ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 122–130

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

МОДЕЛЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ В ЕДИНОЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

© 2011 г. **В.А. Булавский**

(Москва)

В работе на основе схемы кооперативной игры с побочными платежами изучаются два варианта модели объединения производителей реальных благ в единое экономическое пространство. В одном варианте за основу берутся цены производимых благ, установившиеся вне модели. При этом целью управления (перераспределения ресурсов) является валовый выпуск благ по внешним ценам. Во втором варианте за основу берется структура выпуска благ. Цены на блага при этом определяются внутри экономической системы, исходя из стремления увеличить выпуск благ при данной их структуре (ассортименте). Обсуждается сравнение на основе изучаемых вариантов модели централизованной экономики с рыночной.

Ключевые слова: кооперативная игра с побочными платежами, объединение в единое экономическое пространство, цели управления экономикой.

ВВЕДЕНИЕ

Когда речь идет о разумном хозяйствовании, то главным образом имеется в виду рациональное использование ресурсов, которые тратятся на достижение поставленных целей. Если рассматривается одна производственная единица, то чаще всего предполагают, что о рациональном использовании своих ресурсов она позаботится сама. Иначе обстоит дело, если моделируется кооперация нескольких производственных единиц (предприятий, фирм, регионов, стран и т.п.). В этом случае рациональное использование ресурсов должно допускать их объединение с последующим перераспределением и соответствующее разделение общей прграммы работы.

В известной монографии “Экономический расчет наилучшего использования ресурсов” (Канторович, 1959, с. 290–291) обсуждается задача о совместной работе комплекса предприятий, на которых производится сходная номенклатура товаров. В соответствии с общей направленностью монографии предполагается, что деятельность каждого предприятия описывается некоторой задачей линейного программирования. При этом основной акцент делается на распределении программы работы (задания) между предприятиями и на использовании множителей Лагранжа (объективно обусловленных оценок) для проверки оптимальности выбранного распределения программы. Рекомендация автора состоит в объединении задач линейного программирования, описывающих деятельность предприятий и нахождении оптимального плана для этой объединенной задачи. При этом распределение заданий, конечно, должно обеспечиваться выделением ресурсов для их выполнения. Поскольку имелась в виду система хозяйствования, принятая в Советском Союзе, то подразумевалось именно выделение ресурсов, а не их перераспределение.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение описанной темы, но в несколько более общих обстоятельствах. Основных отличий три. Во-первых, производственные единицы не предполагаются уже объединенными в управляемое из центра единое экономическое пространство, а исходно считаются вполне самостоятельными субъектами модели. Каждый из этих субъектов модели обладает собственным объемом ресурсов и механизмом их переработки в товары. Во-вторых, ввиду полной самостоятельности субъектов их объединение (полное или частичное) в единое экономическое пространство рассматривается в рамках игровой модели, в качестве которой используется кооперативная игра с побочными платежами. В-третьих, в модели фигурируют цены на производимые товары. По этим ценам рассчитывается прибыль отдельных участников модели, а также возможности различных коалиций.

1. УЧАСТНИКИ МОДЕЛИ

Рассматривается статическая (точнее, однопериодная) модель, в которой фигурируют два вида благ: m видов ресурсов и n видов товаров, в которые и перерабатываются ресурсы. По своей номенклатуре ресурсы и товары могут иметь значительное пересечение (вплоть до полного совпадения). Но так как ресурсы имеются в наличии к началу периода, а товары получаются к концу периода, то корректно ресурсы и товары рассматривать как разные блага. Перерабатывают ресурсы в товары участники модели, число которых обозначим через l. Будем также обозначать через $p = (p^1,\dots, p^n)$ строку цен товаров, а через $r = (r^1,\dots, r^m)^t$ столбец количеств ресурсов. Верхний индекс t обозначает транспонирование. Сам механизм переработки ресурсов в товары нас интересовать не будет. Вместо этого для каждого участника модели с индексом k зададим функцию $\varphi_k(p, r)$, значение которой трактуется как выручка, получаемая субъектом k, если он оптимально использует ресурсы в объемах r и продает полученные из них товары по ценам p. Автор надеется, что стандартные предположения – выпуклость функций φ_k по переменной p и их вогнутость по переменной r – будут приняты специалистами по математическому программированию с пониманием. Для образца можно сослаться на стандартную задачу выпуклого программирования или (более общо) на понятие обобщенной выпуклой программы (Rockafellar, 1970, разд. 29).

Напомним, что обобщенную выпуклую программу можно задать следующим образом. На множестве D допустимых значений r задано точечно-множественное отображение $F\colon D \to R^n$, значение которого $F(r)$, $r \in D$, трактуется как возможные выпуски товаров из ресурсов r. Если $\bar r \in D$, $\bar x \in F(\bar r)$, $\hat r \in D$, $\hat x \in F(\hat r)$, то при $\lambda \in (0, 1)$ можно считать, что в течение периода работы модели доля λ времени идет на переработку ресурсов $\bar r$ в товары $\bar x$ (т.е. получаем товары $\lambda\bar x$ и тратим ресурсы $\lambda\bar r$), а доля времени $(1-\lambda)$ идет на переработку ресурсов $\hat r$ в товары $\hat x$ (т.е. получаем товары $(1-\lambda)\hat x$ и тратим ресурсы $(1-\lambda)\hat r$). Таким образом, если считать множество D выпуклым, то множество

$$\lambda F(\bar r) + (1-\lambda)F(\hat r) = \{\lambda\bar x + (1-\lambda)\hat x \mid \bar x \in F(\bar r),\quad \hat x \in F(\hat r)\}$$

является подмножеством образа $F(\lambda\bar r + (1-\lambda)\hat r)$.

В частности, если принять $\bar r = \hat r = r$, $r \in D$, то множество-образ $F(r)$ является выпуклым множеством. Естественно также считать, что $F(\bar r) \subset F(\hat r)$, если $\bar r \le \hat r$ по всем компонентам, т.е. возможности производственного субъекта не уменьшаются при увеличении у него количества ресурсов. Будем считать, что образы $F(r)$ являются непустыми, ограниченными и замкнутыми множествами. Подобные предположения вполне традиционны для экономико-математического моделирования, и аргументы в пользу таких предположений здесь обсуждаться не будут.

Выберем теперь некоторый набор цен $p \in R^n$ и положим

$$\varphi(p, r) = \max\{px \mid x \in F(r)\}. \tag{1}$$

Так как множества $F(r)$ являются непустыми выпуклыми компактами, то величина максимальной выручки $\varphi(p, r)$ определена при всех $p \in R^n$ и $r \in D$. Эта величина является выпуклой по переменной p как максимум линейных по p функций и, как это видно из нижеследующих рассуждений, вогнутой по переменной r. Действительно, если $\lambda \in (0,1)$, $r = \lambda\bar r + (1-\lambda)\hat r$, то так как $F(r) \supset \lambda F(\bar r) + (1-\lambda)F(\hat r)$, получаем согласно (1)

$$\varphi(p, r) \ge \max\{p(\lambda\bar x + (1-\lambda)\hat x) \mid \bar x \in F(\bar r), \hat x \in F(\hat r)\} = \lambda\varphi(p, \bar r) + (1-\lambda)\varphi(p, \hat r).$$

Что и доказывает вогнутость зависимости от r.

Используя терминологию выпуклого анализа, можно сказать, что при фиксированном r функция $\varphi(p, r)$ является опорной функцией для выпуклого замкнутого множества $F(r)$. Напомним, что множество точек $x \in F(r)$, при которых достигается максимум в (1) в точности совпадает с субдифференциалом $\partial_p\varphi(p, r)$ по переменной p, т.е. каждый субградиент по переменной p функции $\varphi(p, r)$задает оптимальный выпуск товаров при ресурсах r и ценах на товары p.

Непрерывность по переменной p при фиксированном r следует из выпуклости $\varphi(p, r)$ по p и из того, что эта функция определена (имеет конечные значения) во всех точках p конечномерного пространства R^n. Чтобы получить непрерывность функции дохода по переменной r при фиксированном p, достаточно потребовать, чтобы точечно-множественное отображение $F\colon r \in D \to$

$F(r) \subset R^n$ было непрерывно (по Хаусдорфу). Содержательно это означало бы, что малые изменения количеств ресурсов не могут резко изменить возможности производственного субъекта, т.е. рассматривается обстановка спокойного производства. Ввиду вогнутости по переменной r и конечномерности пространства можно просто предположить, что множество D открытое. Однако в дальнейшем мы будем предполагать, что функция φ для каждого участника модели непрерывная по паре переменных. Заметим еще, что функция дохода $\varphi(p, r)$ по переменной p получилась положительно однородной первой степени. Так как цены p всегда будут считаться неотрицательными и не сплошь нулевыми, то можно ограничиться рассмотрением цен из стандартного симплекса

$$P = \left\{ p = (p^1, \ldots, p^n) \,|\, p^j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n; \;\; pa = \sum_{j=1}^{n} p^j a^j = 1 \right\}, \tag{2}$$

где столбец $a = (a^1, \ldots, a^n)^t > 0$ задает некоторую корзину товаров, а верхний индекс t, напомним, обозначает транспонирование. Сформулируем теперь свойства участников рассматриваемой модели в виде следующего предположения.

Предположение. *Пусть на декартовом произведении непустых открытых выпуклых множеств $P_0 \subset R^n$ и $D_0 \subset R^m$ заданы непрерывные функции φ_k, $k = 1, \ldots, l$, двух аргументов $p \in P_0$ и $r \in D_0$, каждая из которых является выпуклой по переменной p и вогнутой по переменной r. Кроме того, по переменной p функции φ_k будем считать положительно однородными первой степени. Для участника (субъекта) модели с индексом k задан непустой выпуклый компакт $D_k \subset D$, служащий множеством допустимых значений переменной r для этого участника, и начальный объем $r_k^0 \in D_k$ ресурсов, которыми распоряжается участник k. Предполагается, что $P \subset P_0$. Наконец, предположим, что начальные запасы ресурсов не находятся на пределе работоспособности, т.е. при каждом k существует такой столбец $\hat{r}_k \in D_k$, что $\hat{r}_k < r_k^0$.*

Напомним, что множество субградиентов $\partial_p \varphi_k(p, r_k)$ трактуется как множество оптимальных вариантов выпуска товаров при ресурсах r_k и ценах на товары p. Подкрепить такую трактовку можно на основе положительной однородности функций $\varphi_k(p, r_k)$ по переменной p. Действительно, если взять $\alpha \in (0, 1)$, то при $x \in \partial_p \varphi_k(p, r_k)$ будем иметь

$$(1 \pm \alpha)\varphi_k(p, r_k) = \varphi_k((1 \pm \alpha)p, r_k) \geq \varphi_k(p, r_k) \pm \alpha px,$$

т.е. получим $\pm\alpha\varphi_k(p, r_k) \geq \alpha px$. Отсюда следует равенство $\varphi_k(p, r_k) = px$. Таким образом, субградиент (столбец) x играет роль выпуска товаров.

2. ОБЪЕДИНЕНИЕ НА ОСНОВЕ РЫНКА РЕСУРСОВ

В предыдущем разделе описан состав участников модели. Чтобы завершить описание кооперативной игры с побочными платежами, в рамках которой будет моделироваться объединение участников в тотальную коалицию, нужно для каждой коалиции $S \subset \{1, \ldots, l\}$ указать ее возможности $v(S)$. Так как рынок товаров в данном варианте модели не рассматривается, предположим, что каким-то образом выбраны и зафиксированы цены товаров p. Под возможностями коалиции S будем понимать максимальную выручку, которую при заданных ценах на товары можно получить, если между членами коалиции перераспределить имеющиеся у них изначально ресурсы. Таким образом,

$$v(S) = \max \left\{ \sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k) \,|\, r_k \in D_k, \; k \in S; \;\; \sum_{k \in S} r_k \leq \sum_{k \in S} r_k^0 \right\}. \tag{3}$$

Функцию $v(\cdot)$ часто называют характеристической функцией игры с побочными платежами. Обычно считается, что тотальная коалиция $T = \{1, \ldots, l\}$ в игре пригодна для объединения, если ее возможностей хватает для такого распределения между участниками, которое не может превзойти ни одна коалиция. Здесь, конечно, нет возможности описывать сколько-нибудь полно игры с побочными платежами. Отметим лишь, что ядром $c(v)$ кооперативной игры с побочными платежами принято называть множество распределений $(z_1,\dots, z_l)$, удовлетворяющих требованиям:

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = v(\{1, \dots, l\}) = v(T), \tag{4}$$

$$\sum_{k\in S} z_k \geq v(S) \text{ при всех } S \subset T,\ S \neq T. \tag{5}$$

Именно распределения из ядра $c(v)$ можно использовать для поддержания устойчивости тотальной коалиции.

Лемма. *В условиях предположения задача* (3) *для любой коалиции $S \subset T$ имеет решение r_k^S, $k \in S$. При этом существует строка $\pi_S = (\pi_S^1, \dots, \pi_S^m)$ (множители Лагранжа), для которой $\varphi_k(p, r_k^S) \geq \varphi_k(p, r_k) - \pi_S[r_k - r_k^S]$ для всех $r_k \in D_k$, $k \in S$.*

Доказательство. Решение задачи (3) существует, так как это задача о максимуме непрерывной функции на непустом выпуклом компакте. Кроме того, это задача выпуклого программирования, а согласно предположению для нее выполнено условие Слейтера: точку Слейтера образует набор столбцов $\hat{r}_k$, $k \in S$. Поэтому существует строка множителей Лагранжа π_S, при которой функция Лагранжа

$$\pi_S\left[\sum_{k\in S} r_k - \sum_{k\in S} r_k^0\right] - \sum_{k\in S} \varphi_k(p, r_k)$$

в точке решения $(r_k^S(k \in S)$ достигает минимума на декартовом произведении множеств D_k. Так как функция Лагранжа распадается по переменным r_k, то по переменной r_k в точке r_k^S на своем множестве D_k достигает минимума каждая из величин $\pi_S[r_k - r_k^0] - \varphi_k[(p, r_k)$. Таким образом, $[-\varphi_k(p, r_k)] \geq [-\varphi_k(p, r_k^S)] - \pi_S[r_k - r_k^S]$ при всех $r_k \in D_k$. ■

Непустота ядра $c(v)$ означает достаточную силу тотальной коалиции T: распределив свою выручку $v(T)$ согласно некоторому распределению из ядра $c(v)$, она обеспечивает доход своим членам не меньший, чем тот, на который они могли бы рассчитывать, состоя в любой другой коалиции. Отметим также, что для пустой коалиции оказывается $v(\varnothing) = 0$. Следующая теорема утверждает, что ядро, определяемое характеристической функцией (3), непустое.

Теорема 1. *Ядро игры с побочными платежами для характеристической функции* (3) *непустое.*

Доказательство. Рассмотрим задачу линейного программирования о минимизации левой части равенства (4) при ограничениях (5). Система ограничений (5) совместная, так как значения переменных z_k можно взять сколь угодно большими. В то же время среди ограничений системы (5) имеются ограничения вида $z_k \geq v(\{k\})$, $k = 1,\dots, l$. Поэтому на множестве допустимых z минимизируемая форма ограничена снизу:

$$\sum_{k=1}^{l} z_k \geq \sum_{k=1}^{l} v(\{k\}).$$

Таким образом, рассматриваемая задача линейного программирования имеет решение. Обозначим его через $z^T = (z^{1T}, \dots, z^{lT})$. Если

$$\Delta = v(T) - \sum_{k=1}^{l} z^{kT} \geq 0, \tag{6}$$

то, положив $z^k = z^{kT} + \Delta/l$ при всех $k \in T$, получим распределение, удовлетворяющее условиям (4) и (5), т.е. принадлежащее ядру игры. Таким образом, нужно лишь доказать неравенство (6).

Задача линейного программирования, двойственная к только что рассмотренной, может быть описана следующим образом. Положим для краткости

$$SS_k = \{S \subset T \mid S \neq T,\ k \in S\}. \tag{7}$$

Требуется определить значения переменных Y_S, $S \subset T$, $S \neq T$, удовлетворяющих условиям неотрицательности $Y_S \geq 0$, системе уравнений

$$\sum_{S \in SS_k} Y_S = 1, \quad k = 1, \ldots, l \tag{8}$$

и максимизирующих линейную форму

$$\sum_{\{S \subset T, S \neq T\}} v(S) Y_S .$$

Эта двойственная задача имеет решение наряду с прямой задачей, причем оптимальное (максимальное) значение целевой формы такое же, как и у минимизируемой формы прямой задачи, использованное в (6) в качестве вычитаемого. Таким образом, достаточно показать, что при любых допустимых значениях переменных Y_S имеет место неравенство

$$\sum_{S \subset T, S \neq T} v(S) Y_S \leq v(T).$$

Проведем оценку. Для каждой коалиции S, как и раньше, обозначим через r_k^S, $k \in S$, решение задачи (3), существующее согласно лемме. Таким образом,

$$v(S), = \sum_{k \in S} \varphi(p, r_k^S); \quad r_k^S \in D_k, \; k \in S; \; \sum_{k \in S} r_k^S \leq \sum_{k \in S} r_k^0 .$$

Пусть Y, S, $S \subset T$, $S \neq T$ – допустимые значения переменных в двойственной задаче. Имеем

$$\sum_{S \subset T, S \neq T} v(S) Y_S = \sum_{S \in T, S \neq T} \left\{ Y_S \sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) \right\}.$$

Поменяв порядок суммирования в правой части последнего равенства, получим

$$\sum_{S \subset T, S \neq T} v(S) Y_S = \sum_{k=1}^{l} \sum_{S \in SS_k} Y_S \varphi_k(p, r_k^S),$$

где SS_k, напомним, определено формулой (7). Ввиду вогнутости функций φ_k по второму аргументу, равенств (8) и неотрицательности Y_S имеем

$$\sum_{S \in SS_k} Y_S \varphi_k(p, r_k^S) \leq \varphi_k(p, \tilde{r}_k), \text{ где } \tilde{r}_k = \sum_{S \in SS_k} Y_S r_k^S .$$

Проделав преобразования в обратном порядке, получим

$$\sum_{k=1}^{l} \tilde{r}_k = \sum_{k=1}^{l} \sum_{S \in SS_k} Y_S r_k^S = \sum_{S \subset T, S \neq T} \sum_{k \in S} Y_S r_k^S = \sum_{S \subset T, S \neq T} \left[Y_S \sum_{k \in S} r_k^S \right] \leq$$

$$\leq \sum_{S \subset T, S \neq T} \left[Y_S \sum_{k \in S} r_k^0 \right] = \sum_{k=1}^{l} \left[r_k^0 \sum_{S \in SS_k} Y_S \right] = \sum_{k=1}^{l} r_k^0 .$$

Таким образом, $\sum_{S \in T, S \neq T} v(S) Y_S \leq \sum_{k=1}^{l} \varphi_k(p, \tilde{r}_k)$, причем $\sum_{k=1}^{l} \tilde{r}_k \leq \sum_{k=1}^{l} r_k^0$, т.е. согласно (3) $\sum_{S \subset T, S \neq T} v(s) Y_S \geq v(T)$. ■

Обсудим теперь работу тотальной коалиции. Сначала предположим, что наша экономика управляется из политического центра. Имеющиеся у каждого участника модели начальные ресурсы в количествах r_k^0 можно рассматривать как его резерв на свои внутренние нужды. В денежном выражении его можно оценить не прибегая к множителям Лагранжа π_T, о которых шла речь в лемме. Если участник k потратит свои начальные ресурсы для производства, то при их оптимальном использовании он заработает сумму денег $v(\{k\})$ (по ценам на товары p). Но при централизованном управлении все ресурсы объединяются и подлежат перераспределению. Для устойчивости тотальной коалиции участнику k хорошо бы сумму $v(\{k\})$ вернуть. При оптимальном распределении задания и ресурсов центр, владеющий всеми товарами, произведенными тотальной коалицией, получит валовый доход $v(T)$. Выбрав распределение $(z_k,\ k \in T)$ из непустого ядра $c(v)$, центр свой валовый доход $v(T)$ распределит между участниками тотальной коалиции. При этом в силу определения ядра для каждого участника будет выполнено неравенство $z_k \geq v(\{k\})$, так что компенсация за ресурсы окажется достаточной. Можно и не выдавать все z_k, а сэкономить неотрицательную сумму $z_k - v(\{k\})$ для других нужд системы.

Если трактовать выпущенные товары как ресурсы для следующего периода времени, то этот процесс можно превратить в динамический: обобществленные выпущенные товары компенсируются распределением из следующего ядра и т.д. Отметим, что при такой интерпретации множители Лагранжа π_T играют ту же роль, что и объективно обусловленные оценки в монографии Л.В. Канторовича: они лишь подтверждают оптимальность выбранного распределения ресурсов и заданий.

Предположим, что перераспределение ресурсов осуществляется в рамках рыночной экономики. Цены p на товары все еще предполагаются заданными извне. В качестве равновесных цен на рынке ресурсов хорошо бы смотрелись множители Лагранжа π_T, о которых говорится в лемме. Действительно, если задачу (3) рассмотреть при $S = T$, то функция Лагранжа для нее будет иметь вид:

$$\pi_T\left[\sum_{k\in T} r_k - \sum_{k\in T} r_k^0\right] - \sum_{k\in T} \varphi_k(p, r_k).$$

Множители Лагранжа π_T подбираются так, что на искомом решении функция Лагранжа минимизируется по переменным r_k на множествах D_k. Это, как уже отмечалось в доказательстве леммы, сводится к тому, что по каждой переменной r_k на своем множестве D_k достигает минимума величина

$$\pi_T[r_k - r_k^0] - \varphi_k(p, r_k),$$

т.е. максимизируется чистый доход $\varphi_k(p, r_k) - \pi_T r_k$ на множестве D_k. Проблема состоит в бюджетных ограничениях $\pi_T[r_k - r_k^0] \leq 0$, которые присутствуют при стандартном описании модели рынка.

Выше при рассмотрении варианта централизованной экономики эта проблема была снята тем, что центр рассчитывался за обобществленные ресурсы деньгами, полученными от реализации выпущенной продукции. В варианте с рыночной экономикой можно поступить аналогично: позволить взять кредит для покупки ресурсов под обеспечение выпускаемой продукции. Фактически это те же действия: дать деньги для покупки ресурсов или дать ресурсы, а потом забрать продукцию (или деньги от ее реализации). Таким образом, оказывается, что граница между централизованной и рыночной экономиками стирается. Нужно лишь чтобы в централизованной экономике решения принимались рациональные, а в рыночной была развита гибкая система кредитования. Остаются, конечно, различия морального плана, но это уже находится за рамками рассматриваемой модели.

В заключение раздела отметим, что связи между рынками благ и кооперативными играми с побочными платежами посвящено значительное число работ, например монография Розенмюллера (Rosenmüller, 1971).

3. ОБЪЕДИНЕНИЕ НА ОСНОВЕ РЫНКА РЕСУРСОВ И РЫНКА ТОВАРОВ

Следуя модели Л.В. Канторовича (Канторович, 1959, с. 290, 291), в этом разделе будем интересоваться корзиной товаров (ассортиментным набором), задаваемой столбцом $a > 0$, использованным при масштабировании цен на товары в формуле (2). Для коалиции S рассмотрим задачу о седловой точке функции

$$\sum_{k\in S} \varphi_k(p, r_k) \tag{9}$$

при $p \in P$ и $(r_k, k \in S) \in R_S$, где для краткости использовано обозначение

$$R_S = \left\{(r_k,\ k \in S) \,|\, r_k \in D_k,\ k \in S;\ \sum_{k \in S} r_k \le \sum_{k \in S} r_k^0\right\}. \tag{10}$$

Так как функция (9) – выпукло-вогнутая и непрерывная, а множества P и R_S являются непустыми выпуклыми компактами, то для этой функции на указанных множествах существует седловая точка, т.е. пара

$$[p_S, (r_k^S,\ k \in S)] \in P \times R_S,$$

удовлетворяющая неравенствам

$$\sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) \ge \sum_{k \in S} \varphi_k(p_S, r_k^S) \ge \sum_{k \in S} \varphi_k(p_S, r_k) \tag{11}$$

при всех $p \in P$, $(r_k, k \in S) \in R_S$.

Таким образом, теперь набор цен на товары и вариант перераспределения ресурсов между участниками модели определяются совместно. Нетрудно понять, что если в задаче (3) положить $p = p_S$, то ее решением будет как раз $(r_k^S, k \in S)$. Об этом говорит правое неравенство в (11).

Рассмотрим теперь левое неравенство в (11). Оно означает, что при заданных r_k^S, $k \in S$, цены p_S являются решением следующей задачи выпуклого программирования:

$$\hat{v}(S) = \min\left\{\sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) \,|\, p \in P\right\}. \tag{12}$$

Если вспомнить описание (2) множества P, то найдем, что точка p_S минимизирует значение функции Лагранжа для задачи (12)

$$\sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) - \lambda^S\left[\sum_{j=1}^{n} p^j a^j - 1\right] = \sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k)^S - \lambda^S(pa - 1)$$

по переменной $p \in R_+^n$, т.е. на неотрицательном ортанте пространства R^n. Если вспомнить, что все функции φ_k определены для переменной p из открытого множества $P_0 \subset R^n$, то согласно теореме Моро–Рокафеллара субдифференциал по p целевой функции в задаче (11) равен сумме субдифференциалов по p функций φ_k. Таким образом, существуют такие столбцы $x_k^S = (x_k^{1S}, \ldots, x_k^{nS})' \in \partial_p \varphi_k(p_S, r_k^S)$, что

$$\sum_{k \in S} x_k^S \ge \lambda^S a, \text{ причем } \sum_{k \in S} x_k^{jS} = \lambda^S a^j, \text{ если } p_S^j > 0.$$

В этом варианте поведения коалиций участников модели множитель Лагранжа λ^S для задачи (12) показывает число комплектов товаров a, которое можно сформировать из общего выпуска товаров (при оптимальном для цен p_S поведении участников коалиции S). Цены же $p_S \in P$ выбираются так, что "лишние" товары (не использованные полностью для формирования комплектов) имеют нулевую цену. Поэтому называть решение p_S задачи (12) ценами не вполне корректно: они получены не в силу равновесия на каком-либо рынке товаров, а согласно требованию производить продукцию комплектно. Впрочем, такое требование можно рассматривать как эквивалент рынка. Заметим, что наличие в общем выпуске товаров сверх $\lambda^S a$ свидетельствует о том, что эти товары производятся попутно, как побочный продукт. Отметим также, что в силу нулевых цен для избыточных товаров валовый (по ценам p_S) выпуск товаров совпадает с валовой по тем же ценам оценкой комплектного выпуска $\lambda^S a$ из λ_S комплектов. Так как цена комплекта по ценам p_S равна единице, то валовый выпуск $\hat{v}(S)$ совпадает с числом выпущенных комплектов товаров. Напомним, что одновременно выбирается распределение ресурсов $(r_k^S,\ k \in T)$, обеспечивающее максимальный валовый выпуск товаров, т.е. максимальное число комплектов. Следует, конечно, оговориться, что поведение отдельных участников коалиции определяется их стремлением максимизировать выручку за произведенные товары. Вопрос о комплектации их не интересует. Именно выбор цен p_S обеспечивает нацеленность коалиции S на выпуск комплектной продукции.

Рассмотрим кооперативную игру с побочными платежами, определяемую характеристической функцией $\hat{v}(S)$, $S \subset T$.

Теорема 2. *Ядро $c(\hat{v})$ игры с характеристической функцией $\hat{v}(\cdot)$ непустое.*

Доказательство. Для тотальной коалиции T в игре с характеристической функцией $\hat{v}(\cdot)$ определим цены p_T и соответствующее им распределение ресурсов $(r_k^T,\ k \in T)$. Если в задаче (3) положить $p = p_T$, то в силу правого неравенства в (11) распределение ресурсов $(r_k^T,\ k \in T)$ при $S = T$ будет решением задачи (3). То есть при таком выборе цен p окажется, что $v(T) = \hat{v}(T)$. С другой стороны, для каждой коалиции $S \subset T$ имеем $\hat{v}(S) \le \sum_{k \in S} \varphi_k(p_T, r_k^S) \le v(S)$, так как $\sum_{k \in S} r_k^S \le \sum_{k \in S} r_k^0$. Напомним, что $v(S)$ согласно (3) определено здесь для $p = p_T$. По теореме 1 ядро $c(v)$ непустое, т.е. существует распределение $z = (z_k,\ k \in T)$, удовлетворяющее условиям (4) и (5). Но тогда это же распределение z удовлетворяет и условиям:

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = v(T) = \hat{v}(T), \tag{13}$$

$$\sum_{k \in S} z_k \ge v(S) \ge \hat{v}(S) \text{ при всех } S \subset T,\ S \ne T. \tag{14}$$

Таким образом, ядро $c(\hat{v})$ содержит в себе непустое (по теореме 1) ядро $c(v)$. ■

Так как ядро $c(\hat{v})$ снова оказывается непустым, можно повторить все, что было сказано в конце предыдущего раздела о работе тотальной коалиции (объединенных производителях товаров). Мы этого делать не будем. Отметим лишь одно, как представляется, важное обстоятельство. Независимо от того, идет ли речь о централизованно управляемой экономике или о "рыночной" экономике, управляемой владеющей средствами производства элитой, наиболее существенны лишь цели центра управления. Если целью является номинальное обогащение управляющего кластера, работает первый вариант модели с ориентацией на внешние цены товаров (разд. 2). Если же целью является максимальное удовлетворение внутренних потребностей тотальной коалиции, то больше, видимо, подойдет второй вариант модели (разд. 3) с ориентацией на внутренние цены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ двух вариантов модели объединения в единое экономическое пространство позволяет сделать вывод о том, что решающее значение имеет не вид управляющего центра (политическое руководство или элита, владеющая средствами производства), а цели, которые этот управляющий центр ставит перед собой. Если цель – собственное номинальное обогащение, то управляющие действия (распределение ресурсов) направлены на максимизацию валового выпуска товаров во внешних ценах (т.е. в валюте, в которой номинируется обогащение). Если же целью являются внутренние интересы тотальной коалиции, то для оценки валового выпуска используются внутренние цены, специально подобранные для лучшего удовлетворения внутренних потребностей. Важно отметить, что и в том, и в другом случае поведение отдельных производителей благ одинаковое: они стремятся максимизировать свой валовый выпуск в выбранных управляющим центром ценах. При управлении политическим центром необходимы профессиональное планирование и дисциплина исполнения. При управлении элитой, владеющей средствами производства, повышается значение системы кредитования. Конечно, и в этом случае необходим контроль со стороны политического центра за деятельностью кредитных организаций, чтобы высокими процентами за кредит они не "скушали бы" всю экономику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Канторович Л.В. (1959): Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Издательство АН СССР.

Rosenmüller J.(1971): Kooperative spiele und märkete. Berlin, Heidelberg. N.Y.: Springer Verlag. (Русский перевод: Розенмюллер И. (1974): Кооперативные игры и рынки. М.: Мир.)

Rockafellar R.T. (1970): Convex Analysis. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. (Русский перевод: Рокафеллар Р. (1973): Выпуклый анализ. М.: Мир.)

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

A Model of Uniting into the Common Economic Space

V. A. Bulavsky

Two variants of uniting the producers into the common economic space are studied, the study being based on the scheeme of corporate game with collateral payments. One variant is based on the priced of the goods produced outside the model. The aim of management (rellocation of resources) is the output of goods measured in external prices. The second variant is based on the structure of goods output. The priced being created inside the economic system, concerning the increase of goods output within the given assortment. Discussed the comparison of the centralised and market models on the proposed model variants.

Keywords: corporate game with collateral payments, uniting into the common economic space, the aims of economic management.