ЭКОНОМИКА 1972
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том VIII, вып. 2

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ НЕКОТОРОГО СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. К. КЕЛЬМАНС

*(Москва)*

Задача определения собственных значений матриц общеизвестна. Она состоит в отыскании всех таких чисел $\lambda_i$, для которых $|A-\lambda_i E|=0$, где $A$ — квадратная матрица с действительными элементами, $E$ — единичная матрица. В настоящей работе выделяется класс матриц, для которых указанная задача существенно упрощается. Полученные здесь результаты являются обобщением результатов [1] и кратко изложены в [2].

Рассмотрим множество квадратных матриц с действительными элементами и определим на этом множестве следующие операции.

1. Пусть $D_s = sdE - \|d\|$, где $d$ — некоторое действительное число, $\|d\|$ — квадратная матрица порядка $s$.

Назовем матрицу $\bar{A}^d$ $d$-дополнительной к матрице $A$ порядка $s$, если $\bar{A}^d = D_s - A$.

2. Пусть даны квадратные матрицы $A_1$ и $A_2$ порядка $s_1$ и $s_2$ соответственно. Определим операцию $d$ следующим образом

$$A_1\,dA_2 = \left|\begin{array}{c|c} A_1 + s_2 dE_1 & -d \\ \hline -d & A_2 + s_1 dE_2 \end{array}\right|.$$

Операция $d$, очевидно, ассоциативна, но некоммутативна. Если $c \neq d$, то операции $c$ и $d$ недистрибутивны, т. е.

$$(A_1dA_2)\,cA_3 \neq (A_1cA_3)\,d\,(A_2cA_3).$$

Будем говорить, что матрицы $A_1$ и $A_2$ сильно подобны и писать $A_1 \sim A_2$, если одну из них можно получить из другой перестановкой строк и соответствующих столбцов. Среди классов сильно подобных матриц операция $d$ коммутативна.

Если матрица $A$ представима в виде $A \sim A_1dA_2$, то будем говорить, что матрица $A$ $d$-разложима, в противном случае — $d$-неразложима.

**Теорема 1.** *Пусть $A_1$ и $A_2$ — квадратные матрицы. Тогда*

$$\overline{A_1dA_2}^d = \bar{A}_1^d 0 \bar{A}_2^d. \tag{1}$$

Доказательство. $\overline{A_1dA_2}^d = (s_1+s_2)\,dE - \|d\| - A_1dA_2 =$

$$= \left|\begin{array}{c|c} s_1\,dE_1 - \|d\|_1 - A_1 & 0 \\ \hline 0 & s_2\,dE_2 - \|d\|_2 - A_2 \end{array}\right| = [s_1\,dE_1 - \|d\|_1 - A_1]\,0\,[s_2\,dE_2 - \|d\|_2 - A_2] = \bar{A}_1^d 0 \bar{A}_2^d,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $M$ — такое множество квадратных матриц с действительными элементами, что

$$A = \|\alpha_{ij}\| \in M, \quad \text{если} \quad \sum_{j=1} \alpha_{ij} = 0, \tag{2}$$

где $s$ — порядок матрицы $A$. Очевидно, если $A, A_1, A_2 \in M$, то $\bar{A}^d \in M$, $A_1 d A_2 \in M$, и наоборот, если $A \in M$ и $A = A_1 d A_2$, то $A_1 \in M$ и $A_2 \in M$.

Пусть

$$B_\lambda^s(A) = \frac{1}{\lambda}|A + \lambda E|. \tag{3}$$

Для $A \in M$ $|A| = 0$ и $B_\lambda^s(A)$ — многочлен степени $(s-1)$, где $s$ — порядок матрицы $A$. Очевидно, $B_\lambda^s(A) = P(-\lambda)/\lambda$, где $P(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы $A$.

**Теорема 2.** *Пусть* $A, A_1, A_2 \in M$. *Тогда*

$$1.\ B_\lambda^s(\bar{A}^d) = (-1)^{s-1} B^s_{-(\lambda+sd)}(A), \tag{4}$$

$$2.\ B_\lambda^{s_1+s_2}(A_1 d A_2) = (\lambda + s_1 d + s_2 d) B^{s_1}_{\lambda+s_2 d}(A_1) B^{s_2}_{\lambda+s_1 d}(A_2). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $A = \|\alpha_{ij}\|$, $\bar{A}^d = \|\bar{\alpha}_{ij}\|$. Так как $A + \bar{A}^d = D_s$, то

$$\begin{gathered}\alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ij} = -d, \quad i \neq j, \\ \alpha_{ii} + \bar{\alpha}_{ii} = (s-1)d.\end{gathered} \tag{6}$$

$B_\lambda^s(A)$ — определитель матрицы $\|\beta_{ij}\|$, где

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ \alpha_{ii} + \lambda, & i = j \neq 1, \\ \alpha_{ij}, & i \neq 1,\ i \neq j, \\ & i, j = 1, 2, \ldots, s. \end{cases} \tag{7}$$

Из (6) и (7)

$$\beta_{ii} + \bar{\beta}_{ii} = (s-1)d + 2\lambda, \ i \neq 1, \tag{8}$$

$$\beta_{ij} + \bar{\beta}_{ij} = -d, \ i \neq j, \ i \neq 1. \tag{9}$$

Запишем матрицу $\|\bar{\beta}_{ij}\|$ условно в виде

$$\|\bar{\beta}_{ij}\| = \begin{bmatrix} & 1 & \\ \underset{i\neq j,\ i\neq 1}{\bar{\beta}_{ij}}, & & \bar{\beta}_{ii} \end{bmatrix},$$

где 1 означает, что первая строка матрицы состоит из единиц. Тогда

$$B^s_\lambda(\bar{A}^d) = \begin{vmatrix} & 1 & \\ \underset{i\neq j,\ i\neq 1}{\bar{\beta}_{ij}}, & & \bar{\beta}_{ii} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & \\ \underset{i\neq j,\ i\neq 1}{\bar{\beta}_{ij} + d}, & & \bar{\beta}_{ii} + d \end{vmatrix}.$$

Пользуясь (7) — (9), получим

$$B_\lambda^s(\bar{A}^d) = \begin{vmatrix} & 1 \\ -\beta_{ij}, & sd - \beta_{ii} + 2\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{s-1} \begin{vmatrix} & 1 \\ \alpha_{ij}, & \alpha_{ii} - \lambda - sd \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{s-1} B^s_{-(\lambda+sd)}(A).$$

Легко видеть, что

$$B_\lambda^{s_1+s_2}(A_1 \circ A_2) = \lambda B_\lambda^{s_1}(A_1) B_\lambda^{s_2}(A_2). \tag{10}$$

Воспользуемся теперь (1), (4) и (10)

$$B_\lambda \quad (A_1 d A_2) = B_\lambda^{s_1+s_2}(\overline{\bar{A}_1^d \circ \bar{A}_2^d}^d) = (-1)^{s-1} B_{-(\lambda+sd)}^{s}(\bar{A}_1^d \circ \bar{A}_2^d) =$$

$$= (-1)^s(\lambda + sd) B_{-(\lambda+sd)}^{s_1}(\bar{A}_1^d) B_{-(\lambda+sd)}^{s_2}(\bar{A}_2^d) =$$

$$= (-1)^s(\lambda + sd)(-1)^{s_1-1} B_{-(s_1 d - sd - \lambda)}^{s_1}(A_1)(-1)^{s_2-1} B_{-(s_2 d - sd - \lambda)}^{s_2}(A_2) =$$

$$= (\lambda + sd) B_{(\lambda+s_2 d)}^{s_1}(A_1) B_{(\lambda+s_1 d)}^{s_2}(A_2), \text{ где } s = s_1 + s_2.$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Для симметричных матриц можно предложить более наглядное доказательство (4) теоремы 2.

Для всякого собственного вектора $X_0$ симметричной матрицы $A$ порядка $s$ существует система ($X_0, X_1, \ldots, X_{s-1}$ взаимноортогональных собственных векторов, т. е. $(X_i, X_j) = 0$ для $i \neq j$ и $i, j = 0, 1, \ldots, s-1$. Соответствующие собственные значения обозначим через $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}$. Очевидно, $\lambda_0 = 0$ — собственное значение матрицы $A$ из $M$, а вектор $X_0 \neq 0$, все координаты которого равны одному и тому же числу,— собственный вектор матрицы $A$. Если $A \in M$, то $\bar{A}^d \in M$, поэтому $AX_0 = \bar{A}^d X_0 = \lambda_0 X_0 = 0$.

Кроме того, из сказанного следует, что $(X_0, X_k) = 0$, значит $\|d\| X_k = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, s-1$. Поэтому

$$\bar{A}^d X_k = sdEX_k - \|d\| X_k - AX_k = (sd - \lambda_k) X_k.$$

Таким образом, вектор $X_k$, $k \neq 0$ является собственным вектором матрицы $\bar{A}^d$ с собственным значением $sd - \lambda_k$. Иначе говоря, применение к матрице $A$ из $M$ операции $d$-дополнения меняет ее собственные числа с $\lambda_k$ на $sd - \lambda_k$, кроме одного собственного числа $\lambda_0 = 0$, которое остается неизменным. Легко видеть, что это утверждение эквивалентно (4).

Рассмотрим еще одну операцию над матрицами, более общую, чем операция $d$. Пусть $A_1 = \|a_{ij}^1\|$, $A_2 = \|a_{ij}^2\|$ — квадратные матрицы порядка $s_1$ и $s_2$ соответственно. Пусть $T = \|t_{ik}\|$ — прямоугольная матрица размеров $s_1 \times s_2$, все строки которой одинаковы: $t_{ik} = t_{jk} = t_k$, $i, j = 1, 2, \ldots, s_1$, $k = 1, 2, \ldots, s_2$. Определим операцию $T$

$$A_1 T A_2 = \left|\begin{array}{c|c} A_1 - \left(\sum\limits_{k=1}^{s_2} t_k\right) E_1 & T \\ \hline T' & \alpha_{kk}^{(2)} - s_1 t_k,\ \underset{k \neq l}{\alpha_{kl}^{(2)}}, \end{array}\right|. \tag{11}$$

Очевидно, если $A_1, A_2 \in M$, то $A_1 T A_2 \in M$. Имеет место следующая

**Теорема 3.** *Пусть* $A_1, A_2 \in M$. *Тогда, если* $B_{\lambda_0}^{s_1}(A_1) = 0$, *то* $B_{\lambda_0^{s} + \sum_{k=1}^{s_2} t_k}(A) = 0$.

Доказательство. Согласно (2) и (3)

$$B_\lambda^s(A) = \frac{1}{\lambda} |A + \lambda E| = \left|\begin{matrix} 1 \\ \underset{\neq 1,}{\alpha_{ii} + \lambda}\ ,\ \underset{i,j=1,\ldots,s}{\alpha_{ij}} \end{matrix}\right|. \tag{12}$$

Из (11) и из последнего соотношения следует, что на пересечении первых $s_1$ строк и столбцов матрицы (12) стоит матрица

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{ii}^1 + \lambda - \sum_{k=1}^{s_2} t_k, \ \alpha_{ij}^1, \\ i \neq 1, \ i, j = 1, 2, \ldots, s_1 \end{bmatrix},$$

определитель которой, согласно (12), равен

$$|R| = B^{s_1}_{\lambda - \sum\limits_{k=1}^{s_2} t_k}(A_1).$$

Рассмотрим произвольную квадратную подматрицу $C$ матрицы (12), расположенную на пересечении первых $s_1$ столбцов и произвольных $s_1$ строк. Если $C$ имеет две или более общие строки с матрицей $T'$, то определитель ее равен 0, так как каждая строка матрицы $T'$ состоит из одинаковых элементов. По этой же причине определитель $C$ равен 0, если она пересекается первой (единичной) строкой матрицы (12) и содержит хотя бы одну строку матрицы $T'$.

Пусть теперь $C$ не пересекается единичной строкой и содержит ровно одну строку (например, строку с номером $k$) матрицы $T'$. Тогда

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{ii}^1 + \lambda - \sum_{k=1}^{s_2} t_k, \ \alpha_{ij}^1, \\ i \neq 1, \ i = j = 1, 2, \ldots, s_1, \\ t_k \end{bmatrix},$$

где $t_k$ означает, что последняя строка $C$ равна $(t_k, t_k, \ldots, t_k)$. Из этого соотношения

$$|C| = (-1)^{s_1-1} t_k \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha_{ii}^1 + \lambda - \sum_{k=1}^{s_2} t_k, \ \alpha_{ij}^1 \\ i \neq 1, \ i, j = 1, 2, \ldots, s_1 \end{vmatrix} = (-1)^{s_1-1} t_k B^{s_1}_{\lambda - \sum\limits_{k=1}^{s_2} t_k}(A_1).$$

Если $t_k = 0$, то $|C| = 0$, если $t_k \neq 0$, то $|C|$ так же, как и $|R|$, обращается в 0 лишь в случае $\lambda = \lambda_0 + \sum\limits_{k=1}^{s_2} t_k$ и $B_{\lambda_0}{}^{s_1}(A_1) = 0$.

Таким образом, при $\lambda = \lambda_0 + \sum\limits_{k=1}^{s_2} t_k$ все миноры матрицы (12), расположенные в первых $s_1$ столбцах, равны 0, и значит $B^{s}_{\lambda_0 + \sum\limits_{k=1}^{s_2} t_k}(A) = 0$, что и требовалось доказать.

Введем понятие изображающего дерева матрицы.

1. Если для матрицы $A$ не существует таких $d$, $A_1$, $A_2$, что $A \sim A_1 d A_2$, то поставим ей в соответствие в качестве изображающего дерева прадерево с одной единственной вершиной.

2. Пусть для некоторого $d$ матрица $A$ представима в виде $A \sim A_1 d \cdot A_2 d \ldots d A_k$ и матрицы $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $d$-неразложимы. Пусть $\Pi_1$, $\Pi_2, \ldots, \Pi_k$ — изображающие деревья матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k$ соответствен-

но. Тогда если $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — корневые вершины прадеревьев $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ соответственно и $v_0 \notin \Pi_i$, $i = 1, \ldots, k$, то поставим в соответствие матрице $A$ в качестве изображающего дерева прадерево $\Pi$ с корнем $v_0$ и такое, что из $v_0$ исходят дуги $(v_0, v_1)$, $(v_0, v_2), \ldots, (v_0, v_k)$. При этом дуге $(v_0, v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, припишем величину $d$. Можно показать, что каждому классу сильно подобных матриц ставится в соответствие одно и только одно с точностью до изоморфизма изображающее дерево.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_3$ | $d_2$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $d_3$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $d_4$ | $a_5$ | $a_5$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_5$ | $d_5$ | $a_5$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_5$ | $a_5$ | $d_6$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_5$ | $a_5$ | $a_5$ | $d_7$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_4$ | $a_4$ | $a_4$ | $a_4$ | $d_8$ | $a_1$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $d_9$ | $a_6$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_6$ | $d_{10}$ |

Пусть вершине $z \in V$ ($V$ — множество всех вершин изображающего дерева $\Pi$ матрицы $A$) соответствует матрица $A_{\alpha_z}$ порядка $\alpha_z$. Пусть $i(z)$ — величина, приписанная дуге (дерева $\Pi$), заходящей в $z$, а $o(z)$ — величина, приписанная какой-либо дуге, выходящей из $z$. Согласно определению изображающего дерева всем дугам, выходящим из одной вершины, приписывается одна и та же величина. Припишем вершине $z$ величину $\beta_z = \sum\limits_{v \in \mu_z} \alpha_v [o(v) - i(v)]$, где $\mu_z$ — путь, соединяющий корневую вершину $v_0$ с вершиной $z$. Пусть $d_z$ — число дуг в $\Pi$, исходящих из вершины $z$. Если $z$ — невисячая вершина $\Pi$, то припишем ей функцию $\varphi_z(\lambda) = (\lambda + \beta_z)^{d_z - 1}$.

Пусть $z$ — висячая вершина. Тогда, если $\alpha_z > 1$, то припишем вершине $z$ функцию $\varphi_z(\lambda) = B^{\alpha_z}_{\lambda + \beta_x - \alpha_z i(z)}(A_{\alpha_z})$, где $x$ — вершина дерева, из которой исходит дуга в $z$. Наконец, если $\alpha_z = 1$, то положим $\varphi_z(\lambda) \equiv 1$. Из (5) легко получается следующая

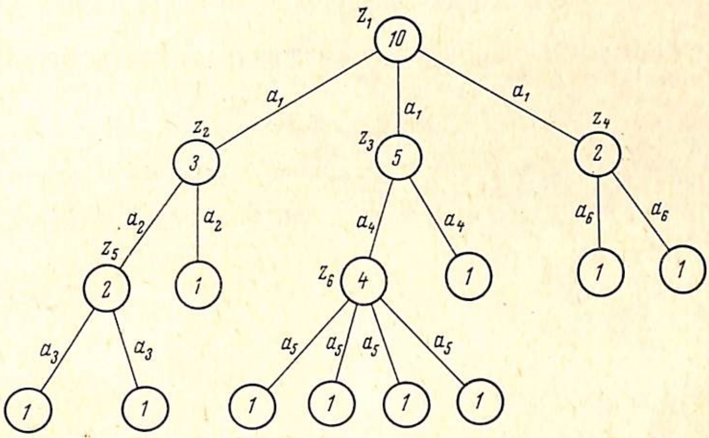
**Теорема 4.** *Для $B_\lambda^s$-функции матрицы $A \in M$ порядка $s$ справедливо соотношение* $B_\lambda^s(A) = \prod\limits_{z \in V} \varphi_z(\lambda)$.

Следствие 1. Величина $\beta_z$ всякой невисячей вершины $z$ изображающего дерева матрицы $A$ является собственным значением матрицы $A$, причем это собственное значение следует взять с кратностью, равной числу дуг, исходящих из вершины $z$, без 1.

Следствие 2. Пусть матрица $A$ разложима на единичные матрицы, т. е. всем висячим вершинам изображающего дерева $\Pi(A)$ соответствуют матрицы первого порядка. Тогда

$$B_\lambda^s(A) = \prod_{z\in V}\Big\{\lambda + \sum_{v\in\mu_z} a_v[o(v)-i(v)]\Big\}^{d_z-1}.$$

Рассмотрим пример определения собственных значений матрицы указанного вида с помощью изображающего дерева.




**Вершинам $z_1 - z_6$ соответствуют:**

$$\varphi_{z_1}(\lambda) = (\lambda + 10a_1)^2;\quad \varphi_{z_2}(\lambda) = (\lambda + 10a_1 - 3a_1 + 3a_2);$$
$$\varphi_{z_3}(\lambda) = (\lambda + 10a_1 - 5a_1 + 5a_4);\quad \varphi_{z_4} = (\lambda + 10a_1 - 2a_1 + 2a_6);$$
$$\varphi_{z_5}(\lambda) = (\lambda + 10a_1 - 3a_1 + 3a_2 - 2a_2 + 2a_3);$$
$$\varphi_{z_6}(\lambda) = (\lambda + 10a_1 - 5a_1 + 5a_4 - 4a_4 + 4a_5)^3.$$

Пусть матрица $-A$ имеет вид, изображенный в таблице; диагональный элемент $d_i$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, равен сумме всех остальных элементов $i$-й строки с обратным знаком. Согласно определению операции $d$ матрица $A$ представима в виде

$$A = [(\delta a_3\delta)a_2\delta]a_1[(\delta a_5\delta a_5\delta a_5\delta)a_4\delta]a_1(\delta a_6\delta), \text{ где } \delta = \boxed{0}.$$

Изображающее дерево матрицы $A$ показано на рисунке. Числа в вершинах $z$ означают порядки $\alpha_z$ соответствующих матриц $A_{\alpha_z}$.

Таким образом, теорема 4 дает простой способ определения некоторых, а иногда и всех собственных значений разложимой матрицы $A \in M$. В связи с этим необходимо иметь способ, который позволял бы определить для каждой матрицы, разложима ли эта матрица, и если да, то каково ее разложение (как отмечалось ранее, такое разложение единственно).

Пусть некоторый элемент матрицы $A$ равен $d$. Построим из $A$ матрицу $A^*$ заменой всех недиагональных элементов, равных $d$, на 0, а всех остальных элементов — на 1. Пусть $G_d(A)$ — граф с матрицей смежности $A^*$. Очевидно матрица $A$ $d$-разложима тогда и только тогда, когда граф $G_d(A)$ как неориентированный является несвязным, и компоненты связности его соответствуют $d$-неразложимым матрицам, из которых может быть построена матрица $A$ с помощью операции $d$.

Таким образом, задача о $d$-разложимости матрицы сводится к задаче определения компонент связности графа $G_d(A)$. Поэтому можно предложить следующую процедуру разложения матрицы.

1. Для некоторого элемента $d$ матрицы $A$ с помощью графа $G_d(A)$ выясняем, является ли матрица $A$ $d$-разложимой.

2. Если матрица $A$ $d$-неразложима, то выбираем некоторый другой элемент $c \neq d$ матрицы $A$ и возвращаемся к п. 1, заменив в нем $d$ на $c$.

3. Если матрица $A$ $d$-разложима и $A \sim A_1 dA_2 d, \ldots, dA_k$, то для каждой матрицы $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, перейдем к п. 1, заменив в нем $A$ на $A_i$ и $d$ на некоторый элемент $e \neq d$ матрицы $A_i$.

В заключение заметим, что все результаты, связанные с (2), могут быть распространены на матрицы, которые удовлетворяют вместо (2) условию $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c$, где $c$ — произвольное число, так что указанный в работе метод окажется применимым, например, к разложимым стохастическим матрицам.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Кельманс. О числе деревьев графа. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 12; 1966, т. 27, № 2.
2. А. К. Кельманс. Вопросы анализа и синтеза случайных графов. Канд. дисс., М., 1967.

Поступила в редакцию
18 XI 1969