ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 53–74

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ВОПРОСАХ АНАЛИЗА ГРУЗОПОТОКОВ[1]

Л.В. Канторович, М.К. Гаврин

Предметом данной статьи является изложение новых, более совершенных и универсальных методов решения некоторых вопросов математического характера, связанных с рационализацией грузопотоков. Несмотря на большую работу, проведенную работниками железнодорожного транспорта по ликвидации нерациональных перевозок, проблема рационализации грузопотоков продолжает оставаться актуальной.

В одних случаях (встречные перевозки) возможности уменьшения затрат на транспорт видны непосредственно, в других случаях возможность уменьшения затрат связана с довольно сложным и сразу неочевидным перемещением грузопотоков, а потому может остаться незамеченной и неиспользованной.

Первая задача (задача А), которая рассматривается ниже, – организация наиболее рациональной перевозки однородного груза от пунктов производства к пунктам потребления. При этом объемы производства и потребления в каждом пункте считают заданными; также заданы затраты, связанные с передвижением вагона груза из одного пункта в другой. Требуется узнать, как следует прикрепить пункты потребления к пунктам производства (учитывая заданные объемы производства и потребления), чтобы получить наилучший с точки зрения народного хозяйства вариант перевозки данного груза. Под таким вариантом мы разумеем тот, для которого общая сумма затрат по передвижению данного груза будет минимальной[2].

Сначала мы излагаем общие соображения, на которых основаны развиваемые нами методы, затем показываем на нескольких примерах процесс решения поставленной задачи. Предлагаемый способ является эффективным; даже в весьма сложных случаях решение задачи может быть найдено в короткий срок.

Далее мы рассматриваем более сложную задачу (задача Б), когда имеется несколько различных однородных грузов, а также ряд грузов с точно определенными пунктами назначения и отправления; в данном случае при планировании перевозок имеет важное значение вопрос о питании порожняком. Решение этого вопроса приводит к решению нескольких задач типа задачи А и потому может быть осуществлено теми же методами.

Ниже рассматривается задача В, отличающаяся от задачи А некоторым усложнением условий, а именно: некоторые магистрали имеют пропускную способность меньшую, чем мощность грузопотоков, для которых кратчайший путь проходит через данную магистраль. В этом случае приходится часть груза направлять кружным путем, и нужно добиться того, чтобы связанное с этим увеличение затрат оказалось минимальным. Решать задачи подобного типа возможно при помощи тех же методов.

Наконец, в заключение мы указываем на некоторые дополнительные обстоятельства, которые надо учитывать и на основании которых следует корректировать полученную схему перевозок.

---

[1] Впервые направлено в печать (в журнал "Железнодорожный транспорт") в декабре 1940 г. Опубликовано в 1949 г. в сборнике "Проблемы повышения эффективности работы транспорта". Изд-во АН СССР. С. 110–138.

[2] Задача А рассматривается в статье А. Толстого ("Социалистический транспорт". 1939. № 9. С. 28–51), однако в ней не дано законченного общего метода ее решения. См. также его брошюру "Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов" (Трансжелдориздат. 1941. С. 101); здесь подробно рассмотрены виды нерациональных перевозок и существующие методы анализа вопроса.

ЗАДАЧА А. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

Рассмотрим задачу о наиболее целесообразном прикреплении пунктов потребления однородного груза к пунктам производства.

Суточный размер производства или потребления в вагонах (или тоннах) будем считать указанным[3]; на схемах мы будем писать число вагонов (тонн) в скобках около данного пункта – со знаком "плюс" у пунктов производства и со знаком "минус" у пунктов потребления. Затраты по передвижению вагона груза из одного пункта в другой будем считать заданными и на схемах будем отмечать их цифрой посредине участка, соединяющего данные пункты. Решение задачи заключается в том, чтобы найти такое прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, при котором сумма затрат на транспорт была бы наименьшей. Казалось бы, что решение вопроса должен давать принцип кратчайших расстояний – прикрепление пунктов потребления к ближайшим, т.е. дающим минимальные затраты по доставке, пунктам производства. Однако проведение этого принципа в чистом виде оказывается невыполнимым даже в простейших случаях; частичное же выполнение его может привести к неправильному решению. Поясним это на двух весьма простых схемах.

Для случая, изображенного на рис. 1, ближайшим к пункту B пунктом производства является C. Однако если мы отправим 200 вагонов из C в B, то в пункт D, кроме остающихся 200 вагонов из C, нужно будет направить 400 вагонов из A. В результате получится явно нерациональный план перевозок, так как имеются встречные перевозки[4].

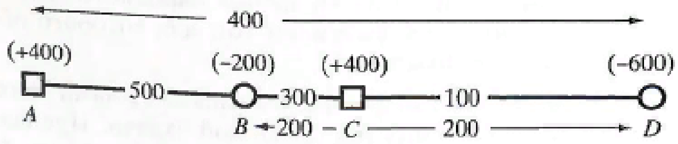

Рис. 1

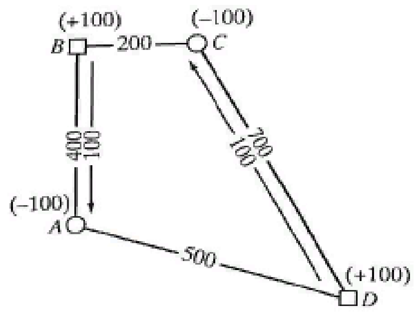

Рис. 2

В схеме, изображенной на рис. 2, прикрепляя A к B, мы также берем ближайший пункт производства. Однако данный план нерационален, так как сумма затрат для него составит $400 \times 100 + 700 \times 100 = 1100 \times 100$, тогда как, прикрепляя A к D и C к B, мы получили бы сумму затрат, равную $500 \times 100 + 200 \times 100 = 700 \times 100$.

В последнем примере встречных перевозок не имеется, и нерациональность плана становится ясной только путем сравнения с другим вариантом. В данном случае вариантов два; однако в более сложном, реальном случае число их может быть велико и потому непосредственное сравнение всех вариантов может оказаться практически неосуществимым.

Перейдем к изложению нашего метода, который позволяет избегнуть такого сравнения многих вариантов и дает возможность кратким путем проверить, является ли данный план наилучшим, и, в том случае, если это не так, указать способ его исправления. Основным для этого метода является понятие особой величины, которую мы будем называть *потенциалом перевозок*.

Обозначим через A, B, C,... все пункты, между которыми мы планируем перевозки, и пусть $\overline{AB}$ означает затраты на перевозку единицы груза из пункта A в пункт B. Пусть дан некоторый

---

[3] Предполагаем, что пункты погрузки и выгрузки указаны точно (железнодорожные станции). Если же погрузка или выгрузка указана по экономическим или административным районам, то такие районы можно заменять условно определенными станциями.

[4] Между прочим, на подобный нерациональный план перевозок может натолкнуть единая цена франко-станция отправления. При такой цене предприятию пункта B выгоднее получать снабжение из C, чем из A, и оно может добиться прикрепления к пункту C; тогда встречные перевозки окажутся неизбежными.

план перевозок из пунктов производства в пункты потребления. Мы будем называть план *потенциальным,* если с каждым из пунктов A, B, C,... можно связать некоторую величину U: U_A, U_B, U_C,... таким образом, чтобы удовлетворялись два следующих условия:

I условие. Разность значений величины U для любого пункта потребления B и пункта производства A не превосходит затраты (на единицу груза) по перевозке из A в B:

$$U_B - U_A \leq \overline{AB}.$$

II условие. Если при данном плане предусмотрена перевозка из A в B, то разность значений U совпадает с этой затратой:

$$U_B - U_A = \overline{AB}.$$

Такую величину U будем называть потенциалом перевозок, отвечающим данному плану.

Это название становится понятным, если привести следующую аналогию. Пусть запланирована перевозка из пункта A в пункт B и для перехода из A в B нужно преодолеть подъем A. Тогда высота (потенциал) пункта B будет превосходить на A высоту (потенциал) пункта A, т.е. разность потенциалов в этих пунктах будет равняться подъему h. Поэтому, если затраты на перевозку представить себе именно так, как подъем, то это будет соответствовать условию II. Очевидно, что если имеется некоторый другой путь, соединяющий пункты A и B, то подъем $\overline{AB}$ при нем должен быть не меньше разности высот этих пунктов – разности потенциалов. Это соответствует условию I.

Пусть нам дан некоторый план перевозок. Как узнать, будет ли он потенциальным, и как построить потенциал в том случае, если он существует?

Для построения потенциала мы должны использовать те пары пунктов, между которыми предусмотрены перевозки, так как для таких пар пунктов мы знаем разность значений потенциала (равную, согласно условию II, затратам на перевозку единицы груза из одного пункта в другой). По этим разностям нам и надлежит определить потенциал во всех пунктах. Поскольку нам заданы только разности значений потенциала, потенциал сохранит свои свойства, если мы изменим его значения во всех пунктах на одну и ту же постоянную величину. Таким образом, мы можем принять значение потенциала в одном пункте произвольным. Пусть, например, этот выбранный нами пункт есть пункт производства A. Тогда мы сможем определить значение потенциала в тех пунктах потребления, в которые, согласно плану, этот пункт отправляет свой груз. Пусть это будут пункты B_1, B_2, ... Затем мы сможем определить значение потенциала в тех пунктах производства, которые также направляют свой груз в один из пунктов B_1, B_2, ...

Таким путем, переходя от одного пункта к другому, мы сможем последовательно пытаться определять потенциал во всех пунктах. Однако не всегда можно это сделать, не приходя в противоречие с условием I. Чтобы уяснить себе этот вопрос, начнем с примеров.

Правильный план перевозок для задачи, данной на рис. 1, очевиден: надлежит отправить из A в B 200 вагонов и 200 вагонов в D, сверх того 400 вагонов из C в D. Определим потенциал для этого плана. Примем, например, $U_A = 0$. Так как из A совершается перевозка в B с затратой 500, то $U_B - U_A$ должно быть равно 500, т.е. $U_B = 500$. Так как для перевозки из A в B требуются затраты 1500, то $U_D = 1500$. Наконец, так как происходит перевозка из C в D с затратой в 700, то $U_D - U_C = 700$, или $U_C = U_D - 700 = 1500 - 700 = 800$.

Напротив, если бы мы попытались строить потенциал для первоначального плана, приведенного на рис. 1, то эта попытка не удалась бы. Действительно, полагая опять $U_A = 0$, мы должны были бы принять $U_D = 1500$, так как совершается перевозка из A в D, и далее $U_C = 800$, $U_B = 1100$. Тогда для пунктов A и B оказывается нарушенным условие 1, а именно: получаем $U_B - U_A = 1100 > \overline{AB} = 500$, т.е. в противоречии с условием.

В качестве третьего примера рассмотрим схему и план перевозок, приведенные на рис. 2. Примем $U_B = 0$; тогда по условию II должны иметь: $U_A = 400$. Так как точка D не связана грузопотоками с A и B, значение потенциала в ней не определено. Обозначим это неизвестное значение через α: $U_D = \alpha$. В таком случае мы должны иметь: $U_C = \alpha + 700$. Посмотрим, возможно ли хотя бы при каком-либо значении α выполнить условие I.

Применяя его к пунктам B и C, получаем:

$$U_C - U_B = \alpha + 700 \leq 200,$$

а применяя к пунктам A и D, получим:

$$U_A - U_D = 400 - \alpha \leq 500.$$

Таким образом, с одной стороны, должно быть $\alpha \leq -500$, с другой, $\alpha \geq -100$. Отсюда ясно, что такого α не существует, а потому для данного плана нельзя построить потенциал, удовлетворяющий обоим условиям (I и II). Следовательно, план непотенциальный.

В первом примере был взят наивыгоднейший исходный план, и он оказался потенциальным, в последних двух – план не был наивыгоднейшим и оказался непотенциальным. Всегда потенциальный план есть и наивыгоднейший, и наоборот. Точнее говоря, справедливы следующие два положения.

Положение 1. Если для данного плана имеется потенциал перевозок, то этот план является наивыгоднейшим, т.е. всякий другой план дает неменьшие суммарные затраты.

Через $A_1, A_2, ..., A_m$ обозначим пункты производства, соответственно через $a_1, a_2, ..., a_m$ – объем производства (в вагонах) в этих пунктах; через $B_1, B_2, ..., B_n$ – пункты потребления и через $b_1, b_2, ..., b_n$ – объемы потребления в них. Очевидно, должно быть $\sum_i a_i = \sum_k b_k$. Через $r_{ik} = \overline{A_i B_k}$ обозначим затраты по перевозке вагона груза из пункта A_i в B_k. Через h_{ik} обозначим число вагонов, направляемых из пункта A_i в B_k согласно данному плану перевозок (если перевозка не совершается, то $h_{ik} = 0$). По смыслу величин h_{ik} должно быть $\sum_i h_{ik} = a_i$ и $\sum_i h_{ik} = b_k$.

Согласно предположению для данного плана имеется потенциал перевозок – величина U, удовлетворяющая условиям I и II, которые при введенных обозначениях можно записать так:

I. $UB_k - UA_i \leq r_{ik}$ $(i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n)$.

II. Если перевозка из Ai в Bk фактически осуществляется, т.е. $h_{ik} \neq 0$, то $UB_k - UA_i = r_{ik}$.

Подсчитаем сумму затрат по перевозкам при данном плане. Она равна

$$W = \sum_k \sum_i h_{ik} r_{ik} = \sum_i \sum_k (UB_k - UA_i) h_{ik}.$$

Действительно, если $h_{ik} \neq 0$, то соответственные произведения, стоящие в обеих частях равенства, равны между собой в силу условия II; если же $h_{ik} = 0$, то они оба равны нулю и равны между собой. Преобразуя дальше, получаем:

$$W = \sum_k U_{B_k} \sum_i h_{ik} - \sum_i U_{A_i} \sum_k h_{ik} = \sum_k U_{B_k} b_k - \sum_i UA_i a_i.$$

Пусть теперь дан некоторый другой план перевозок. Число вагонов, направляемых из A_i в B_k по этому плану, обозначим через h'_{ik}. Подсчитаем и оценим суммарные затраты по этому плану. Используя условие I, имеем:

$$W' = \sum_i \sum_k h'_{ik} r_{ik} \geq \sum_i \sum_k (U_{B_k} - U_{A_i}) h'_{ik} =$$

$$= \sum_k U_{B_k} \sum_i h'_{ik} - \sum_i U_{A_i} \sum_k h'_{ik} = \sum_k U_{B_k} b_k - \sum_i U_{A_i} a_i = W.$$

Итак, $W' \geq W$, т.е. действительно план, для которого имеется потенциал, дает наименьшие суммарные затраты.

Установленное предложение показывает, что если некоторый план дается в сопровождении потенциала перевозок (конечно, с выполнением условий I и II), то это служит гарантией того, что он наивыгоднейший. Верно также положение, обратное первому:

Положение 2. Всякий наивыгоднейший план является и потенциальным, т.е. для него существует потенциал перевозок, удовлетворяющий условиям I и II.

Полного доказательства этого положения приводить не будем, покажем лишь его идею, которая сводится к тому, что если для данного плана попытка построить потенциал не удается, то это объясняется нерациональностью плана. Следовательно, имея наивыгоднейший план, потенциал перевозок всегда можно построить. Покажем это на примере. На рис. 3 показан сплошными линиями заданный план перевозок (кроме изображенных на схеме станций и грузопотоков, могут быть еще и другие, здесь не приведенные).

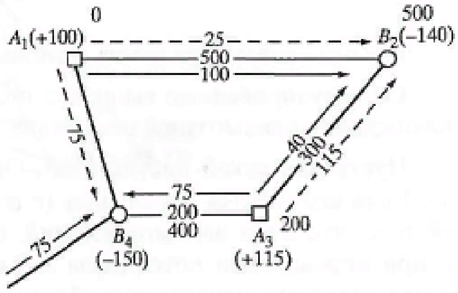

Рис. 3

Начнем определение потенциала с пункта A_1 и положим, например, $U_{A_1} = 0$ (значение потенциала в точке мы записываем рядом с ней). Из A_1 совершается перевозка в B_2, так что мы должны принять, по условию II, $U_{B_2} - U_{A_1} = \overline{A_1 B_2} = 500$, откуда $U_{B_2} = 500$. Далее, в B_2 производится перевозка из A_3, так что U_{A_3} мы должны определить из условия $U_{B_2} - U_{A_3} = \overline{A_3 B_2} = 300$. Отсюда $U_{A_3} = 500 - 300 = 200$. Таким же образом, U_{B_4} мы должны определить из условия $U_{B_4} - U_{A_3} = 200$. Следовательно, $U_{B_4} = 200 + 200 = 400$.

Допустим, что здесь мы обнаружили нарушение условия I и что затраты на перевозку из A_1 в B_4 по прямому пути будут меньше, чем разность потенциалов в этих точках:

$$\overline{A_1 B_4} < U_{B_4} - U_{A_1} = 400.$$

Это сразу показывает, что данный план можно улучшить, снизив общий объем перевозок. Для этого нужно направить 75 вагонов груза из A_1 непосредственно в B_4, и соответствующим образом изменить остальные перевозки. Получим схему перевозок, изображенную пунктирными линиями. Сравним затраты на перевозки (в пределах данной части схемы) при обоих вариантах. При первом варианте они равны

$$W_1 = 100 \times 500 + 40 \times 300 + 75 \times 200,$$

при втором

$$W_2 = 25 \times 500 + 115 \times 300 + 75 \times \overline{A_1 B_4} = 100 \times 500 + 40 \times 300 +$$
$$+ 75 \times \left(500 - 300 + 200 - \overline{A_1 B_4}\right) = W_1 - 75 \times \left(400 - \overline{A_1 B_4}\right).$$

Так как разность $400 - \overline{A_1 B_4}$, по предположению, положительна, то $W_2 < W_1$ и исправленный план экономичнее первоначального.

Таким же образом, всякий раз, когда мы, пытаясь построить на основании условия II потенциал перевозок для данного плана, нарушим условие I, это укажет на некоторую нерациональность плана и на способ, которым его можно улучшить.

Сделаем следующее замечание. Мы в нашем примере провели операцию исправления плана, которую будем называть снятием с кружного пути некоторого числа вагонов и направлением их по прямому пути. В рассмотренном примере мы сняли с кружного пути (A_1–B_2–A_3–B_4) 75 вагонов, т.е. уменьшили перевозки на тех участках этого пути, по которым перевозки производятся в направлении от A_1 к B_4, и для сохранения баланса в промежуточных пунктах увеличили на 75 вагонов перевозки на участках пути, по которым перевозки производятся в обратном направлении. При этом баланс нарушился только в крайних пунктах A_1 и B_4, а затраты на перевозку уменьшились на величину

$$75\ (U_{B_4} - U_{A_1}).$$

Для сведения баланса и в этих пунктах мы должны были направить 75 вагонов груза по прямому пути из A_1 в B_4, что вызвало увеличение затрат на $75 \times \overline{A_1 B_4}$. Общая экономия, таким образом, выражается величиной

$$75(U_{B_4} - U_{A_1} - \overline{A_1 B_4}).$$

Таким же образом и вообще, если в двух пунктах, A и B, потенциал определен, то с кружного пути, соединяющего эти пункты (составленного из участков, вдоль которых определяется потенциал), можно снять некоторое число m вагонов (наименьшее число, которое встречается на стрелках, идущих в направлении от A к B), так что баланс перевозок сохранится во всех пунктах этого пути, кроме крайних A и B. Затраты при этом уменьшатся на величину

$$m\,(U_B - U_A).$$

Иными словами, разность потенциалов всегда, так сказать, "реализуема".

Сформулированные выше два положения служат базой для всех излагаемых ниже методов нахождения наивыгоднейшего плана.

Пусть дан какой-нибудь план. Определяем последовательно от пункта к пункту потенциал. Если его удастся определить (с соблюдением условий I и II), то это будет служить гарантией того, что план наивыгоднейший. Обычно, если данный план взят на глаз, это будет не так, и при определении потенциала мы встретим противоречия (нарушение условий I и II); план будет заведомо ненаивыгоднейший. При этом рассуждения, проведенные при рассмотрении положения 2, показывают, при помощи какого исправления можно уменьшить затраты. На этом и основан метод решения задачи А, изложенный в следующем разделе.

ЗАДАЧА А

Здесь изложен метод нахождения наивыгоднейшего плана перевозок, который опирается на основные предложения, доказанные выше. При этом мы будем различать две задачи. Задача проверки того, является ли данный план наивыгоднейшим, и задача нахождения наивыгоднейшего плана прикрепления пунктов производства к пунктам потребления. Далее мы рассмотрим последовательно два случая – когда все пункты в плане связаны между собой и когда пункты разбиваются на несколько групп, не связанных грузопотоками одна с другой.

При рассмотрении примеров, не имея других данных о затратах по перевозкам (например, о себестоимости), мы берем в качестве меры затрат вагоно-километры, или, что то же самое, тонно-километры, как это обычно принимается на транспорте. Следовательно, наивыгоднейшим мы считаем план, дающий при соблюдении прочих условий минимальный вагоно-километраж. В этом случае затраты по перевозке на один вагон (выраженные в вагоно-километрах) равны расстоянию между пунктами. Следует сказать, что это является совершенно несущественным – метод решения не зависит от принятого способа измерения затрат и так же точно приведет к результату, если затраты будут измерены более совершенным образом.

Отметим еще, что, говоря выше о потенциале, мы определяли его только в пунктах погрузки и назначения. Однако при решении примеров иногда бывает выгодно определять его и в других пунктах (узлах); это всегда возможно в случае наивыгоднейшего плана без нарушения основных условий для потенциала. Наконец, обратим внимание на то очевидное обстоятельство, что если условия I и II для потенциала будут выполняться для любой пары соседних пунктов, т.е. связанных каким-то участком железнодорожного пути непосредственно, без захода в другие рассматриваемые пункты, то эти условия будут соблюдаться и всегда. Это замечание существенно облегчит проверку выполнения основных свойств потенциала[5].

Покажем, прежде всего на примерах, как проверить то, что план прикрепления является наивыгоднейшим. В этом случае нет необходимости иметь полный план перевозок с указанием их объема, а достаточно иметь схему грузопотоков. Рассмотрим схему, представленную на рис. 4. На схеме приведены расстояния между пунктами, а стрелками показаны направления грузопотоков. Как и выше, пункты производства (погрузки) изображены прямоугольниками, пункты потребления – кружками, остальные (узловые) станции – треугольниками.

---

[5] Отметим, что когда речь идет не о вагоно-километрах, а о другом измерении, то последние два упрощающих соображения будут верны, если измеритель такой, что всегда $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, если кратчайший путь из A к C проходит через B.

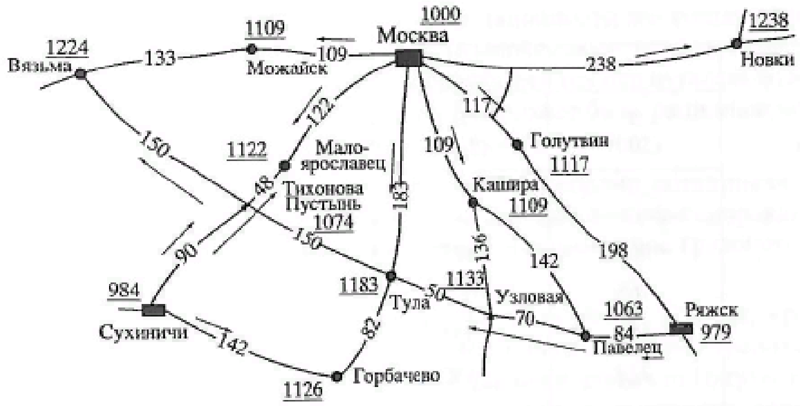

Рис. 4

Для проверки правильности плана строим потенциал. Для Москвы принимаем его равным 1000. Так как из Москвы производится перевозка в Новки, значение потенциала для Новки (по условию II) равно 1000 + 238 = 1238. Таким же образом, для Голутвина это значение равно 1117, для Каширы 1109, для Тулы 1183.

Далее, в Тулу производится перевозка из Ряжска, поэтому в Ряжске потенциал должен быть меньше на величину, равную расстоянию между ними: 50 + 70 + 84 = 204, т.е. потенциал для Ряжска равен 1183 – 204 = 979. Попутно определяется потенциал для Павельца: 979 + 84 = 1063 и Узловой: 1133. Затем определяется потенциал для Малоярославца: 1000 + 122 = 1122, для Сухинич: 1122 – (90 + 48) = 984, Тихоновой Пустыни: 984 +90 = 1074, Горбачева: 984 + 142 = 1126, Вязьмы: 1074 +150 = 1224, Можайска: 1000 + 109 = 1109.

Итак, потенциал определен во всех случаях. Проверим, будет ли выполнено условие I. Достаточно сравнить значение потенциала в тех соседних пунктах, для которых оно получено разным путем. Рассмотрим следующие пары пунктов:

Голутвин – Ряжск...............	1117 – 979 = 138 < 198;
Кашира – Павелец.............	1409 – 1063 = 46 < 142;
Узловая – Кашира..............	1133 – 1109 = 24 < 136;
Тула – Горбачево................	1183 – 1126 = 57 < 82;
Тула – Тихонова Пустынь...	1183 – 1074 = 109 < 150;
Вязьма – Можайск..............	1224 – 1109 = 115 < 133.

Во всех случаях разность потенциала меньше расстояния, т.е. условие I соблюдено. Это доказывает, что план не содержит нерациональных перевозок (в отношении правильности прикрепления).

Заметим, что при анализе плана нет надобности составлять потенциал для всех пунктов: его можно не находить для тех пунктов, где рациональность плана не вызывает сомнений (например, для станции Новки на рис. 4). Для таких пунктов можно не определять их расстояний.

Полезно также проверять правильность плана параллельно с определением потенциала. Тогда, если план содержит нерациональные перевозки, это можно обнаружить, не находя потенциала для всех точек.

Проверка правильности плана прикрепления может быть с таким же удобством осуществлена вместо схемы путей по таблице расстояний и грузопотоков – "шахматке". Подобная таблица расстояний дана ниже (см. таблицу расстояний).

В таблице указаны попарные расстояния между каждым из пяти пунктов отправления *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и каждым из 12 пунктов назначения *а*, *б*,..., *м*. Далее указывается, какой пункт из какого снабжается по плану; для этого соответствующее расстояние набрано курсивом. Например, то, что цифра 1018 в строке *б* против *В* выделяется, показывает, что в данном плане предусмотрено снабжение пункта *б* из *В*.

Таблица расстояний

Пункты назначения	Пункты отправления				
	А (500)	*Б* (363)	*В* (247)	*Г* (438)	*Д* (35)
	Расстояния, км				
а (980)	567	*617*	1004	957	2099
б (1265)	765	1090	*1018*	835	1819
в (705)	658	955	*458*	267	1182
г (722)	222	552	690	616	1733
д (540)	508	808	*293*	120	1170
е (222)	1691	2017	1575	1335	*187*
ж (898)	*398*	725	837	765	1907
з (634)	617	924	439	*226*	1107
и (558)	375	434	*311*	427	1601
к (898)	842	1168	682	*460*	*863*
л (1224)	*724*	*861*	1157	1114	2255
м (838)	538	866	639	*400*	1072

Для проверки того, что план наивыгоднейший, строим потенциал. Начинаем с пункта *А*, берем для него значение потенциала равным, например, 500. Так как из пункта *А* совершаются перевозки в пункты *б, г, ж, л*, то определяем потенциал для них; например, для *б* потенциал равен 500 + 765 = 1265 и т. д. (эти связи нанесены на рис. 5).

Далее, в пункт *б* перевозится груз также из *В* при расстоянии в 1018. Отсюда значение потенциала в пункте *В* должно быть принято равным 1265 – 1018 = 247. После этого определяем потенциал в пунктах *в, д, и*, которые снабжаются из *В*. Продолжая таким же образом, определим значение потенциала во всех пунктах. Эти значения потенциалов приведены в таблице против обозначений соответствующих пунктов в скобках.

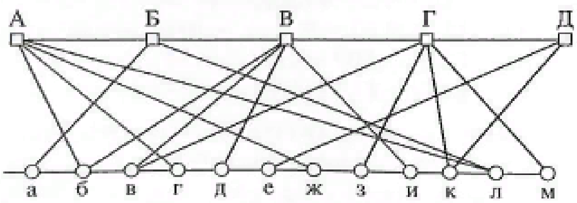

Рис. 5

Теперь проверим, выполнено ли для найденных значений потенциала условие I. Расстояние между каждыми двумя пунктами должно быть не больше разности потенциалов в пунктах отправления и в пунктах назначения. Иначе говоря, потенциал в пункте назначения должен быть не больше суммы потенциала в пункте отправления и расстояния. Произведем, например, проверку для пункта *а*. Потенциал в нем равен $Ua = 980$, а указанные суммы равны соответственно:

для *а* и *А* $500 + 567 = 1\,067 > 930;$
» *а* и *Б* $363 + 617 = 980 = 980;$
» *а* и *В* $247 + 1\,004 = 1\,251 > 980;$
» *а* и *Г*... $438 + 957 = 1\,395 > 980;$
» *а* и *Д* $35 + 2\,099 = 2\,134 > 980,$

т.е. во всех случаях “больше” за исключением пары *а* и *Б*, где стоит знак равенства, но это находится в соответствии с тем, что из *Б* в *а* перевозка действительно совершается. К такому же результату приводит и проверка для остальных пунктов (*б, в,..., м*). Итак, для плана установлено наличие потенциала; следовательно, он наивыгоднейший.

При выполнении этой проверки, как правило, нет надобности все указанные суммы выписывать и точно подсчитывать, так как за немногими исключениями знак неравенства виден сразу, на глаз. Также вообще нет нужды производить проверку для тех пар пунктов, относительно которых заведомо ясно, что перевозка из одного в другой не может быть рациональной и можно даже расстояния между этими пунктами в "шахматку" не включать.

Приведем теперь примеры такого рода, когда при построении потенциала обнаруживается нерациональность плана, и покажем, как он может быть в таком случае исправлен. Отметим, что для исправления плана уже недостаточно только указать направление грузопотоков, а необходимо иметь полный план перевозок.

Рассмотрим в качестве примера план, приведенный на рис. 6. На нем, кроме расстояний, указан объем производства или потребления в каждом пункте и объем перевозок (на стрелках). К Ряжску прикреплены ближайшие к нему пункты Павелец и частично Голутвин, к Сухиничам – Вязьма, Горбачево и частично Малоярославец; остальные пункты прикреплены к Москве. Составляем потенциал. Принимаем его для Москвы равным 1000 и определяем последовательно для пунктов: Новки – 1000 + 238 = 1238, Голутвин – 1000 + 117 =1117, Ряжск – 1117 – 198 = 919, Павелец – 919 + 84 = 1003, Кашира – 1000 + 109 = 1109 (рис. 6). Делаем проверку для пунктов Кашира – Павелец: 1109 – 1003 = 106 < 142, невязки нет. Далее составляем потенциал для Тулы: 1000 + 183 = 1183. Сравниваем пункты Тула – Павелец, находим: 1183 – 1003 = 180 > 120. Разность потенциалов оказалась больше расстояния – невязка (нарушено условие I).

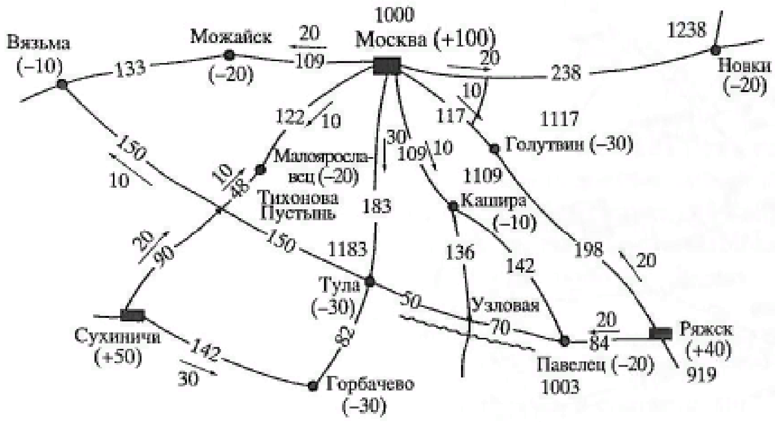

Рис. 6

Каким путем получилась невязка? Соединяем пункты Тула и Павелец (от меньшего потенциала к большему) незамкнутым кольцом, составленным из пунктов, где потенциал определен: Павелец – Ряжск – Голутвин – Москва – Тула. Наименьшее число вагонов, идущих в этом направлении, 20 (участок Ряжск – Голутвин). Поэтому снимаем 20 вагонов в этом направлении, а именно: число вагонов на стрелках, идущих в этом направлении, уменьшаем на 20, а число вагонов на стрелках, идущих в противоположном направлении, на 20 увеличиваем, т.е. на стрелке на участке Павелец – Ряжск ставим 40, на участке Ряжск – Голутвин – 0 (снимаем стрелку), на участке Москва – Голутвин – 30, на участке Москва – Тула – 10, на участке Павелец – Тула – 20 (вместо 0). Иначе говоря, вносим следующие изменения: из Ряжска направляем 20 вагонов в Тулу, Голутвин из Ряжска больше не снабжаем, зато в Голутвин направляем 30 вагонов вместо 10 из Москвы, но из Москвы в Тулу вместо 30 направляем только 10 вагонов.

Полученную за счет исправления экономию в вагоно-километраже можем подсчитать непосредственно, учитывая добавленные и снятые перевозки. Получим:

$$20 \times 198 + 20 \times 183 - 20 \times 120 - 20 \times 84 - 20 \times 117 = 1200 \text{ вагоно-км.}$$

Это можно подсчитать и по упрощенному правилу, исходя из того, что сокращение вагоно-километража равно произведению величины устраненной невязки на число вагонов. В данном случае

$$20\,(1183 - 1003 - 120) = 1200 \text{ вагоно-км.}$$

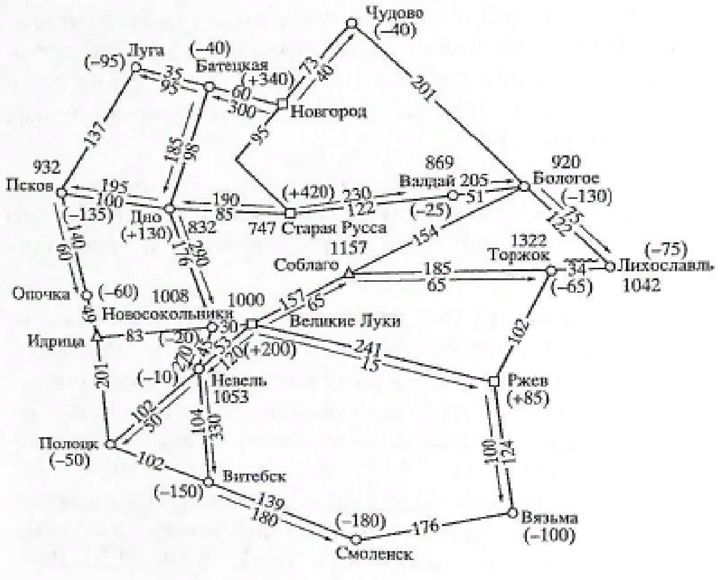

Рис. 7

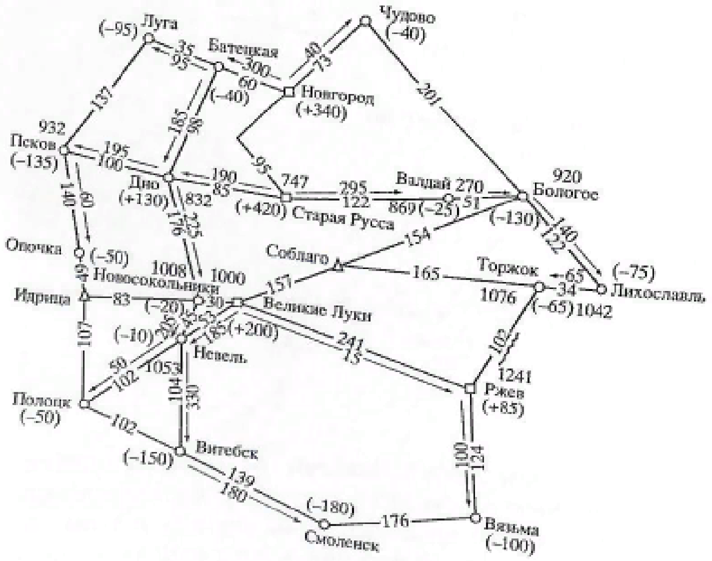

Рис. 8

Получающийся в результате указанного исправления план имеет схему направлений грузопотоков, которая приведена на рис. 4. Ее мы уже проверили; она соответствует наивыгоднейшему плану.

Вообще, если нам нужно не проверить план, а составить его по данным условиям, то поступаем таким образом. Составляем на глаз простейший план прикрепления; при этом только стараемся избежать явно нерациональных перевозок: встречных перевозок, пересекающихся грузопотоков. После этого проверяем план при помощи построения потенциала. Обнаружив невязки в потенциале, вносим исправления подобно проведенным в предыдущем примере. После нескольких исправлений приходим к наивыгоднейшему плану[6].

Приведем пример с несколькими такими исправлениями. Для ясности мы будем изображать последовательные приближения на отдельных чертежах. На практике в этом, конечно, нет нужды, и все решение проводится на одном чертеже. Исправления вносятся при помощи карандаша и резинки.

Задача изображена на рис. 7. На ней приведены пункты производства и потребления с указанием объема их при наших обычных обозначениях, а также составленный упрощенным путем исходный план.

Для проверки правильности составления плана строим потенциал. Принимаем его для Великих Лук равным 1000. Далее определяем его последовательно, как выше, для пунктов Невель, Новосокольники, Дно, Старая Русса, Валдай, Бологое, Лихославль, а также для Соблаго, Торжок. Для пунктов Лихославль и Торжок обнаруживается невязка: $1322 - 1042 > 34$. Для устранения ее по соединяющему кружному пути – пути определения потенциала: Лихославль – Бологое – Валдай – Старая Русса – Дно – Новосокольники – Невель – Великие Луки – Соблаго – Торжок – снимаем наименьшее встречающееся число вагонов, идущих в этом направлении, 65 (участок Великие Луки – Соблаго – Торжок), т.е. уменьшаем на 65 число вагонов на стрелках, идущих в этом направлении, и увеличиваем на противоположных. В результате приходим к плану, приведенному на рис. 8.

Экономию подсчитываем по указанному выше упрощенному правилу:

$$65\,(1322 - 1042 - 34) = 65\times 246 = 15\,990 \text{ вагоно-км}.$$

[6] Подчеркнем еще раз, что, говоря "наивыгоднейший план", мы имеем в виду план, наивыгоднейший в соответствии с принятой постановкой, т.е., что план дает нам наименьшие суммарные затраты при принятом способе их измерения среди всех планов, удовлетворяющих данным условиям.

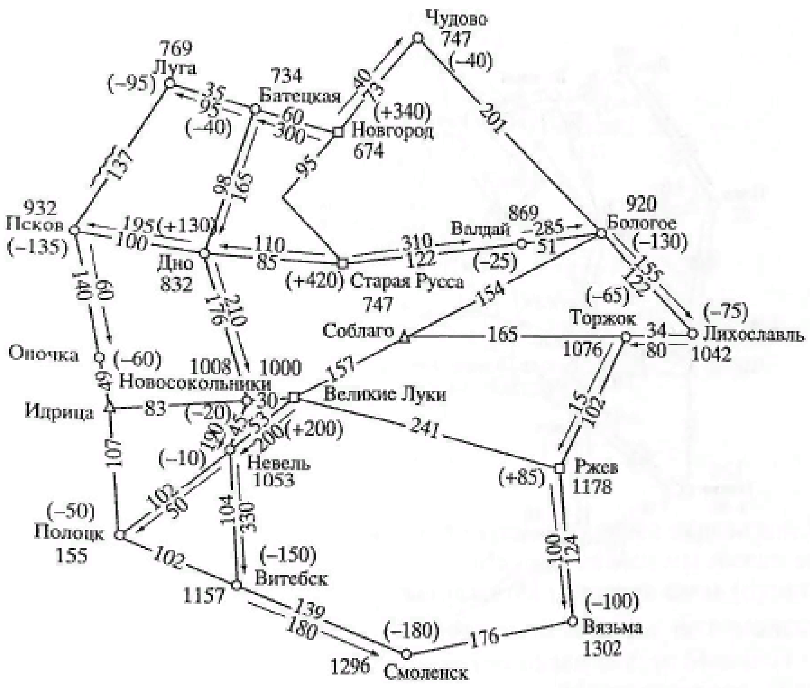

Рис. 9

Для этого плана опять строим потенциал (также начиная с Великих Лук), исправляя его значение в затронутых произведенным перемещением пунктах (в данном случае только в Торжке, а в Соблаго потенциал более не определен). Составляем далее потенциал для Ржева и обнаруживаем невязку для пунктов Торжок – Ржев. Для исправления ее снимаем 15 вагонов с пути Торжок – Лихославль – Бологое – Валдай – Старая Русса – Новосокольники – Невель – Великие Луки – Ржев. Уменьшение вагоно-километража составляет:

$$15 \times (1241 - 1076 - 102) = 15 \times 63 = 945 \text{ вагоно-км.}$$

Исправленный план приведен на рис. 9. На нем исправлен в соответствии с этим и потенциал в Ржеве. После этого продолжаем определение потенциала для пунктов Вязьма, а также для Батецкая, Новгород, Чудово, Луга. Для пунктов Чудово и Бологое невязки нет. Невязка обнаруживается для участка Луга – Псков: 932 – 769 > 137.

Снимаем 165 вагонов на соединяющем их пути Луга – Батецкая – Дно – Псков. Выигрыш составляет:

$$165\,(932 - 769 - 137) = 165 - 26 = 4290 \text{ вагоно-км.}$$

Исправленный план приведен на рис. 10. Исправляем в нем значение потенциала в пунктах Луга, Батецкая, Новгород, Чудово и продолжаем построение его для пунктов Опочка, Полоцк, Витебск, Смоленск. В этом плане никаких невязок более не обнаруживается, и он оказывается наивыгоднейшим – дающим минимальный вагоно-километраж.

Всего при переходе от первоначальной схемы (рис. 7) к окончательной (рис. 10) получим уменьшение вагоно-километража в размере

$$15\,990 + 945 + 4290 = 21\,225 \text{ вагоно-км,}$$

что составляет примерно 7 % от первоначального объема перевозок.

Отметим попутно еще некоторые возможности применения потенциала перевозок. Предположим, что в составленный план, для которого построен потенциал, вносятся некоторые изменения в связи с изменением объема производства и потребления, однако настолько небольшие, что

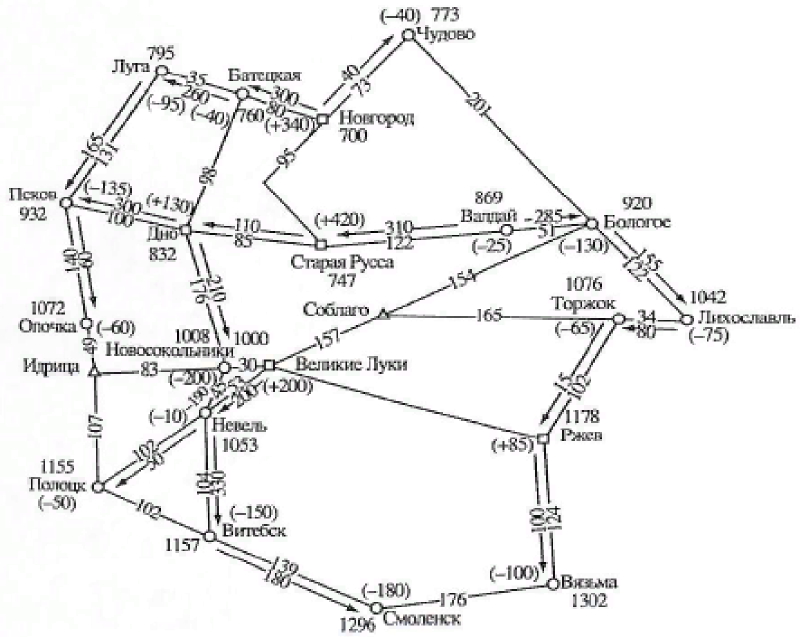

Рис. 10

схема грузопотоков остается неизменной. В таком случае изменение в затратах на перевозки, как легко проверить, можно подсчитывать по формуле:

$$\Delta W = \sum_k U_{B_k}\Delta b_k - \sum_i U_{A_i}\Delta a_i,$$

где Δa_i и Δb_k – изменения в объемах погрузки и выгрузки. Если изменение коснулось лишь небольшого числа пунктов, то подсчет по этой формуле очень удобен.

В отдельных случаях желательно по тем или иным причинам отступать от плана, дающего минимальные затраты (в частности, вагоно-километраж). Так, например, при нежелании нарушить установившуюся связь между предприятиями или для сохранения возможности маршрутизации и пр.

Пользуясь потенциалом, легко (если отступление касается небольшого числа вагонов) подсчитать связанные с этим потери. Именно, если мы введем перевозку из пункта A в B, которая не предусмотрена наивыгоднейшим планом, то связанные с этим потери в суммарном тонно-километраже на один "неправильно направленный" вагон будут равняться

$$\overline{AB} - (U_B - U_A).$$

Так, если направить некоторое число вагонов из Новгорода через Старую Руссу в Бологое, сохранив баланс вагонов во всех пунктах, то потери на каждый вагон составят

$$268 - (920 - 700) = 48 \text{ вагоно-км}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда грузопотоки разбиваются на несколько несвязанных между собой систем, и покажем, как в этом случае проверяется и исправляется план.

План перевозок приведен на рис. 11. Строим потенциал для него. Приняв его для Москвы равным 1000, находим его значение для Можайска и Тулы. Остальные пункты не связаны перевозками с теми, для которых определен потенциал. Тогда применяем следующий прием. Вводим условную перевозку m вагонов на связывающем участке. Например, направляем m вагонов из Можайска в Вязьму (на рис. 11 показано пунктирной стрелкой).

Тогда получаем возможность определить значение потенциалов в пунктах Вязьма, Тихонова Пустынь, Малоярославец, Сухиничи, Горбачево. Производим проверку для пунктов Москва – Малоярославец, обнаруживаем невязку $1140 - 1000 > 122$. Однако в данном случае наличие не-

Рис. 11

вязки не свидетельствует еще о том, что имеются нерациональные перевозки. Именно, с пути Москва – Можайск – Вязьма – Тихонова Пустынь – Малоярославец мы можем снять со стрелок только m вагонов, так как в этом направлении встречается условная связь (пунктирная стрелка).

Осуществление этого (снятия вагонов) приводит, таким образом, не к реальному изменению плана, а к введению условной связи Москва – Малоярославец вместо Можайск – Вязьма. В связи с этим уже иначе определяются потенциалы в пунктах: Малоярославец, Тихонова Пустынь, Вязьма, Сухиничи, Горбачево, – именно они должны быть уменьшены на величину исправленной невязки $(1140 - 1000) - 122 = 18$.

Эти изменения нанесены в левой части рис. 12. Таким образом, план прикрепления в этой части был правилен, и нам потребовалось только исправить значения потенциала. После этого возвращаемся к построению потенциала, который у нас еще не определен для ряда пунктов, так как они не связаны с прочими. Вводим новую условную связь на участке Москва – Голутвин, направляя m вагонов. После этого значение потенциала определяется последовательно в пунктах: Голутвин, Ряжск, Павелец, – как это показано на рис. 11.

При проверке пунктов Тула – Павелец обнаруживается невязка в $1183 - 1003 > 120$. На пути Павелец – Ряжск – Голутвин – Москва – Тула наименьшее число вагонов, идущее в указанном направлении, 30. Снимаем по 30 вагонов со стрелок, идущих в противоположную сторону. Получаем изменение грузопотоков, в связи с чем также изменяется значение потенциала в пункте Тула. Изменения даны на правой части рис. 12. В данном случае невязка привела к действительному изменению плана и к сокращению вагоно-километража на

$$(1183 - 1003 - 120) \times 30 = 1800 \text{ вагоно-км}.$$

После указанных исправлений в плане, приведенном на рис. 12, для потенциала оказываются выполненными условия I и II. Следовательно, этот план наивыгоднейший.

Из этого примера ясно, что распадение грузопотоков на несвязанные части не вносит существенных затруднений в проверку и исправление плана перевозок. В такой же мере этот прием осуществим и в том случае, когда план дан не в виде схемы, а в виде таблицы. В этом случае нужно только устанавливать условные связи по схеме рис. 5.

ЗАДАЧА Б

В этом разделе речь идет о планировании перевозок нескольких грузов.

Пусть даны пункты $C_1, C_2, ..., C_n$ и связывающая их железнодорожная сеть и пусть каждый из нескольких различных грузов грузится в некоторых из этих пунктов и в некоторых других разгружается. При этом может случиться, что отдельные пункты будут участвовать в распределении не всех из рассматриваемых грузов. Требуется составить план перевозок всех этих грузов и образующегося порожняка так, чтобы затраты на всю массу перевозок были минимальными.

Предполагаем, что объемы погрузки и выгрузки по каждому грузу сбалансированы.

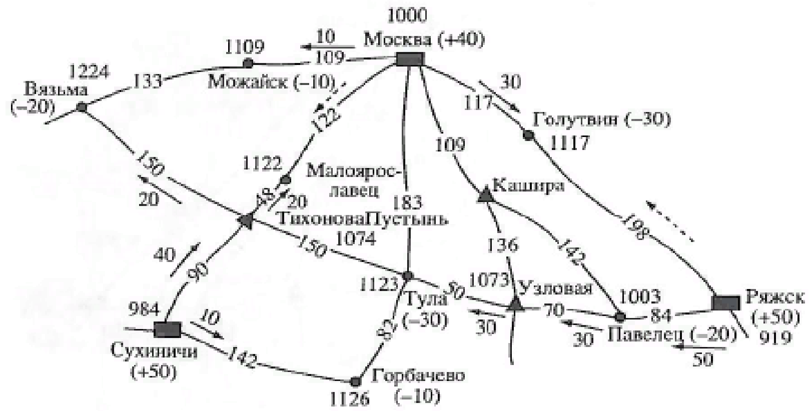

Рис. 12

Эта задача распадается на несколько задач типа задачи А. В самом деле, для каждого груза в отдельности надо выбрать наивыгоднейший план, независимо от перевозок других грузов. Что касается порожняка (мы считаем, что порожняк однородный)[7], то его можно считать за особый вид груза. По условиям задачи известно, сколько в каждый из пунктов прибывает груза и сколько вагонов груза из него отправляется. Это позволяет подсчитать, сколько вагонов порожняка требуется для любого из пунктов или сколько вагонов в нем высвобождается. Дело сводится, таким образом, к тому, чтобы подсчитать, из каких пунктов в какие целесообразно направлять порожняк, с тем чтобы сумма затрат на его перевозку была минимальной, т.е. к решению задачи А.

Не осложняется задача и тогда, когда задан некоторый "фон" перевозок, т.е. известно, что в некоторых пунктах освобождается порожняк от других перевозок, нами сейчас не планируемых, или требуется порожняк для таких перевозок. Нужно лишь учитывать эти количества порожняка при составлении баланса порожняка для каждой станции.

Таким образом, решение разбивается на следующие части: решается задача А для каждого груза в отдельности; для каждого пункта подсчитывается число высвобождающихся или требуемых вагонов порожняка (по видам его). Для каждого вида порожняка решается задача о его наивыгоднейшем распределении, т.е. опять задача А.

ЗАДАЧА С

Эта задача отличается от задачи А тем, что пропускная способность железнодорожной сети предполагается ограниченной или, во всяком случае, для некоторых магистралей указана максимальная допустимая загрузка их грузом данного вида. Требуется составить план перевозок, который учитывал бы такое ограничение и был бы наивыгоднейшим по сравнению с другими (также его учитывающими).

Метод решения задачи, по существу, совпадает с первым методом, предложенным нами для решения задачи А. Здесь также вводится потенциал, и наивыгоднейший план находится одновременно с нахождением потенциала. Сама техника решения задачи остается прежней, с малыми изменениями.

Итак, пусть для каждого участка сети, соединяющего любые соседние пункты A и B, заданы величины $l(A, B)$ и $l(B, A)$, представляющие пропускную способность этого участка в направлениях от A к B и соответственно от B к A. Эти пропускные способности могут быть различными вследствие различной технической оснащенности дорог, а также если имеется некоторый "фон", т.е. если по сети уже перевозятся какие-то другие грузы, которые мы считаем заданными и не планируем в настоящий момент. Требуется составить наивыгоднейший (т.е. связанный с наименьшими затратами) план перевозок, при котором объем перевозок $h(A, B)$ по любому участку AB в направлении от A к B не превосходит $l(A, B)$.

[7] Если видов порожняка несколько (платформы, крытые вагоны и пр.), дальнейшее относится к каждому из них в отдельности.

Мы утверждаем, что некоторый план будет наивыгоднейшим только тогда, когда с ним можно связать такой потенциал U, при котором для любых двух "соседних" точек будут выполнены следующие условия:

$$\text{I. Если } h(A, B) = 0, \text{ то } U_B - U_A \le \overline{AB}.$$

$$\text{II. Если } 0 < h(A, B) < l(A, B), \text{ то } U_B - U_A \le \overline{AB}.$$

$$\text{III. Если } h(A, B) = l(A, B), \text{ то } U_B - U_A \ge \overline{AB}.$$

Здесь, как всегда, $\overline{AB}$ – затраты на перевозку одного вагона груза из A в B по участку AB. Такой потенциал отличается от рассмотренного нами ранее лишь тем, что для участков, используемых при наилучшем плане с полной загрузкой, условия I и II раздела 1 заменяются условием III.

Доказательство этого предложения представляет лишь некоторое усложнение доказательства, приведенного в разделе 1, и мы не будем его воспроизводить.

Покажем технику решения задачи В на примере.

Пример. Пусть дана задача, изображенная на рис. 13, и пусть для любого участка сети пропускная способность (в каждом направлении) равна 500 вагонам. На этой же фигуре изображен некоторый, взятый на глаз, план перевозок, при котором перевозки по любому участку не превосходят 500 вагонов.

Пробуем строить для этого плана потенциал, пользуясь условием II. Примем его равным нулю в пункте *7*. Тогда он последовательно определится, как это показано, в пунктах *8*, *16*, *13*, *2*, *1*, *12*, а также в пунктах *3*, *4*, *5*, *6*. При этом мы пользуемся стрелками, идущими вдоль участков, где перевозки по плану предусмотрены в объеме, меньшем 500 вагонов. Поэтому разность потенциалов на концах таких участков равна длине этих участков.

Обнаруживается невязка между пунктами *6* и *7*, так как условие III оказывается нарушенным. Способ уничтожения невязки, связанный с улучшением плана, очевиден. Добавим некоторое число m вагонов на кружный путь из пункта *7* в пункт *6* (через пункты *8*, *16*, *13*, *2*, *3*, *4*, *5*). Затраты на каждый добавляемый вагон будут равны разности потенциалов в пунктах *6* и *7*, т.е. 110 – 0 = 110. Одновременно снимем с прямого пути из *7* в *6* тоже m вагонов, экономия на каждом снимаемом вагоне 470. В результате мы выгадаем на каждом вагоне 470 – 110 = 360. Добавляя вагоны на кружном пути, мы уменьшаем перевозки по участкам *6 – 5*, *4 – 3*, *3 – 2*. Минимальное число вагонов, перевозимое по этим участкам, равно 20 (участок *3 – 2*). Поэтому принимаем $m = 20$ и переходим к плану, который изображен на рис. 14 и выгоднее предыдущего на 20 × 360 = 7200 вагоно-км.

В этом плане потенциал в пунктах 7, *8*, *16*, *13*, *2*, *1*, *12* остался прежним, в пунктах *6*, *5*, *4*, *3* он изменил свое значение. Кроме того, определен потенциал в пунктах *9* и *10*. Между пунктами *10* и *16* обнаруживается невязка, имеющая такой же, как и в предыдущем случае, характер. Для ее исправления нужно добавить грузопоток по кружному пути, соединяющему пункты *10* и *16* (через пункты *9* и *8*), сняв равное число вагонов с прямого пути. Величина добавляемого грузопотока определяется на этот раз из условия, что по участку *8 – 16* нельзя провозить более 500 вагонов.

Мы приходим к плану, изображенному на рис. 15, который дает по сравнению с предыдущим экономию в 30×[770 – – (740 – 110)] = 30 × 140 = 4200 вагоно-км. Здесь 30 – число вагонов, пускаемых по кружному пути, 770 – расстояние между пунктами *10* и *16*, 740 – 110 разность потенциала в них при плане рис. 14.

Поскольку дальнейшие исправления носят обычный для задачи А характер и не связаны с перегруженными участками, мы их не рассматриваем. Заметим только еще раз, что потенциал всюду определяется из условия II, т.е. при помощи стрелок, идущих вдоль участков, пропускная способность которых использована не полностью.

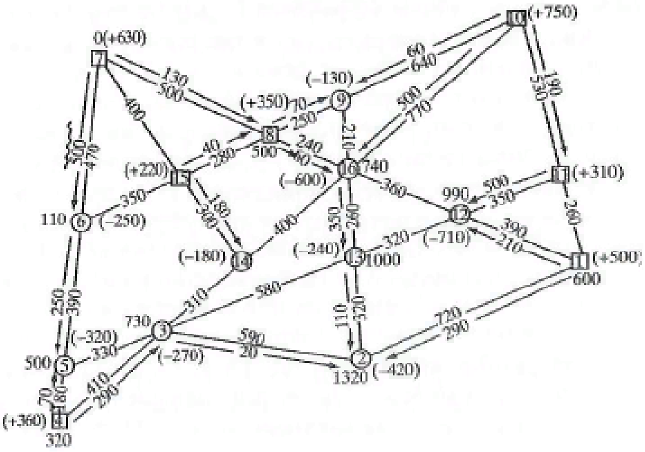

Рис. 13

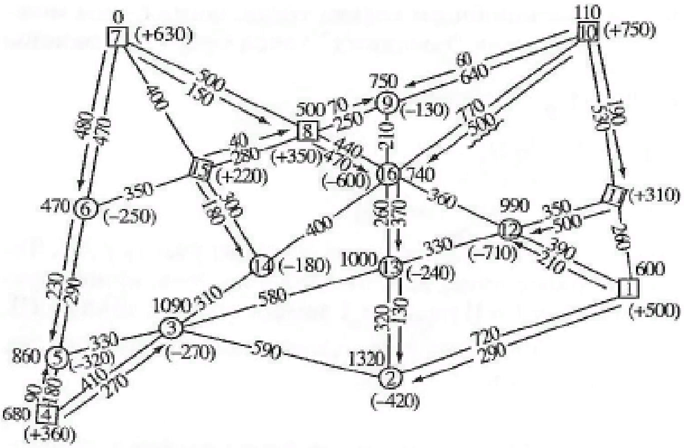

Рис. 14

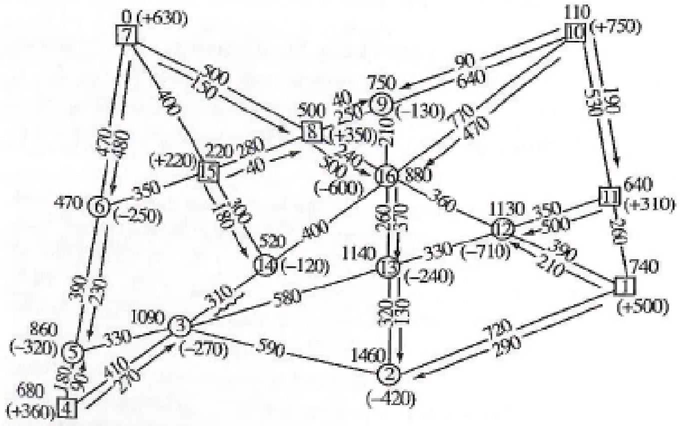

Рис. 15

В заключение остановимся на вопросе о возможности практического использования разобранных выше методов.

Решение задачи А, которое позволяет установить наиболее рациональную схему перевозок для данного однородного груза, может быть использовано при составлении плана перевозок важнейших массовых грузов: цемента, строительного леса, угля (для энергетических целей)[8], сахара, соли, зерна и др. Кроме того, с помощью описанного выше способа, как мы упоминали, решается вопрос о рациональном обороте порожняка.

Решение задач Б и В может быть применено при одновременном планировании перевозок нескольких массовых грузов с учетом загрузки магистралей и оборота порожняка.

Конечно, при составлении реального плана перевозок должны быть учтены и некоторые дополнительные обстоятельства, которые не были приняты во внимание в рассмотренной, в известной мере отвлеченной схеме. Однако это не может служить серьезным препятствием к применению предлагаемого метода. Во-первых, наиболее важные из этих дополнительных обстоятельств (использование водного транспорта, учет загрузки некоторых железнодорожных узлов, учет угловых заездов и др.) могут быть также учтены при помощи приемов, основанных на использовании того же основного метода. Во-вторых, другие обстоятельства, значительно реже оказывающие влияние (скорость и надежность данного пути и др.), могут быть учтены после того, как будет найдено решение задачи. Имея основную, правильную и рациональную схему перевозок, нетрудно внести в нее отдельные коррективы, тем более что данный метод позволяет оценить, насколько данные коррективы отклоняют план от наивыгоднейшего (…) и потому дает возможность внести их наилучшим образом.

Как мы уже говорили, решение задачи А, а также задач Б и В вполне осуществимо при помощи указанных методов даже в весьма сложных случаях. Трудности и расходы, связанные с составлением такой рациональной схемы, совершенно незначительны и не могут идти ни в какое сравнение с теми результатами, которые могло бы дать ее использование. Сокращение даже на один процент среднего пробега ряда массовых грузов имеет общегосударственное значение.

В настоящей работе мы рассматривали вопрос о планировании перевозок, предполагая объемы производства и потребления продукта (в отдельных пунктах) заданными. Не входя в подробности, отметим, что предлагаемые методы могут быть использованы также при учете транспортных вопросов, связанных с планированием объема производства и потребления в различных пунктах. Однако последний вопрос не может решаться только с точки зрения транспорта, а для решения его требуется одновременно полный анализ условий производства и потребления в каждом пункте.

Для автоматического решения задач А и В могла бы быть предложена гидравлическая или электрическая модель. Мы не приводим их описаний, так как изложенный расчетный метод настолько прост, что изготовление этих моделей вряд ли целесообразно.

[8] Когда речь идет об углях разной калорийности, решение вопроса не подходит прямо под задачу А, но может быть к ней сведено.

КОММЕНТАРИЙ К СТАТЬЕ Л.В. КАНТОРОВИЧА И М.К. ГАВУРИНА 1949 г.

Публикуемая статья была написана в 1940 г. в соавторстве с Марком Константиновичем Гавуриным, учеником и одним из ближайших друзей Л.В. Канторовича. Профессор Ленинградского университета М.К. Гавурин (1911–1992) сотрудничал с Леонидом Витальевичем по многим направлениям его работы – функциональному анализу и численным методам, участвовал в конкретных расчетах (в том числе по атомному проекту) и разработке вычислительных устройств ("функциональный преобразователь"). Он активно поддерживал многие начинания Леонида Витальевича, в частности организацию в ЛГУ кафедры "Вычислительная математика" в 1948 г. и соответствующей специальности, а в 1959 г. – знаменитого VI курса, на котором он был одним из лекторов.

Эта статья хотя и вышла небольшим тиражом (2,5 тыс. экз.) в малодоступном сборнике[1] и с тех пор не переиздавалась и не переводилась, является одной из наиболее часто цитируемых работ Л.В. Канторовича. Так что и сама работа, где впервые полно, включая детальное описание метода решения, рассмотрена одна из наиболее красивых и показательных задач линейного программирования, и почти десятилетняя история попыток ее публикации представляют значительный интерес.

Тьяллинг Купманс, получивший в 1957 г. от Л.В. Канторовича вместе с брошюрой "Математические методы организации и планирования производства" также экземпляр и этой работы, в предисловии к публикации перевода брошюры в "Management Science"[2] так их оценивал: "*Обе статьи являются исключительными документами в истории науки управления, линейного программирования и экономической теории вообще. В статье 1949 г. обсуждаются однопродуктовая и многопродуктовая транспортные модели (в том числе с пустыми вагонами), модель с сетью ограниченной пропускной способности, а также приложение этих моделей к железнодорожной сети вокруг Москвы*".

Интересно, что Т. Купманс, несмотря на объяснение задержки публикации статьи с Гавуриным "трудностями военного времени", данное в письме Канторовича, прозорливо подозревал иную причину. "*Купманс сознаёт, что это позор для советских экономистов, что советские экономисты-плановики не смогли использовать эти методы во время Второй мировой войны*"[3], – пишет У.Х. Марлоу, вспоминая свой разговор с Т. Купмансом о подготовке публикации перевода брошюры 1939 г., состоявшийся в октябре 1958 г. "*Но этот вывод читатель должен сделать самостоятельно*", – настаивал Купманс, предостерегая от "*каких-либо редакторских действий, которые могли бы как-то отразиться на Канторовиче*", особенно учитывая "*текущие события, связанные с Нобелевской премией по литературе*".

Транспортная задача по постановке и методу решения является наиболее простой и естественной из оптимизационных задач. Неудивительно, что ее первые постановки появились раньше, чем общая концепция линейного программирования[4], а ее непрерывный вариант – задача Монжа – еще в 1781 г. Поэтому вызывают недоумение трудности, возникшие в связи с публикацией этой работы, если учесть, что Леонид Витальевич был в то время одним из самых известных ученых. Ведь в статье обсуждались вполне понятные технические проблемы, она была написана исключительно ясно и никак не затрагивала идеологию. Кроме того, сама тема статьи не была новой – к тому моменту уже имелось несколько публикаций, посвященных методам сокращения затрат при планировании перевозок[5].

---

[1] Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1949, С. 110–138. Сборник посвящен юбилеям ученых-транспортников: 75-летию академика В.Н. Образцова, генерал-директора движения первого ранга, 80-летию чл.-корр. АН Б.Н. Веденисова, генерал-директора пути и строительства второго ранга и 75-летию профессора В.А. Соковича, генерал-директора движения третьего ранга.

[2] **Koopmans T.C.** (1960): A Note About Kantorovich's paper "Mathematical Methods of Organizing and Planning Production" // *Management Science* . № 4. July.

[3] Из присланной Л.В. Канторовичу в 1958 г. переписки американских ученых по поводу подготовки публикации перевода "Математических методов организации и планирования производства" в "Management Science".

[4] Работы А.Н. Толстого (1930) и Хичкока (1941).

[5] **Толстой А.Н.** (1930): Методы нахождения наименьшего суммарного километража при планировании перевозок. В сб.: "*Планирование перевозок*". М.: Транспечать НКПС; **Толстой А.Н.** (1931): Теория и практика планирования перевозок грузов в пространстве. М.; **Толстой А.Н., Долгов А., Моисеенко В.Л.** (1931/1932): Задачи по планированию перевозок. М.; **Толстой А.Н.** (1939): Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // *Социалистический транспорт*. № 9. С. 28–51; **Толстой А.Н.** (1941): Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов. М.: Трансжелдориздат.

Обратимся к документам. В аннотации к работам, направлявшимся Ленинградским университетом в Совмин СССР в 1954 г., относительно статьи с М.К. Гавуриным написано следующее: "*Работа фактически выполнена в 1940 году и впервые направлена в печать в 1941 г.*[6] *Однако редакциями различных журналов ее опубликование задержалось до 1949 г., несмотря на положительные отзывы акад. В.Н. Образцова и акад. А.Н. Колмогорова*[7], *по-видимому, из соображений перестраховки. Математическая теорема в абстрактной форме опубликована в 1942 году в ДАН*[8]. *В 1950–1953 гг. появился целый цикл американских работ по данному вопросу, где методы, предложенные в работе, переоткрыты (не полностью). Работа направлялась в 1941 и 1943 г. в Министерство железнодорожного транспорта, но не получила никакого отзыва. В 1948–1949 гг. она была проверена в Центральном институте железнодорожного транспорта*".

Десятилетняя задержка публикации тем более обидна, что за то время, пока статья моталась по редакциям, ее содержание во многом была переоткрыто. Правда, американские работы еще не были доступны – исследования по линейному программированию, начавшиеся с 1947 г., оформлялись, как правило, в виде отчетов Rand Corporation. Так что первой открытой публикацией стал вышедший в 1951 г. сборник статей под редакцией Т. Купманса "Activity analysis of production and allocation". Установлению приоритета отчасти способствовала короткая заметка в Докладах АН "О перемещении масс" 1942 г. В этой работе, помимо более общего и важного математического содержания[9], Леонид Витальевич сформулировал квинтэссенцию и публикуемой статьи (теорему о потенциалах и указание на метод решения). Кроме того, там была и ссылка на статью, – было указано, что она находится в печати. В публикуемой статье детально, включая и вырожденный случай, изложен метод потенциалов для решения транспортной задачи и ряда ее модификаций.

Экономико-математические работы Л.В. Канторовича оставались неизвестными на Западе вплоть до конца 1950-х годов, когда и сами работы, и почти детективный сюжет их открытия стали для западных исследователей своего рода шоком. Стоит напомнить, что до середины 1950-х годов СССР был практически закрытой страной, и многие издания были недоступны западному читателю, что было связано в том числе с трудностями публикации самих работ. Рассматривая свои исследования в этом направлении как практические, Леонид Витальевич адресовал их не математикам[10], а прежде всего инженерам и экономистам. В результате идеологической цензуры многие экономические статьи так и остались неопубликованными[11], а написанная в 1942 г. книга "Экономический расчет...", ставшая основанием для присуждения Нобелевской премии, была издана в СССР лишь спустя 17 лет. Адресованные инженерам работы, видимо из-за новизны подхода, также проходили с трудом. Так, публикуемая работа и написанная в то же время статья по оптимальной распиловке бревен вышли с почти десятилетней задержкой.

[6] В своих воспоминаниях "Мой путь в науке" Леонид Витальевич указывает, что впервые статья "была сдана в печать в 1940 г. в журнал «Железнодорожный транспорт»". В его архиве сохранилось письмо из редакции от 3 декабря 1940 г. следующего содержания: "На основании постановления редакционной коллегии 22/XI (объем статей не должен превышать 10 000 знаков или 3 печатных полос), просим сократить Вашу статью на 50–60 стр.". Это означало сокращение статьи почти в десять раз.

[7] Отзыв Андрея Николаевича Колмогорова, к сожалению, не сохранился.

[8] **Канторович Л.В.** (1942): О перемещении масс // *ДАН*. Т. 37. № 7/8. С. 227–229. Эта заметка, по свидетельству Т. Купманса, послужила отправной точкой для открытия американскими специалистами основополагающих работ Л.В. Канторовича по линейному программированию. Обнаружив ссылки на нее в статьях 1952 и 1953 г. Мерилла Флада (Merrill M. Flood), Купманс в течение нескольких лет разыскивал ее, а найдя, отправил в ноябре 1956 г. письмо Л.В. Канторовичу. По свидетельству Т. Купманса, об этой заметке М. Флад узнал от математика Макса Фишмана, присутствовавшего на его лекции по транспортной задаче в декабре 1949 г. (Впрочем, весьма вероятно, что отправной точкой для самого М. Фишмана стала заметка 1948 г. "Об одной задаче Монжа" в "Успехах математических наук", где была ссылка на работу в ДАН.)

[9] В этой работе введена "транспортная метрика" в пространстве распределений масс: расстояние между двумя различными распределениями определяется как работа по перемещению, минимально необходимая для превращения первого распределения во второе. Это понятие широко используется в современной математике.

[10] Помимо упомянутой "О преремещении масс", вышла лишь одна весьма абстрактная математическая заметка: **Канторович Л.В.** (1940): Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // *ДАН*. Т. 28. № 3. С. 212–215.

[11] Некоторые из этих работ недавно опубликованы (см.: Леонид Витальевич Канторович, человек и ученый. М.: Изд-во СО РАН, 2002. Т. 1; 2004. Т. 2).

Несмотря на признание приоритета Л.В. Канторовича в постановке и исследовании задач линейного программирования, в зарубежной литературе неоднократно повторялся упрек в том, что он якобы не дал полного описания предлагаемых методов решения, а ограничился лишь общими указаниями в отличие от Дж. Данцига, который подробно описал каждый шаг симплекс-метода. Между тем объяснение того, почему Леонид Витальевич ограничился именно таким описанием методов решения соответствующих экстремальных задач, лежит на поверхности – в 1939 г. вычислительных машин еще не было, а для решения реальных задач вручную был необходим не стандартный подход к ним, а подход, учитывающий специфику задачи. И именно это давало результат. Например, В.А. Залгаллер, занимавшийся в 1948–1949 гг. расчетами наилучшего раскроя материалов в реальных производственных условиях, успешно решал эти задачи вручную, а они включали сотни ограничений. Решение задач такой размерности стандартным симплекс-методом потребовало бы огромного объема вычислений (даже для самых мощных вычислительных машин того времени)[12].

Что касается транспортной, то реальные задачи даже большой размерности несложно решать вручную, поэтому и алгоритм для нее был строго описан. Так что в отношении транспортной задачи отмеченный выше упрек абсолютно незаслужен, тем не менее он впервые был высказан именно в отношении этой задачи. В предисловии к переводу заметки "О перемещении масс" А. Чарнс (A. Charnes) писал: "*Задача отыскания эффективных методов для действительного решения специфических задач в настоящей статье не решена. В разработке таких методов мы находимся в настоящее время впереди русских*"[13].

Высказанное обвинение тем более несправедливо, что экземпляр совместной статьи с Гавуриным в то время уже был у Купманса, и она была доступна рецензенту. Более того, даже в рецензируемой Чарнсом заметке метод решения фактически описан: "*Доказанная теорема дает удобный способ проверки того, что данное перемещение масс минимальное. Именно для проверки достаточно попытаться строить потенциал для него тем способом, который приведен в доказательстве необходимости. При этом, если такое построение окажется невозможным, т.е. если перемещение не минимальное, то одновременно обнаружится способ уменьшения работы при перемещении, позволяющий постепенно подойти к минимальному перемещению*".

Основное содержание публикуемой статьи впервые было изложено в докладах обоих авторов "*Применение математических методов в вопросах планирования перевозок*"[14], прочитанных 26 февраля 1941 г. на совместном заседании группы математики и транспортной группы Ленинградского дома ученых.

Сохранился и предназначенный авторам экземпляр пятистраничного отзыва, подписанного академиком В.Н. Образцовым 10 июля 1942 г.: "*Возвращая данную мне для отзыва работу Канторовича «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок» и отзыв академика Колмогорова, считаю, со своей стороны, что статья интересна и подлежит напечатанию*", – пишет В.Н. Образцов в редакцию "Известий Отделения технических наук". Затем следует сам отзыв, большую часть которого занимает обзор известных рецензенту попыток математического подхода к проблемам, возникающим на транспорте, причем рецензент хотел бы поместить свой отзыв как критику в том же журнале. Его вывод: "*Тем не менее, предупреждая читателя о необходимости быть осторожным в применении теоретических формул, нужно всецело поддержать всякую попытку, в том числе и данную, теоретического разрешения таких сложных вопросов. Не следует забывать, что «сопротивление материалов» является очень*

---

[12] Судя по всему, именно идея симплекс-метода была первой, пришедшей в голову Канторовичу. Но он отверг ее из-за неэффективности. "И другой, геометрический метод постепенного перехода с грани на грань многогранника в направлении grad z представляется недостаточно эффективным" (рукописная заметка 1938 г.). Как вспоминал Данциг, и он поначалу сомневался в том, что симплекс-метод заработает даже при использовании ЭВМ.

[13] **Charnes A.** (1958): // *Management Science*. Vol. 5. № 1. P. 3.

[14] Это название тезисов доклада, и оно указано в извещении о заседании. В протоколе доклад назван: "О математическом решении одной транспортной задачи" (Архив ЛДУ, фонд 349, опись 2, № 131 – протокол транспортной секции и № 134 – протокол математической секции). Как указано в протоколе, председателем был А.А. Марков, присутствовали: А.Д. Александров, М.В. Березовский, М.В. Забеллин, Е.С. Ляпин и др., высказались: И.П. Натансон, Л.С. Каминский, И.Д. Белановский, Э.П. Лисевич. Г.Р. Лоренцу было поручено подготовить заметку о заседании в "Вестник АН".

сложным явлением и, тем не менее, после нескольких веков изучения оно превратилось в одну из наиболее точных математических наук. Когда-нибудь это произойдет и с транспортными проблемами. Предложения проф. Канторовича являются теоретически оригинальными и интересными".

Несмотря на этот в целом положительный отзыв, в 1944 г. редакция "Известий Отделения технических наук" возвращает статью[15], приложив выдержку из другого, более позднего, отзыва В.Н. Образцова: "*При наличии большого числа пунктов погрузки и выгрузки рекомендуемые т. Канторовичем методы решения путем последовательного приближения к плану будут чрезвычайно затруднительными. Поэтому в практике НКПС их применять будет почти невозможно. Необходимо предложить Л.В. Канторовичу разработать метод более простого определения потенциала каждого пункта погрузки для того, чтобы легко было дать картину правильного прикрепления пунктов выгрузки (исключая метод приближения в несколько ступеней).*

Если такой метод (одноступенчатого) решения задачи будет найден, то это будет ценное предложение для плановых и других работ.

На основании изложенного статью необходимо сократить и переработать".

Появление другого отзыва, вероятно, было связано с тем, что в 1941 г. Леонид Витальевич направил работу еще и в Наркомат путей сообщения[16], из которого она опять-таки могла попасть к В.Н. Образцову (во втором отзыве говорится именно о возможности использования работы в практике НКПС). Получив ответ из редакции "Известий АН ОТН", Леонид Витальевич переработал статью. Вот что он писал в редакцию: "*Одновременно с настоящим письмом направляю Вам переработанный текст находившейся на рассмотрении в редакции ОТН моей, совместной с М.К. Гавуриным, статьи «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок». Переработка произведена на основе отзыва и замечаний рецензента – акад. В.Н. Образцова. При этом изменено несколько и название статьи, а также она подвергнута некоторому сокращению*".

Кроме того, он направил письмо академику В.Н. Образцову: "*Глубокоуважаемый Владимир Николаевич! Редакция ОТН предложила мне переработать статью в соответствии с Вашим отзывом и замечаниями. Исправленный текст статьи я направил на днях обратно в редакцию.*

Имея в своем распоряжении экземпляр работы, я еще раз убедился по Вашим многочисленным замечаниям, как внимательно она была рассмотрена Вами. Очень благодарен Вам за Ваше внимание и замечания к работе.

Кроме того отзыва, копию которого Вы в свое время любезно направили мне, Вы, по-видимому, позднее давали еще один отзыв о моей работе, из которого редакция дала только краткую выписку. Кроме замечания о переработке изложения, в нем содержится указание, что вследствие сложности метода, вызванной применением последовательных приближений, его использование в практике НКПС не представляется возможным.

В соответствии с Вашими указаниями я упростил изложение метода, а также саму схему его применения, в особенности, для случая распадения грузопотоков на несвязанные системы.

Мне представляется, что в таком виде использование метода в практике НКПС вполне возможно и целесообразно, и то, что это не осуществлено до сих пор, вызвано не столько сложностью метода, сколько отсутствием у соответствующих работников времени или желания вникнуть в него.

---

[15] "3.III.1944, Редакция "Известий Отделения технических наук" АН СССР: Тов. Канторович Л.В. Согласно указанию Зам. ответственного редактора, члена-корреспондента АН СССР В.И. Вейца, Редакция направляет Вам копию отзыва академика В.Н. Образцова о Вашей статье "Применение математических методов в вопросах планирования перевозок", а также и статью. Зав. редакцией О.Н. Соловьева".

[16] Одновременно с этой статьей Леонид Витальевич направлял в НКПС еще и две записки с предложением мероприятий, которые могут повысить эффективность работы транспорта, однако ни одна из этих работ не встретила понимания. Отвечая на вопросы немецкого историка науки Сони Бронтес (см. [Бронтес, 2002, 1, с. 21]), Канторович писал, что в 1948–1949 гг. он, наконец, смог ознакомиться с реальными "*работами по планированию перевозок, которые велись в Министерстве путей сообщения*".

Задача А (о прикреплении пунктов производства к пунктам потребления) постоянно решается практически в Отделе народно-хозяйственных перевозок НКПС и в Наркоматах. О нужности этой задачи свидетельствует и выпуск Трансжелдориздатом книги А. Толстого, посвященной специально способам решения этой задачи.

В предлагаемом мною приеме проверка правильности плана перевозок с помощью потенциала производится очень быстро и не требует последовательных приближений, как в том случае, когда план дан в виде схемы, так и в виде "шахматки", если только расстояния между пунктами уже найдены. Таким образом, во всяком случае, метод может использоваться для проверки оперативных планов Наркоматов в отделе Народнохозяйственных перевозок. Однако и исправление плана перевозок, если он окажется не наилучшим, а также построение плана, хотя и могут потребовать нескольких приближений, осуществляются с такой простотой и требуют так мало времени, что это не может служить препятствием к использованию метода. Работник со средним образованием может легко научиться производить такую работу за 30–40 минут.

Что касается задачи Б (с загруженными магистралями), то она в определенной постановке также представляется вполне реальной. То, что она не решается в настоящее время, связано, пожалуй, именно с отсутствием удовлетворительного метода решения её. При наличии же его, она также может войти в практику НКПС.

Во всяком случае, вопрос о возможности использования этого метода будет разрешен, когда с ним смогут ознакомиться работники транспорта и транспортных ВУЗ'ов, что будет достигнуто скорейшим опубликованием работы. Задержка в этом ставит меня в трудное положение, так как за это время я получил уже несколько запросов от лиц, интересующихся работой и желающих с ней познакомиться, которых я не мог удовлетворить".

Несмотря на сделанные изменения, 8 апреля 1945 г. Леонид Витальевич получает из редакции "Известий ОТН" за подписью академика И.П. Бардина не очень грамотно составленный отказ: "*Проф. Канторович Л.В. В связи с пересмотром редакционного портфеля и недостатком места в журнале «Известия ОТН», при этом направляется Ваша статья «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков»*".

Леонид Витальевич предлагает статью Ленинградскому институту инженеров железнодорожного транспорта, но и оттуда в апреле 1946 г. получает отказ "*ввиду невозможности ее помещения в Сборнике Института*".

Неожиданно в апреле 1948 г. приходит письмо от сотрудника Секции транспортных проблем АН А.П. Петрова: "*Уважаемый профессор Канторович! Мною просмотрена написанная вами совместно с доцентом М.К. Гавуриным статья о применении математических методов в вопросах анализа грузопотоков. Необходимо при Вашем ближайшем посещении Москвы встретиться (как мы договаривались) и условиться о возможности подготовки статьи к печати. Ввиду срочности вопроса крайне желательно было бы эту встречу осуществить скорее*".

Учитывая предысторию, вызывает удивление "срочность вопроса". В архиве Л.В. Канторовича не удалось найти каких-либо документов, дающих намек на причину изменения отношения к работе, а тем более – причину "срочности". Можно лишь высказать предположение, что "срочность" связана с получением какой-то информации о начавшихся в США работах в этом направлении, но, разумеется, это предположение ни на чем не основано (кроме самого факта наличия таких разработок).

И действительно, дальнейшее продвижение работы шло очень оперативно. Леониду Витальевичу предлагают поставить доклад на семинаре, и он указывает ближайший, приемлемый для себя срок, который и принимается.

Семинар – совместный семинар Отдела методов разработки Института горного дела АН и Секции транспортных проблем АН – состоялся 5 мая 1948 г. Сохранился его протокол. Помимо названных в его работе приняли участие представители Института механики АН, ВНИИ Железнодорожного транспорта, Главного Грузового управления МПС, Московского горного института и других организаций. В обсуждении доклада участвовали академик Л.Д. Шевяков, академик А.М. Терпигорев (от Института горного дела), академик В.Н. Образцов, Ф.И. Шаульский, А.П. Петров (от Секции транспортных проблем) и др. Было принято следующее решение:

"1. Методы решения задач о нахождении рациональной системы грузопотоков, предложенные в работе и опирающиеся на некоторые общие математические теоремы, оригинальны и имеют определенные преимущества по сравнению с имеющимися ныне в отношении простоты и уверенности в правильности полученного результата.

2. Считать целесообразным помещение статьи, содержащей изложение данного метода, с учетом необходимых исправлений в одном из журналов Академии наук СССР с тем, чтобы она могла быть обсуждена заинтересованными учреждениями и лицами и мог быть поставлен вопрос о практическом использовании предлагаемого метода".

В заключение следует отметить, что к проблемам транспорта Леонид Витальевич многократно обращался на протяжении многих лет, в том числе к вопросам организации городского транспорта и установления тарифов на него в начале 1960-х (в том числе внедренный в 1961 г. тариф на такси) и тарифов на железнодорожном транспорте[17]. Наконец, стоит напомнить о его работе в Транспортном совете Академии наук, который он возглавлял в течение последних десяти лет жизни, выступая организатором научных работ по транспорту в АН и основным докладчиком на многих научных конференциях и совещаниях, созываемых по инициативе Совета.

В.Л. Канторович

[17] **Канторович Л.В., Журавель А.И.** (1974): Роль транспортного фактора при размещении производства // *Вопросы экономики.* № 3. С. 79–90.