ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1971
том VII, вып. 3

ОРГАНИЗАЦИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. И. ВАРШАВСКИЙ

(Ленинград)

Существует довольно широкий круг задач управления экономическими и производственными системами, для реализации которых требуется решать задачи нелинейного программирования. Аналитическое решение задачи предполагает априорное знание функциональных зависимостей, описывающих объект управления. Однако в ряде случаев такие зависимости неизвестны, а известны лишь текущие значения параметров объекта. Тогда речь может идти только об оперативном управлении, т. е. о реализации итеративных процедур, обеспечивающих сходимость к оптимуму. Таким образом, градиентные и итеративные методы решения задач являются основой реализации соответствующих процессов оперативного управления. Задачи реального управления, как правило, являются задачами на условный экстремум, т. е. задачами нахождения экстремума при наличии ограничений. Отличие процедур, реализуемых при управлении, от стандартных градиентных и итеративных методов решения задач на условный экстремум заключается в том, что в процессе управления не допускается нарушение ограничений, что вполне допустимо в процессе аналитического решения задачи. В [1] впервые обращено внимание на то, что градиентный метод можно рассматривать как децентрализованный механизм, обеспечивающий оптимальное распределение ограниченных ресурсов *. Организация коллективного поведения потребителей ресурса, обеспечивающего максимизацию суммарного эффекта, рассматривалась в [3, 4], где поведение основывалось на реализации процедуры, близкой к проективному градиентному методу для отыскания седловой точки функции Лагранжа.

В настоящей статье рассмотрим некоторую модификацию этого подхода для более широкого класса задач нелинейного программирования.

Пусть имеется k потребителей ресурса с локальными функциями выпуска $\varphi_j(x_j)$, где x_j — количество ресурса, использованное j-м потребителем, и $\varphi_j(x_j)$ соизмеримы, т. е. выражены в одинаковых единицах. Распределение ресурса между потребителями ограничено условием

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) \leqslant 0. \tag{1}$$

Требуется найти распределение ресурса между потребителями, обеспечивающее $\max \Sigma\varphi_j(x_j)$ при выполнении (1).

В случае, если $\varphi_j(x_j)$ — вогнутые функции и функция $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$ — возрастающая по x_j, оптимальное распределение определяется решением системы уравнений

$$\frac{d\varphi_j(x_j)}{dx_j} = \lambda \frac{\partial\Phi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_j}, \qquad (2)$$
$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

и решение этой системы единственно.

* К сожалению, работа [1] известна автору только по ссылкам в [2].

При выполнении ряда условий [2] система (2) может быть решена градиентным методом

$$\dot{x}_j = \frac{d\varphi_j(x_j)}{dx_j} - \lambda \frac{\partial \Phi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_j}, \tag{3}$$

$$\dot{\lambda} = \Phi(x_1, \ldots, x_k).$$

Обозначим через x_j^* и λ^* решение системы (2) и

$$\lambda \frac{\partial \Phi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_j} = \lambda_j. \tag{4}$$

Известно, что множитель Лагранжа λ может быть интерпретирован как цена на ресурс. Если известны значения λ_j^*, которые будем интерпретировать как локальные цены, то нетрудно видеть, что для организации децентрализованного поведения достаточно, чтобы каждый потребитель максимизировал свой «чистый доход», т. е. величину

$$\varphi_j(x_j) - \lambda_j^* x_j. \tag{5}$$

На этом соображении основана организация коллективного поведения в [3, 4] для случая линейных ограничений. В указанной модели $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \Sigma x_j - R$ и, следовательно, $\lambda_j = \lambda$. Тогда каждый потребитель посылает в центральное устройство запрос на потребное ему количество ресурса. Последовательность запросов вырабатывается так, чтобы максимизировать локальную функцию пользы. Центральное устройство вырабатывает значение λ по разности между спросом и наличным количеством ресурса и сообщает значение потребителям. Кроме того, центральное устройство распределяет ресурс на основе запросов так, чтобы при этом не нарушалось ограничение.

Рассмотрим возможность исключения необходимости выработки цены на ресурс в центральном устройстве. Пусть система организована следующим образом. В каждый момент времени потребитель посылает в центральное устройство некоторую «сумму денег» y_j, на которую он хочет приобрести ресурс. Если x_j — количество полученного при этом ресурса, то очевидно, локальная цена

$$\lambda_j = y_j / x_j. \tag{6}$$

Теперь локальная цена легко восстанавливается у потребителя и в задачу центрального устройства входит лишь распределение ресурса на основании поступивших «денежных сумм». Пусть каждый потребитель стремится к максимизации локальной функции пользы (5), т. е. выбирает y_j таким образом, чтобы производная от локальной функции выпуска $\varphi_j(x_j)$ была бы равна локальной цене. Найдем способ распределения ресурса центральным устройством, обеспечивающий $\max \Sigma\varphi_j(x_j)$. Пусть ресурс распределяется на основании поступивших в центральное устройство значений y_j

$$x_j = \alpha \frac{y_j}{\Sigma y_i} \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial \Phi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_j}}, \tag{7}$$

где α определяется из условия $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = 0$. Нетрудно видеть, что решение системы

$$\frac{d\varphi_j(x_j)}{dx_j} - y_j/x_j = 0 \tag{8}$$

с учетом (7) при $\Sigma y_i^* / \alpha = \lambda^*$ совпадает с решением системы (2).

Из сказанного вытекает способ локального поведения — каждый потребитель должен выбирать y_j в соответствии с правилами

$$y_j(t+1) = y_j(t) + \gamma\left[\frac{\varphi_j[x_j(t)] - \varphi_j[x_j(t-1)]}{x_j(t) - x_j(t-1)} - \frac{y_j(t)}{x_j(t)}\right]. \qquad (9)$$

Естественно возникает вопрос об условиях, при которых система разностных уравнений (9) является устойчивой. В связи со значительными аналитическими трудностями этот вопрос нами не исследован. Однако экспериментальное решение ряда задач на ЭВМ показывает, что при разумном выборе коэффициента γ решение системы (9) сходится с удовлетворительной скоростью. Еще раз заметим, что результаты экспериментов говорят только о том, что существуют случаи, в которых система (9) устойчива.

Значительные трудности могут возникнуть при реализации способа распределения (7). Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \Sigma a_i x_i^2 - 1$. Тогда нетрудно видеть, что

$$x_j = \sqrt{\frac{y_j}{a_j \sum_1^k y_j}} \qquad (10)$$

— распределение ресурса в центральном устройстве не связано с какими-либо трудностями.

2. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_1^k a_j \ln x_j - в$. Подобные ограничения часто возникают при оптимизации технологических процессов, например, процессов резания металлов, в связи с принятыми эмпирическими зависимостями, описывающими процесс. В этом случае

$$\frac{\partial \Phi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_j} = \frac{a_j}{x_j}, \qquad (11)$$

и система (7) теряет смысл.

Для рассматриваемого случая локальная цена $\lambda_j = \lambda(a_j / x_j)$. Возникшая здесь трудность может быть преодолена изменением правил локального поведения, т. е. заменой (6) на $\lambda_j = \lambda_j / x_j^2$. Тогда

$$x_j = (\alpha y_j) / a_j, \qquad (12)$$

где $\alpha = \exp((\Sigma a_j \ln a_j + b - \Sigma a_j \ln y_j) / \Sigma a_i)$.

В случаях, когда решение системы (7) сопряжено с вычислительными трудностями, эти трудности могут быть преодолены либо заменой в левой части (7) x_j на монотонно возрастающую функцию от x_j и соответствующим изменением правил локального поведения (как это сделано в последнем примере), либо использованием на каждом шаге значения частных производных в предыдущий момент времени.

В заключение отметим, что целью настоящей статьи было желание привлечь внимание к возможности организации коллективного поведения описанным выше способом. Метод решения задачи сходится на ряде примеров, однако общие вопросы сходимости совершенно не изучены и требуют своего решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Samuelson. Market Mechanisms and Maximizations, P-69, RAND Corporation. March 28, 1949.
2. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. V. I. Varshavsky. Collective Behaviour and Control Problems, Machine Intelligence. 3 ed. D. Michie, Edinburgh Univ. Press, 1968.
4. В. И. Варшавский, М. В. Мелешина, В. Т. Перекрест. Использование модели коллективного поведения в задаче распределения ресурсов. Автоматика и телемеханика, 1969, № 7.

Поступила в редакцию
15 XII 1969