x_t = \left(\lambda \begin{pmatrix} L_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + Q\right) x_{t-1}$. Обозначим через $a(\lambda)$ значение определителя первой матрицы и через $b(\lambda)$ — второй. Очевидно, $a(\lambda) \neq 0$ при достаточно больших λ, а $b(\lambda) \neq 0$ при $\lambda = 0$. Так как $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ — полиномы степени не выше n относительно λ, не равные нулю тождественно, то найдется такое λ_0, что одновременно $a(\lambda_0) \neq 0$ и $b(\lambda_0) \neq 0$. Положим $C = \left(\lambda_0Q_k + \begin{pmatrix} L_1^1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \left(\lambda_0 \begin{pmatrix} L_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + Q\right)$. Следствие доказано.

Пусть P_0^{T-1} — траектория системы (при заданном p_{T-1})

$$p_{t-1}L_1 = p_tL_2, \qquad t = 1,\ldots,T-1. \tag{18}$$

Следствие 3. Существует такая невырожденная матрица C_1 порядка n, что $p_{t-1} = p_tC_1$, $n \leqslant t \leqslant T - n + 1$.

Вернемся к доказательству леммы 2, заметив, что $m = n - 1$. Доказательство леммы 2 проводится индукцией по длине отрезка траектории X_0^s. Пусть $s = 0$. Положим $\varepsilon = \delta$. Из включения (12) следует существование последовательности $\tilde{Y}_0^n \in L(n)$ такой, что $\rho(\tilde{y}_0, x_0) < \delta$. В качестве y_0 выберем $\tilde{y}_0$. Очевидно, $y_0 \in R$. По индуктивному предположению по любому заданному $\delta_1 > 0$ найдется такое ε_1, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ из (12) следует существование последовательности $Y_0^t \in L(t)$, $t < N - n + 1$ такой, что

$\rho(x_l, y_l) \leqslant \delta_1$ и $y_l \in R$ для всех $l = 1, \dots, t$. Из (12) следует также существование последовательности $\tilde{Y}_t^{t+n} \in L(n)$ такой, что $\rho(x_\tau, \tilde{y}_\tau) \leqslant \varepsilon$, $\tau = t, \dots, t+n$. При этом, очевидно, $\tilde{y}_{t+1} \in R$. Из двух последних неравенств вытекает $\rho(y_t, \tilde{y}_t) \leqslant \delta_1 + \varepsilon$, так как ρ удовлетворяет неравенству треугольника.

Рассмотрим теперь отображение $F_n(z_0) = \{Z_0{}^n\}$ из E^n в $E^{n(n+1)}$, определенное и непрерывное на R относительно углового расстояния ρ. Выберем δ_1 и ε так, чтобы в $F_n(y_t)$ нашлась последовательность Y_t^{t+n}, удовлетворяющая условию $\rho(Y_t^{t+n}, \tilde{Y}_t^{t+n}) < \delta_2$. Очевидно, $y_{t+1} \in R$ и $\rho(x_{t+1}, y_{t+1}) \leqslant \rho(x_{t+1}, \tilde{y}_{t+1}) + \rho(\tilde{y}_{t+1}, y_{t+1}) \leqslant \varepsilon + \delta_2$. Выбор таких ε и δ_2, что $\varepsilon + \delta_2 = \delta$, завершает доказательство леммы.

Нам понадобиться вспомогательная теорема. Обозначим $S = \{x : x \geqslant 0\}$, $N = T - n$.

Теорема 1. *Пусть $X_0{}^T$ — траектория системы* (14), *а матрицы L_1 и L_2 удовлетворяют следующим условиям:* 1) *матрицы L_1 и L_2 квадратные порядка n, $L_2 \geqslant 0$ (либо $L_1 \geqslant 0$);* 2) *неймановские векторы $\bar{x}$ и $\bar{p}$ единственны и положительны;* 3) *среди корней уравнения $|\lambda L_1 - L_2| = 0$ на круге радиуса $|\lambda| = \alpha_0$ расположен лишь простой корень $\lambda = \alpha_0$. Тогда если $\bar{p}L_1x_n > 0$ и для некоторого достаточно малого $\eta > 0$ справедливо условие $\rho(x_N, S) < \eta$ для любого T, то по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется M, не зависящее от T, для которого $\rho(x_t, \bar{x}) > \varepsilon$ не более чем для M периодов.*

Доказательство. 1. Положим $L_1(\mu) = (1-\mu)L_1 + \mu C^{-1}$, $L_2(\mu) = (1-\mu)L_2 + \mu E$, $0 < \mu < 1$. Найдется такое μ_0, что при $\mu \leqslant \mu_0$ матрицы $L_1(\mu)$ и $L_2(\mu)$ — невырожденные. Так как E и C — невырожденные матрицы, доказательство повторяет обоснование второго следствия леммы 3. Рассмотрим траекторию $X_n{}^N(\mu)$ системы

$$L_1(\mu)x_t = L_2(\mu)x_{t-1}, \quad n \leqslant t \leqslant N. \tag{19}$$

Очевидно, при $x_n(\mu) = x_n$ справедливо $X_n{}^N(\mu) = X_n{}^N$. Отсюда следует, что $\alpha_0 L_1(\mu)\bar{x} = L_2(\mu)\bar{x}$ при $\mu \leqslant \mu_0$. Докажем теперь, что существует положительное решение p_μ системы $\alpha_0 pL_1(\mu) = pL_2(\mu)$. Система $\alpha_0 pL_1 - pL_2 = 0$, $pI = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ имеет единственное решение $\bar{p}$, т. е. в матрице $(\alpha_0 L_1 - L_2)$ можно выбрать $n-1$-й столбец так, что вместе со столбцом I они образуют невырожденную матрицу A, $\bar{p}A = e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$. Если в A заменить элементы $\alpha_0 L_1 - L_2$ элементами $\alpha_0 L_1(\mu) - L_2(\mu)$, то полученная матрица $A(\mu)$ невырожденна при достаточно малом μ, так как ее элементы непрерывны по μ. Положим $\tilde{p}_\mu = e_n A^{-1}(\mu)$. Вектор $\tilde{p}_\mu$ покомпонентно непрерывен по μ, следовательно, при достаточно малых μ он положителен. Возможен один из двух случаев: либо столбец, отброшенный при построении A в матрице $\alpha_0 L_1(\mu) - L_2(\mu)$, линейно зависит от остальных, либо нет. В первом случае $p_\mu = \tilde{p}_\mu$ решение системы $\alpha_0 pL_1(\mu) = pL_2(\mu)$. Второй случай невозможен, так как он противоречит разрешимости системы $\alpha_0 L_1(\mu)x = L_2(\mu)x$.

2. Положим $C_\mu = L_2(\mu)L_1^{-1}(\mu)$. Система (19) эквивалентна системе

$$w_t = C_\mu w_{t-1}, \quad n \leqslant t \leqslant N, \tag{20}$$

где $w_t = L_1(\mu)x_t$. Очевидно, $\bar{w}_\mu = L_1(\mu)\bar{x}$ и p_μ — собственные векторы (правый и левый) матрицы C_μ. Соответствующее им собственное значение равно α_0. Вектор $\bar{w}_\mu > 0$, так как $\bar{x} > 0$ и $L_2(\mu)$ — неотрицательная невырожденная матрица, $L_1(\mu)\bar{x} = \alpha_0{}^{-1}L_2(\mu)\bar{x}$. Покажем, что при достаточно малом μ $\bar{w}_\mu$ — единственный собственный вектор, соответствующий характеристическому корню $\lambda = \alpha_0$, т. е. геометрическая кратность корня $\lambda = \alpha_0$ равна единице. Пусть это неверно и при любом малом μ в E^n существует $w_\mu = \bar{w}_\mu$ — собственный вектор C_μ, соответствующий корню α_0. Тогда $x_\mu = L_1^{-1}(\mu) w_\mu$ — решение системы $\alpha_0 L_1(\mu) x = L_2(\mu) x$, $x_\mu = \bar{x}$. Положим $r = \min(l : x_\mu - l\bar{x} \leqslant 0)$ и $y_\mu = r\bar{x} - x_\mu / \|x_\mu - r\bar{x}\|$. Очевидно, y_μ — решение системы. Переходя к пределу при $\mu \to 0$, получим $\alpha_0 L_1 y_0 = L_2 y_0$, причем $y_0 \neq k\bar{x}$, $y_0 \geqslant 0$, что противоречит единственности неймановского вектора $\bar{x}$.

Установим еще два свойства спектра матрицы C_μ. Во-первых, α_0 — простой корень уравнения $|\lambda E - C_\mu| = 0$. Если это утверждение неверно, то, поскольку геометрическая кратность корня α_0 равна единице, найдется такой вектор $w_1 \neq \bar{w}_\mu$, что $C_\mu w_1 = \bar{w}_\mu + \alpha_0 w_1$. Умножая это равенство на p_μ слева, получим $p_\mu \bar{w}_\mu = 0$, что противоречит положительности векторов p_μ и $\bar{w}_\mu$. Во-вторых, при достаточно малых μ среди собственных значений C_μ нет комплексных, равных по модулю α_0. Предположим противное и обозначим $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha_0 e^{\pm i\varphi(\mu)}$ — пару сопряженных собственных значений. Из условия 3) теоремы следует, что $\lambda_i(\mu) \to \alpha_0$ при $\mu \to 0$, $i = 1, 2$. Это означает, что соответствующий корням $\lambda_{1,2}(\mu)$ сомножитель характеристического уравнения $(\lambda^2 - 2\alpha_0\lambda\cos\varphi(\mu) + \alpha_0^2)$ стремится к $(\lambda - \alpha_0)^2$, что противоречит тому же условию 3).

Для завершения доказательства остается применить незначительную модификацию леммы 7 из [4].

Аналогично может быть установлена следующая теорема.

Теорема 1′. *Пусть* P_0^{T-1} *— траектория системы* (18), *а матрицы* L_1 *и* L_2 *удовлетворяют условиям* 1)—3) *теоремы* 1. *Тогда, если* $p_N L_1 \bar{x} > 0$ *и для некоторого достаточно малого* $\eta > 0$ *справедливо условие* $\rho(p_n, S) < \eta$ *для любого* T, *то по любому заданному* $\varepsilon > 0$ *найдется* M, *не зависящее от* T, *для которого* $\rho(p_t, \bar{p}) > \varepsilon$ *не более чем для* M *периодов.*

Вернемся к изучению экономической динамики, описываемой системой (2) с целевой функций (8) или (9), удовлетворяющей условиям (10).

Теорема 2 (о магистрали). *Пусть* $\tilde{X}_0^T$ *— оптимальная траектория модели* (2), (8). *Если справедливы предположения* 1) — 4) *и* $x_0 > 0$, *то по произвольному* $\varepsilon > 0$ *найдется* M, *общее для всех оптимальных траекторий и не зависящее от* T, *такое, что* $\rho(x_t, \bar{x}) < \varepsilon$ *при* $M \leqslant t \leqslant T - M$.

Доказательство (следует плану [5]). 1 (теорема о магистрали в слабой форме). Из следствия 1 леммы 1 вытекает, что по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое M_1, что $\tilde{X}_t^{t+1} \notin L_\varepsilon(1)$ не более чем для M_1 периодов. При этом траектория $\tilde{X}_0^T$ распадается не более чем на $M_1 + 1$ отрезков, на каждом из которых $\tilde{X}_t^{t+1} \in L_\varepsilon(1)$ для всех t. Значение ε можно выбрать так, чтобы для каждого отрезка траектории $\tilde{X}_\tau^{\tau+l}$ и заданного $\delta > 0$ существовала последовательность $Y_\tau^{\tau+l}$, удовлетворяющая условиям (13) и $\rho(\tilde{x}_t, y_t) \leqslant \delta/2$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + l$. Можно считать, не уменьшая общности, что $\alpha_0 > 1$. Тогда из условия $x_0 > 0$ и близости траектории к неймановскому множеству следует, что $\bar{p}L_1\tilde{x}_t > \text{const} > 0$, т. е. при достаточно малом δ и $\bar{p}L_1 y_t > 0$ для $\tau \leqslant t \leqslant \tau + l$. Поскольку $\tilde{x}_t \geqslant 0$, то $\rho(y_t, S) \leqslant \eta$ для некоторого достаточно малого $\eta > 0$. Таким образом, последовательность $Y_\tau^{\tau+l}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, т. е. по заданному ε найдется такое M_2, что $\rho(y_t, \bar{x}) \leqslant \delta/2$ для всего отрезка траектории, исключая не более чем M_2 периодов. Объединяя оценки, получим, что условие $\rho(\tilde{x}_t, \bar{x}) \leqslant \delta$ может нарушаться не более чем для $(M_1 + 1)M_2$ периодов из T.

2. (теорема о магистрали в сильной форме). Пусть r и s — номера первого и последнего момента, когда $\rho(\tilde{x}_t, \bar{x}) \leqslant \delta$. Очевидно, $r \leqslant (M_1+1)M_2$, $s \geqslant T-(M_1+1)M_2$.

Так как $\left\|\frac{\tilde{x}_k}{\|\tilde{x}_k\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right\| \leqslant \delta$, $k=r, s$, то $\tilde{x}_k \geqslant \left(1-\frac{\delta}{a}\right)\frac{\|\tilde{x}_k\|}{\|\bar{x}\|}\bar{x}$, где $a = \min\limits_i \bar{x}^i$ при $\|\bar{x}\| = 1$. Аналогично можно получить, что $\bar{x} \geqslant \left(1-\frac{\delta}{a-\delta}\right) \times \frac{\|\bar{x}\|}{\|\tilde{x}_k\|}\tilde{x}_k$, $k=r,s$. Положим $\bar{x}_r = \left(1-\frac{\delta}{a}\right)\frac{\|\tilde{x}_r\|}{\|\bar{x}\|}\bar{x}$, $\bar{x}_{r+1} = \alpha_0\bar{x}_r, \ldots, \bar{x}_s = \alpha_0^{s-r}\bar{x}_r$. Тогда $\bar{x}_s = \alpha_0^{s-r}\left(1-\frac{\delta}{a}\right)\frac{\|\tilde{x}_r\|}{\|\bar{x}\|}\bar{x} \geqslant \alpha_0^{s-r}\left(1-\frac{\delta}{a}\right)\left(1-\frac{\delta}{a-\delta}\right)\frac{\|\tilde{x}_r\|}{\|\tilde{x}_s\|}\tilde{x}_s = \bar{\bar{x}}_s$.

Пусть $s < T$. Последовательность $x_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{x}_s, \bar{\bar{x}}_{s+1}, \ldots, \bar{\bar{x}}_T$, где $L_1\bar{\bar{x}}_{s+k} \leqslant L_2\bar{\bar{x}}_{s+k-1}$, $k=1, \ldots, T-s$, $\bar{\bar{x}}_{s+k} \geqslant 0$, является траекторией (2), поскольку $L_2 \geqslant 0$. Так как $\tilde{X}_0{}^T$ — оптимальная траектория, а векторы $\bar{\bar{x}}_s$ и $\tilde{x}_s$ коллинеарны, то $\bar{\bar{x}}_s \leqslant \tilde{x}_s$. Очевидно,

$$\bar{p}L_1\tilde{x}_s = \alpha_0^{s-r}\prod_{t=r+1}^{s}(1-\delta_t)\bar{p}L_2\tilde{x}_r, \quad \bar{p}L_1\bar{\bar{x}}_s \geqslant \alpha_0^{s-r}\left(1-\frac{\delta}{a}\right)^2\left(1-\frac{\delta}{a-\delta}\right)^2\bar{p}L_2\tilde{x}_r.$$

Поэтому $\prod\limits_{t=r+1}^{s}(1-\delta_t) \geqslant \left(1-\frac{\delta}{a}\right)^2\left(1-\frac{\delta}{a-\delta}\right)^2$.

Из неравенства (6) (при $m=1$) следует возможность по заданному ε выбирать δ таким, чтобы $\tilde{X}_t^{t+1} \in L_\varepsilon(1)$ для всех $t \in r, \ldots, s$. Применяя к отрезку траектории $\tilde{X}_r{}^s$ рассуждения первого пункта доказательства и полагая $M = (M_1+2)M_2$, завершим доказательство.

Теорема 3. (о магистрали). *Пусть $\tilde{X}_0{}^T$ оптимальная траектория модели (2), (9) и справедливы условия теоремы 2. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое M, общее для всех оптимальных траекторий, что для любого t_0 и достаточно большого T справедливо $\rho(\tilde{x}_t, \bar{x}) < \varepsilon$ для $M \leqslant t \leqslant t_0 - M$.*

Доказательство. Примем $\alpha_0 > 1$. Тогда доказательство повторяет доказательство теоремы 2, исключая один пункт. Установим, что $\bar{\bar{x}}_s \leqslant \tilde{x}_s$. Если это неверно, то учитывая их коллинеарность, можно найти такое $\rho < 1$, что $\tilde{x}_s < \rho\bar{\bar{x}}_s$. Наряду с $\tilde{X}_0{}^T$ рассмотрим траекторию $x_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{x}_s, \bar{\bar{x}}_{s+1}, \ldots, \bar{\bar{x}}_T$. Если T достаточно велико, то с помощью рассуждений, приведенных в доказательстве следствия 2 леммы 1, придем к противоречию. Дальнейшее снова повторяет доказательство теоремы 2.

Проанализируем теперь поведение последовательности векторов цен p_0^{T-1} задачи, двойственной к (2), (8), т. е. $p_0L_2x_0 \to \min$ при $p_{t-1}L_1 \geqslant p_tL_2$, $t=1,\ldots, T-2$, $p_{T-1}L_1 \geqslant c$. Вектор $\bar{x} > 0$, поэтому условие $\rho(\tilde{x}_t, \bar{x}) < \varepsilon$ влечет положительность $\tilde{x}_t$ при достаточно малом ε. Положительность компонент решения (2), (8) в соответствии с теоремой двойственности гарантирует выполнение равенств в двойственной системе (3). Итак, для $M \leqslant t \leqslant T-M$ имеют место равенства $p_{t-1}L_1 = p_tL_2$. Условия 1—3 теоремы 1, очевидно, выполняются и также очевидно, $\rho(p_t, S) = 0$. Чтобы применить теорему 1′, остается доказать, что $p_tL_1\bar{x} > 0$. Но $p_tL_1\bar{x} \leqslant \alpha_0p_{t-1}L_1\bar{x}$, $p_{T-1}L_1 \geqslant c$, т. е. $p_{T-1}L_1\bar{x} \geqslant c\bar{x} > 0$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть* $\tilde{P}_0^{T-1}$ — *оптимальная траектория задачи, двойственной к* (2), (8). *Если справедливы условия* 1) — 4), *то по заданному* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* M, *общее для всех оптимальных траекторий и не зависящее от* T, *что* $\rho(\tilde{p}_t, \bar{p}) < \varepsilon$ *для* $t \in M, \ldots, T - M$.

Заметим, что $\bar{p} > 0$. Поэтому из теоремы 4 следует, что для оптимальной траектории $\tilde{X}_0^T$ (2) выполняются как равенства на всей траектории, исключая не более чем M периодов, где M не зависит от T. Это замечание и аналогичное, относящееся к двойственной задаче, являются теоремами о магистрали (прямой и двойственной) в сильнейшей форме [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Белкин. Цены единого уровня и экономические измерения на их основе. М., Экономиздат, 1963.
2. С. М. Мовшович, Б. Г. Питтель. Магистральные свойства моделей замкнутой экономики и динамических процессов принятия решений. Экономика и матем. методы, 1970, т. VI, вып. 2.
3. М. Н. Ефимов, С. М. Мовшович. Модель сбалансированного роста. Равновесные народнохозяйственные пропорции и цены. В Сб. Первая конференция по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. Вып. 1. М., 1971 (ЦЭМИ АН СССР).
4. L. W. McKenzie. Turnpike Theorems for a Generalized Leontief Model. Econometrica, 1963, v. 31.
5. I. Tsukui. Turnpike Theorem in a Generalized Dynamic Input — Output Sistem. Econometrica, 1966, v. 34.
6. С. М. Мовшович. Теоремы о магистрали в моделях Неймана — Гейла. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 6.
7. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1954.
8. В. Л. Макаров. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики. Сиб. матем. ж., 1966, т. VII, № 4.

Поступила в редакцию
25 I 1971